Обзор научных направлений математической школы под руководством проф. А.С.Мищенко.

March 20, 2002

Под руководством проф. А.С.Мищенко на механико-математическом факультете МГУ начиная с 60-х годов регулярно проводятся научные семинары по геометрии и топологии и их приложениям. В действительности, свои первые научные семинары А.С.Мищенко начал проводить для своих однокурсников и даже старших коллег еще будучи студентом 4-го курса по общей и алгебраической топологии. Более интенсивно семинары стали работать во время обучения в аспирантуре. С 1968 года научные семинары стали проходить на регулярной основе.

На этих семинарах происходит координация научных исследований по геометрии и тополгии и их приложениям, которые осуществляются его учениками и коллегами. Хотя формально тематика семинаров концентрируется вокруг геометрии и топологии, по существу интересы математической школы А.С.Мищенко выходят далеко за рамки геометрии и топологии и включают в себя самые разнообразные математические проблемы от классических областей, таких как алгебра, анализ и теория дифференциальных уравнений, до современных направлений в механике, математической и теоретической физике, прикладной математике, экологии, молекулярной биологии и биоинформатике.

Исторически тематика научных исследований под руководством А.С.Мищенко может быть разделена на несколько основных научных направлений:

1. Теория обобщенных теорий гомологий: бордизмы и K-теория.
2. Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.
3. Алгебраические комплексы Пуанкаре.
4. Функциональные методы в дифференциальной топологии - некоммутативная геометрия.
   (a) Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха для многообазий.
   (b) Теория индекса и псевдодифференциальные операторы.
   (c) Теория C*-алгебр и гильбертовых модулей,
   (d) Неклассические представления дискретных групп.
5. Интегрирование гамильтоновых систем.
6. Прикладные направления геометрии и топологии:
   (a) асимптотические методы, метод канонического оператора Маслова.
   (b) стохастические уравнения в экологии
   (c) диффернциальные игры преследования убегающего объекта.
   (d) двумерная модель Изинга в статистической физике.

1 Гомотопические инварианты неодносвязных многообразий.

Эта группа вопросов посвящена нахождению по возможности наиболее полной системы инвариантов гладких многообразий без учета каких либо дополнительных структур, оснащаемых многообразие.

Гладкая структура на многообразии естественным образом порождает на нем систему так называемых характеристических классов, принимающих значения в группах когомологий многообразия с различными системами коэффециентови определеяемых исключительно в терминах гладкой структуры. Теория характеристических классов гладких многообразий бесспорно является наиболее существенным методом изучения различных геометрических и топологических свойств гладких многообразий в силу естественности их описания и представления в дифференциально-геометрических терминах, а также потому, что поведение характеристических классов позволяет описывать и классифицировать строение гладких многообразий практически исчерпывающим образом по модулю конечного числа возвожностей. Однако, система характеристических классов является в некотором смысле переопределенной системой данных. Более строго это означает, что для некоторых характеристических классов их зависимость от выбора гладкой структуры на многообразии несущественна. Поэтому, одна из классических проблем в дифференциальной топологии заключалась в том, чтобы выяснить степень инвариантности того или иного характеристического класса , т.е. зависимость характеристических классов от выбора гладкой структуры в том или ином типе отношения эквивалентности многообразии.

Наиболее часто встречающиеся в топологии отношения эквивалентности между многообразиями являются кусочно–линейные гомеоморфизмы, непрерывные гомеоморфизмы, гомотопические эквивалентности. Для этих отношений эквивалентностей проблема формулируется следующим образом: какие характеристические классы являются: а) комбинаторно инвариантными, б) топологически инвариантными, в) гомотопически инвариантными?

Ограничиваясь характеристическими рациональными классами Понтрягина, отметим, что в 1965 г. С.П.Новиков доказал, что все рациональные классы Понтрягина являются топологическим инвариантами.

В случае же гомотопической инвариантности характеристических классов Понтрягина эта проблема далека от разрешения даже в настоящее время. С другой стороны, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов представляется достаточно важной проблемой в силу того, что гомотопический тип многообразия представляется более доступным для классификации, по сравнению с его топологическим типом. Более того, существующие методы классификации гладких структур на многообразии сводят эту проблему к описанию гомотопического типа многообразия и к его гомологическим инвариантам. Таким образом, проблема гомотопической инвариантности характеристических классов в различных математических школах представлялась как одна из существенных проблем в диффренциальной топологии.

Проблема гомотопической инвариантности рациональных классов Понтрягина оказалась наиболее интересной (и, возможно, наиболее трудной) с точки зрения взаимосвязей. Важность этой проблемы вытекает, в частности, из того, что в задаче классификации гладких структур на многообразии с помощью метода перестроек Морса необходимо иметь описание всех гомотопически инвариантных классов Понтрягина.

В случае односвязных многообразий еще Новиковым и Браудером на основании формулы Хирцебруха было доказано, что классическая сигнатура многообразия является гомотопическим инвариантом, что является следствием гомотопической инвариантности групп гомологий вместе с операциями пересечения. Более того, в односвязном случае на основании классификационных теорем, доказанных Новиковым и Браудером методом перестроек Морса, устанавливается, что гомотопически инвариантным рациональным характеристическим классом

является только классическая сигратура многообразия.

Таким образом, в случае рациональных характеристических классов для односвязных многообразий задача о нахождении всех гомотопически инвариантных характеристических классах была полностью установлена в классических работах 60-х годов.

Для неодносвязных многообразий задача об описании гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина, отвечающих за препятствия к перестройке нормальных отображений до гомотопической эквивалентности, оказаль намного труднее, поскольку существенную роль здесь играет структура фундаментальной группы многообразия. Это обстоятельство наряду с тем, что описание и распознавание фундаментальной группы в конечных терминах, как известно, невозможо, в отличие от других топологических проблем вызывает дополнительный интерес к этой проблеме.

Для некоторых простых случаев, когда фундаментальная группа является свободной абелевой задачу можно было решить чисто дифференциально-геометрическими методоми, используя технику так называемых внутренних перестроек. Такое решение тоже было представлено в Московской топологической школе Г.Г.Каспаровым. В общем же случае оказалось, что задача описания гомотопически инвариантных рациональных классов Понтрягина может быть сведена к проверке, что так называемые высшие сигнатуры являются гомотопичеси инвариантными.

Точная формулировка этой проблемы известна под названием гипотезы Новикова. Положительное ее решение позволило бы хотя бы частично обойти алгоритмические трудности описания и распознавания фундаментальных групп в задаче классификации гладких структур на многообразии.

Гипотеза Новикова заключается в том, что всякое характеристическое число вида $\mathrm{sign}_x(M) = \langle L(M)f^*(x), [M]\rangle$, где $L(M)$ обозначает полный класс Хирцебруха, $x \in H^*(B\pi; Q)$ – произвольный рациональный класс когомологий классифицирующего пространства фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$ многообразия M, а $f : M \longrightarrow B\pi$– отображение, индуцирующее изоморфизм фундаментальных групп, – является гомотопическим инвариантом неодносвязного многообразия M. Числа $\mathrm{sign}_x(M)$ называются высшими сигнатурами многообразия M в знак того, что при $x = 1$ число $\mathrm{sign}_1(M)$ совпадает с классической сигнатурой многообразия M.

Ситуация с неодносвязыми многообразиями оказывается соврешенно отличная от случая односвязных многообразий, несмотря на то, что Уолл построил неодносвзный аналог теории перестроек Морса. Однако препятствия к таким перстройкам не имеют достаточно эффективного описания. Одним из способов обойти эту трудность заключается в том, чтобы выяснить, какие из рациональных характричтических классов неодносвязных многообразий являются гомотопическими инвариантами.

В 1970 А.С.Мищенко установил, что единственными кандидатами на гомотопически инвариантные характеристические классы являются только высшие сигнатуры. Более того, им был найден универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемая симметрическая сигнатура $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры.

Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. Это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению норамальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом колце $Q\pi$.

Проблема описания гомотопически инвариантных характеристических классов является одой из наиболее интересных проблем в дифференциальой топологии на протяжении последних 25 лет, попытки доказательства которой породили многочисленные исследования, приведшие к открытию глубоких результатов как в самой топологии, так и в смежных математических дисциплинах, таких как теория представлений, $K-$теория, банаховы алгебры и модули, теория эллиптических операторов, привела к созданию самостоятельного направления под названием некоммутативная геометрия.

2 Алгебраические комплексы Пуанкаре.

Первая трудность, которую необходимо было преодолеть при изучении неодносвязных перестроек многообразий, заключалась в том, что когомологии неодносвязных многообразий с универсальной локальной системой коэффициентов не обладают двойственностью Пуанкаре, точнее двойственность Пуанкаре не имеет вида невырожденной квадратичноой формы. Причина этого заключается в том, что модули гомологий неодносвязного многообразия не являются вообще говоря проективными. В 1970 году в ([6],[7]) А.С.Мищенко преодолел эту алгебраическую трудность и нашел универсальный гомотопический инвариант со значениями в группе Уолла фундаментальной группы с рациональными коэффициентами, так называемую симметрическую сигнатуру $\sigma(M) \in L_*(Q\pi)$ многообразия M, которая является неодносвязным аналогом классической сигнатуры.

Симметрическая сигнатура вычисляется вполне алгоритмическим способом по коэффициентам инцидентности произвольного симплициального разбиения неодносвязного многообразия и обладает всеми существенными свойствами, присущими классической сигнатуре. В частности, показано, что симметрическая сигнатура является гомотопическим инвариантом и инвариантом бордизмов многообразий, сохраняющих фундаментальную группу. Там же было показано, что рациональное препятствие к перестройке нормального отображения до (простой) гомотопической эквивалентности описывается в виде разности симметрических сигнатур пары многообразий. В частности это значит, что рациональное препятствие может быть описано исключительно в терминах характеристических классов одного многообразия и соответствующего нормальному отображению норамальному векторному расслоению в когомологиях многообразия с локальной системой коэффициентов, порожденной регулярным представлением фундаментальной группы π в групповом колце $Q\pi$.

На основании развитой им алгебраической техники так называемыых алгебраических комплексов Пуанкаре в 1971 году он показал ([8]), что теория перестроек гладких многообразий по существу зависит не столько от гладкости многообразия, сколько от гомотопической структуры пространства. Он доказал, что препятствие к перестройке нормального отображения до гомотопической эквивалентности гладких многообразий обобщаются до категории геометрических комплексов Пуанкаре. Таким образом им были найдены формулы для описания препятствия к перестройке в виде некоторого характеристического числа со значением в когомологиях многообразия с универсальной локальной системой коэффициентов, порожденной естественным вложением фундаментальной группы в ее групповое кольцо. Однако полученные формулы были еще далеки от эффективности, поскольку кольцо коэффициентов могло быть выражено лишь в терминах эрмитовой $K-$теории.

3 Функциональные методы в дифференциальной топологии - некоммутативная геометрия.

За последние 2-3 декады прошлого столетия в топологии усиленно развивались направления, которые сейчас принято называть "некоммутативной геометрией". По сути дела, это назва-

ние группирует круг задач и методов их решения, которые изначально базировались на довольно простой идее переформулировании топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций. Хотя эта идея очень старая и восхощдит к ключевой теорема Гельфанда-Наймарка о взаимно однозначном соответствиии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^*-алгебр, и разрабатывалась различными авторами как в коммутативном (например, в Московской топологической школе А.М. Виноградовым и его учениками) так и в некоммутативном, в более или менее явном виде эта идея была провозглашена в виде программы действия А.Коном в его книге "Некоммутативная геометрия" ([30]).

Несмотря на ее самоочевидность, идея наряду с коммутативными C^*-алгебрами, котрые можно интерпретировать как алгебры функций на топологических пространствах ее максимальных идеалов, рассматривать также и некоммутативные алгебры как функции на несуществующем "некоммуттативном" пространстве оказалась настолько плодотворной, что позволила соединить воедино многообразие разноообразных представлений и методов из таких разделов, как топология, дифференциальная геометрия, функциональный анализ, теория представлений, асимптотические методы в анализе м взаимно обогатить их новыми теоремами и свойствами.

Одна из классических задач в гладкой топологии, заключающаяся в описании топологических и гомотопических свойств характеристических класов гладких и кусочно-линейных многообразий, за это время приобрела практически завершенный вид исключительно благодаря тому, что к ней были применены разнообразные методы функционального анализа. И, наоборот, попытки осмыслить и решить классические топологические задачи привели к обогащению методов функционального анализа. И, как это типично происходит, решение одних частных задач привело к открытию новых горизонтов в развитии новых математических методов и окрытию новых свойств классических математических объектов.

Именно в указанных напрвлениях интенсивно проводились исследования в МГУ. Краткое перечисление задач, исследуемых у нас и получивших в том или ином виде развитие, может быть следующим:

1. Новые классы представлений групп: Фредгольмовы, представления в коммутативные и некоммутативные алгебры, асимптотимческие представления.

2. Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха.

3. Теория индекса эллиптических операторов и формула Лефшеца в различных аспектах.

4. Теория гильбертовых C^*-модулей.

3.1 Фредгольмовы представления.

В 1974–1975 гг. ([9],[10]) А.С.Мищенко применил метод теории фредгольмовых представлений, позволивший ему установить гипотезу Новикова для широкого класса фундаментальных групп. Применение теории представлений в конечномерном случае приводит к формулам типа Хирцебруха для сигнатур многообразия в когомологиях с локальной системой коэффициентов в конечномерном венкторном пространстве. Однако запас характеристических классов, которые можно получать с помощью конечномерных представлений слишком беден, и для многих фундаментальных групп сводится только к классической сигнатуре. Решающим шагом было обнаружение бесконечномерного аналога представлений, которые, с одной стороны, расширили запас представлений, а, с другой, сохраняли естественные свойства конечномерных представлений. Этот бесконечномерный аналог представлений заключается в новой теоретико–функциональной конструкции в виде пары унитарных бесконечномерных представлений (T_1, T_2) фундаментальной группы π в гильбертовом пространстве H и фредгольмового оператора F, сплетающего два представления T_1 и T_2 с точностью до компактных операторов

в гильбертовом пространстве. Тройка $\rho = (T_1, F, T_2)$ называется фредгольмовым представлением группы π. С категорной точки зрения фредгольмово представление является относительным представлением групповой C^*–алгебры $C^*[\pi]$ в паре банаховых алгебр $(B(H), \mathcal{K}(\mathcal{H})$, где $B(H)$ есть алгебра всех ограниченных операторов гильбертового пространства H, а $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ есть факторалгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = B(H)/\mathrm{Comp}(H)$ по идеалу компактных операторов. Существенным шагом было построение канонического векторного расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$ с помомощью фредгольмового представления группы π. Для прмименения фредгольмовых представлений к формулам Хирцебруха А.С.Мищенко ([10]) потребовалось установить возможность переходить от семейства фредгольмовых представлений к единичному представлению с тем же самым характером Чженя.

Теория фредгольмовых представлений позволила доказывать гипотезу Новикова не только для указанного класса фундаментальных групп. Ученик А.С.Мищенко Ю.П.Соловьев применил разработанную технику фредгольмовых представлений для для дискретных подгрупп алгебраических групп с помощью комплексов Брюа-Титса ([31]). Более того [... работы по рациональныж гомологических многообразиях, ...]

Теория фредгольмовых представлений в 1995 году была распространена А.С.Мищенко ([19]) на случай непрерывных семейств, контролируемых на бесконечности, что позволило применить аналогичную технику и для таких фундаментальных групп, классифицирующие пространства которых не обяхательно компактны. Более того им ([20]) была предложена общая схема метрического подхода к построению фредгольмовых представлений фундаментальной группы, которая сводит задачу к построению специального пополнения классифицируещего пространства и решению уже чисто гомотопической задачи на последнем.

Теория фредгольмовых представлений , построенная в работах А.С.Мищенко, была в дальнейшем распространена на случай произвольных C^*–алгебр в виде некоторого варианта топологической K–теории и доведена до обобщенных формул Хирцебруха. А.С.Мищенко совместно с Ю.П.Соловьевым ([21]) разработал чисто гомотопический метод доказательства обобщенных формул Хирцебруха, основанный на категорном истолковании двойственности Пуанкаре в виде пучка алгебраических комплексов Пуканкаре. Таким образом , с помощью гомотопической техники была установлена обобщенная формула Хирцебруха не только для гладких многообразий, но и для кусочно линейных многообразий, где техника эллиптических операторов не действует.

3.2 Асимптотические и почти представления.

Очень плодотворной для некомпактных групп оказалась идея рассматривать вместо представлений некоторые более общие отображения в алгебру операторов, которые, с одной стороны, увеличивают свободу маневра, а, с другой, сохраняют основные черты представлений, необходимых для применения их в топологических задачах. Источником такого сорта идей послужили, с одной стороны чисто физические соображения, которые заключаются в том, что любая наблюдаемая симметрия явления, а вместе с ней и некоторый закон сохранения, в действительности проявляется неточно. Поэтому естественно возникает вопрос распознавания по неточной симметрии истинной симметрии. Эта задача известна еще со времен Халмоша и его задачи о паре почти коммутирующих унитарных операторов. Если операторы действуют в конкретном конечномерном пространстве, то при достаточно близких почти коммутирующих унитарных операторов их можно аппроксимировать точно коммутирующими операторами. Совершенно иная ситуация в случае бесконечномерных пространств или даже в случае равномерных оценок коммутаторной невязки, не зависящих от размерности пространства. Как показал Войкулеску (так называемая пара Войкулеску), существует последовательность почти коммутирующих пар унитарных операторов со стремящимся к нулю коммутатором, которые нельзя сколь угодно близко аппроксимировать последовательностью пар коммутирующих операторов. С точки зрения теории представлений групп это наблюдение может быть истол-

ковано как построение асимптотического представления свободной абелевой группы с двумя образующими, которое не сводится к точному представлению.

Дургой вариант обобщения представлений на случай неточных соотношений дает понятие квазипредставлений, в которых предполагается равномерная оценка норм соотношений в группе. В этом случае, как показал А.Штерн, ситуация прямо противоположная, что позволило создать стройную теорию квазипредставлений и квазихарактеров.

В статье [38] найдена связь между асимптотическими представлениями дискретной группы и фредгольмовыми представлениями этой группы. Для этого построена новая C*-алгебра, обслуживающая асимптотические представления дискретных групп и C*-алгебр с конечным числом порождающих элементов, и найден способ ее вложения в алгебру Калкина такой, что индуцированный этим вложением гомоморфизм K_1-групп является изоморфизмом. Благодаря наличию такого вложения асимптотические представления пропускаются через представления в алгебру Калкина. Как следствие, показано, что векторные расслоения над классифицирующим пространством $B\pi$, которые могут быть получены с помощью асимптотических представлений дискретной группы π, могут быть также получены с помощью представлений группы $\pi \times \mathbf{Z}$ в алгебру Калкина. Найдено также обобщение понятия фредгольмова представления и показано, что асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления. Найдены примеры дискретных групп, не обладающих достаточным запасом асимптотических представлений, что показывает, что класс фредгольмовых представлений строго больше класса асимптотических представлений.

На основе введенного А.С.Мищенко понятия дискретизации асимптотических гомоморфизмов правое обратное отображение к отображению Конна-Хигсона построено В.М.Мануйловым для общих сепарабельных C*-алгебр. В.М.Мануйловым и К.Томсеном сформулировано понятие асимптотически расщепимого расширения C^*-алгебр, и дана конструкция, которая определяет E-функтор Конна–Хигсона в терминах, аналогичных определению KK-функтора Каспарова. Единственным различием является то, что вместо вполне положительных отображений для расщепления используются асимптотические гомоморфизмы. При этом показано, что функтор Ext всех расширений содержит E-функтор как прямое слагаемое. Доказано, что любой асимптотический гомоморфизм в алгебру Калкина гомотопен настоящему гомоморфизму. Этот факт удивителен, так как в ранее известных примерах асимптотических гомоморфизмов существенно больше, чем настоящих (с точностью до гомотопии). Это свойство алгебры Калкина дает возможность доказать, что функторы Ext и E совпадают в большинстве случаев.

В [40] найден важный пример конечно представленной группы, показывающий, что асимптотических представлений строго меньше, чем фредгольмовых. Именно, показано, что для найденной группы Γ естественное отображение из группы асимптотических представлений в группу $K_0(B\Gamma)$ является тривиальным с точностью до кручения, в то время как аналогичное отображение из группы фредгольмовых представлений накрывает свободную образующую $K_0(B\Gamma)$. При исследовании обнаруженного примера удалось сформулировать новое свойство конечно порожденных групп, связанное с почти представлениями: группа называется асимптотически устойчивой, если любое достаточно точное ее почти представление может быть включено в асимптотическое представление. Доказано, что, наряду с группами, очевидно обладающими этим свойством (свободными, абелевыми), этим свойством обладают также фундаментальные группы ориентированных поверхностей. Представляется любопытным, что группа Γ указанным свойством не обладает.

3.3 Двойственность Пуанкаре и формула Хирцебруха.

Известная формула Хирцебруха утверждает, что для $4k$–мерного ориентируемого компактного замкнутого многообразия X имеет место равенство

$$\mathrm{sign} X = 2^{2k} \langle L(X), [X] \rangle , \qquad (1)$$

где signX есть сигнатура невырожденной квадратичной формы в группах когомологий $H^{2k}(X,C)$, определяемой $\cup$–произведением, а $L(X)$ есть характеристический класс Хирцебруха.

Существует несколько способов обобщения формулы Хирцебуха, главным образом, для неодносвязных многообразий. Именно, пусть X – замкнутое ориентируемое неодносвязное многообразие, $\pi = \pi_1(X)$, и пусть $f_X : X \longrightarrow B\pi$ – каноническое отображение, определенное с точностью до гомотопии, которое индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Фиксировав конечномерное представление $\rho : \pi \longrightarrow U(N)$, можно рассмотреть группы когомологий $H^{2k}(X,\rho)$ с локальной системой коэффициентов, порождаемой представлением ρ . Тогда $\cup$–произведение индуцирует невырожденную квадратичную форму на этой группе, сигнатуру которой будем обозначать через $\mathrm{sign}_\rho X$. Нетрудно установить, что

$$\mathrm{sign}_\rho X = 2^{2k} \langle L(X) \mathrm{ch} f_X^* \xi^\rho, [X] \rangle , \tag{2}$$

где $\xi\rho$ есть векторное расслоение над $B\pi$, порожденное представлением ρ.

Несмотря на то, что левая и правая части формулы (2) совпадают с формулой (1), это обобщение оказывается полезным при дальнейших обобщениях.

Самое естественное обощение заключается в рассмотрении унитарного предсталения фундаментальной группы в C^*-алгебру. Пусть $C^*[\pi]$ есть C^*- групповая алгебра группы π. Всякое унитарное представление группы π однозначно распространяется до представления $\bar\rho$ алгебры $C^*[\pi]$. Положим $A = \mathbf{Im}\bar\rho$, $\bar\rho : C^*[\pi] \longrightarrow A$. Через ξ^ρ обозначим векторное расслоение над $B\pi$ со слоем A , функции склейки которого порождаются действием группы π на алгебре A с помощью представления ρ. Векторное расслоение ξ^ρ образует элемент K–группы

$$\xi^\rho \in K_A(B\pi).$$

Мы можем теперь выписать правую часть формулы (2):

$$? = 2^{2k} \langle L(X) \mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q. \tag{3}$$

Левая часть формулы может быть вычислена как симметрическая сигнатура многообразия X после замены кольца, задаваемого представлением ρ, так что полуаем обобщенную формулу Хирцебруха (см. [21])

$$\mathrm{sign}_\rho(X) = 2^{2k} \langle L(X) \mathrm{ch}_A f_X^* \xi^\rho, [X] \rangle \in K_A(\mathrm{pt}) \otimes Q.$$

Обобщенная формула Хирцебруха имеет так называемую гладкую версию, в которой вместо сигнатуры многообразия подставляется индекс оператора Хирцебруха на многообразии. Достоинство такой формулы заключается в том, что оператор Хирцебруха может действовать в сечениях произвольного векторного расслоения на многообразии. Поэтому естественно возник вопрос о перенесении гладкой версии формулы Хирцебруха на комбинаторный случай, с тем, чтобы эффективно построить инварианты типа сигнытуры с коеффициентами в произвольном (неплоском) векторном расслоении.

Если расслоение ξ порождается некоторым представлением фундаментальной группы π, то комбинаторная версия формулы Хирцебруха сводится к классическим формулам. Все эти формулы требуют определенных ограничений на вид рассления ξ: расслоение ξ должно быть плоским расслоение в случае точного представления (или почти плоским в случае так называемого асимптотического представления).

В 1998-2001 годах А.С.Мищенко предпринял программу построения локальной комбинаторной формулы Хирцебруха с коэффициентами в произвольном векторном расслоении. Идея такого постронения была сформулирована в работе М.Громова [34] и восходит к конструкции алгебраических комплексов Пуанкаре и так называемой симметрической сигнатуры, рассмотренных в работах А.С.Мищенко [6] и [21].

А.С.Мищенко ([22]) построил новую алгебраическую категорию, называемую *почти алгебраическими комплексами Пуанкаре*. Эта категория обладает всеми необходимыми свойствами для построения инвариантов типа сигнатуры комбинаторного многообразия с локальной системой коэффициентов, порождаемой слоями некоторого векторного расслоения ξ на многообразии. Показано, что у каждого компктного замкнутого комбинаторного многообразия существует такое достаточно мелкое симплициальное разбиение, которое естественным образом порождает почти алгебраический комплекс Пуанкаре, сигнатура которго служит левой частью формулы Хирцебруха. В частности, построенная формула дает новую конструкцию рациональных классов Понтрягина по локальной комбинаторной структуре на многообразии X.

В случае, когда векторное расслоение ξ порождается некоторым точным представлением, то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре совпадает с алгебраическим комплексом Пуанкаре из работы [6], а его сигнатура совпадает с сигнатурой многообразия в когомологиях с соответствующей локальной системой коэффициентов.

В случае, когда расслоение ξ порождается некоторым асимптотическим представлением (и, следовательно, не является плоским расслоением), то соответствующий почти алгебраический комплекс Пуанкаре может быть получен из универсального алгебраического комплекса Пуанкаре над групповой алгеброй фундаментальной группы π многообразия X путем замены колец. При этом сигнатура этого почти алгебраического комплекса Пуанкаре вычисляется как образ симметрической сигнатуры многообразия X при замене колец.

3.4 Теория эллиптических операторов над C^*–алгебрами

Один из методов устанвления формулы Хирцебруха в односвязном случае связан с использованием свойств индекса эллиптических операторов на многообразии. Поэтому естествнно возникла задача применить теорию эллиптических лператоров и в неодносвязном случае. Косвенные соображения, касающиеся описания гомологий некомпактных многообразий, таких как L_2–когомологии, указывали на естественность такой постановки задачи. Поэтому в 1978 А.С.Мищенко и А.Т.Фоменко ([13],[14]) предприняли исследование по изучению гомотопических свойств эллиптических операторов с коэффициентами в произвольной C^*–алгебре. Такие операторы естественным образом возникают в различных задачах теории эллиптических операторов на некомпактных многообразиях или как операторы с операторнозначными коэффициентами. Эти операторы не являются фредгольмовыми операторами в классическом смысле, однако как ядро, так и коядро таких операторов ассоциируются с конечно порожденными проективными модулями над C^*–алгеброй, и, следовательно, порождают гомотопические инварианты эллиптического оператора. Авторы дали точную геометрическую интерпретацию индексу эллиптического оператора над C^*–алгебрами и установили формулы для индекса эллиптических операторов над произвольной C^*– алгеброй, обобщающие формулы Атья–Зингера. В частности, было получено новое доказательство обобщенных формул Хирцебруха.

Теория C^*–модулей и эллиптических операторов на C^*–алгебрами нашли в дальнейшем многочисленные применения как для уравнений в частных производных, так и для задач геометрии и топологии, равным образом в теории банаховых алгебр и C^*–модулей. В частности, ([16]) с помощью этой теории в дальнейшем исследовались гомотопические и спектральные свойства эллиптических операторов на некомпактном пространстве R^n с быстро убывающими, почти периодическими или случайными коэффициентами. Решающим методом в этом сопоставлении является дальнейшее развитие понятия прямого образа для многолистных накрытий многообразий. В случае когда база накрытия является компактным многообразием, задача изучения эллиптических операторов на накрывающем пространстве редуцируется к задаче об эллиптических операторах на компактном многообразии, но с более сложной структурной C^*–алгеброй, порожденной накрытием.

В этом направлении работали ученики А.С.Мищенко - Р.А.Бикташев, Шарипов Ф., О.Филиппов,

которые разработали редукцию задачи об описании спектральных свойств эллиптических операторов на некомпактных многообразиях к такой же задаче на компактных мнрогообразиях.

Пусть A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, $V_G(X;A)$ — банахова категория, образованная локально тривиальными расслоениями над G-пространством X с типичным слоем, равным некоторому проективному A-модулю.

С помощью K-теории банаховых категорий М.Каруби можно ввести в рассмотрение K-теорию $K_G(X;A)$, где A — C*-алгебра с единицей, G — компактная топологическая группа, X — G-пространство, отвечающую банаховой категории локально тривиальных расслоений над X. В 1985 г. Е.В.Троицким доказано, что если X/G обладает конечным открытым покрытием конечной размерности, то тензорное произведение слоев индуцирует изоморфизм

$$K^*_G(X;\mathbf{C}) \otimes K^*(pt;A) \otimes \mathbf{Q} \to K^*_G(X;A) \otimes \mathbf{Q}.$$

С помощью этого утверждения оказывается возможным определить понятие топологического индекса ind_t Мищенко–Фоменко уже в эквивариантном случае. С помощью усреднения в гильбертовых модулях (техника которого была развита Е.В.Троицким) можно определить аналитический индекс ind_a и доказать эквиваринтную версию теоремы Мищенко-Фоменко об индексе: $ind_t = ind_a \in K_0^G(A) \otimes \mathbf{Q}$.

Чтобы учесть при этом кручение в K-теории, Е.В.Троицкий развил более тонкую теорию аналитического индекса (теория топологических гильбертовых модулей, соболевских цепей и т.д.) Наиболее трудным моментом оказалось доказательство C^*-алгебраического аналога свойства (S6) алгебры Сили. Чтобы определить топологический индекс со значениями в $K_0^G(A)$ (а не в $K_0^G(A) \otimes \mathbf{Q}$), надо доказать (с использованием геометрической резольвенты C.Schochet) теорему об изоморфизме Тома в $K_G(.;A)$-теории. Этот результат может рассматриваться как доказательство гипотезы M.Karoubi в важном частном случае.

После этого, используя аксиоматический подход к понятию индекса, оказывается возможным доказать следующую теорему об индексе: $ind_t = ind_a \in K_0^G(A)$.

Можно рассматривать эту теорему как наиболее сильную теорему об индексе "классического направления". Первая группа приложений этой теоремы связана с $\hat{A}$-родами и теорией Громова-Лоусона-Розенберга. В частности, было получено следующее усиление результата Розенберга. Пусть M — компактное многообразие со спинорным универсальным накрытием $\widetilde{M}$, допускающим строго положительную скалярную кривизну, $\pi_1(M) = \pi$, а E — плоское A-расслоение. Имеется расщепляющаяся точная последовательность C*-алгебр $0 \to C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \to C^*(\widehat{\pi}) \to C^*(\pi) \to 0$, где $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}}$ — универсальная алгебра для тех унитарых представлений $\widehat{\pi}$, которые нетривиальны на ядре накрытия $\widehat{\pi} \to \pi$. Тогда определены $C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A$-векторные расслоения $(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \times_\pi S^{\pm}) \otimes A$ на M. Действие $\widehat{\pi}$ коммутирует с D^+. Следовательно, оператор $\widetilde{D}_E^+$ определен на M. Тогда $ind_t \widetilde{D}_E^+ = 0 \in K_0(C^*(\widehat{\pi})_{\mathrm{odd}} \otimes A)$.

Одним из важнейших элементов классической теории индекса эллиптических операторов, еще не включенным в теорию C^*-индекса, оставалась теория индекса эквивариантных семейств. Е.В.Троицким эта проблема была решена в важнейшем случае: доказана теорема об индексе для эллиптических операторов, действующих в сечениях расслоений со слоем проективный модуль над C^*-алгеброй, в ситуации, когда компактная группа Ли действует и на алгебре, и в тотальном пространстве, коммутируя с символом ("дважды эквивариантная" C^*-теорема об индексе). Как приложение, получена эквивариантная теорема об индексе для семейств в случае прямого произведения базы на пространство параметров.

Другая группа приложений теоремы об индексе связана с C*-числами Лефшеца и неподвижными точками. Для автоморфизма C*-эллиптического комплекса, являющегося элементом компактной группы автоморфизмов, определяются числа Лефшеца со значениями в $K_0(A) \otimes \mathbf{C}$. Они связаны с неподвижными точками при помощи формулы типа Атьи-Лефшеца-Сигала. Для произвольного автоморфизма Е.В.Троицкий определил числа Лефшеца со значениями в циклических гомологиях. Числа Лефшеца двух типов связаны характером Чженя Конна-Каруби. В случае W^*-алгебр результаты могут быть усилены.

3.5 Теория гильбертовых C^*-модулей.

Теория индекса эллиптических операторов над C^*–алгебрами потребовала ([14],[15],[18]) развить абстрактную теоретико–функциональную теорию гильбертовых C^*–модулей и фредгольмовых операторов в этих модулях. Наиболее существенными в этом направлении являются результаты, описывающие свойства компактныых и фредгольмовых операторов C^*–модулей, которые существенно отличаются от классических операторов даже в случае простейших коммутативеных алгебр непрерывных функций. Наиболее существенное отличие заключается в том, что операторы и даже линейныые функционалы гильбертовых C^*–модулей как правило не имеют ограниченныых сопряженных, что сильно усложнило анализ их свойств.

Изучение абстрактной теории гильбертовых C^*–модулей и соответствующей топологической K–теории, порожденной векторными расслоениями над C^*–алгеброй вскрыло новые обстоятельства. Одним из трудных моментов, не позволяющим автоматически перенести на случай произвольной C^*–алгебры теорию гильбертовых пространств, состоит в том, что бесконечномерные гильбертовы C^*–модули не являются автодуальными и даже рефлексивными. Однако в некоторых случаях ([18]) А.С.Мищенко установил рефлексивность C^*–модулей.

В настоящее время теория гильбертовых C^*–модулей и алгебр превратилась в самостоятельную дисциплину с многочисленными приложениями в различных математических дисциплинах. В топологии эта теория нашла применение для изучения $\updownarrow_2$–когомологий некомпактных многообразий, аналитического кручения, инварианта Новикова–Шубина, циклических когомологий и др. Так, например, в работе [23] было построено относительное аналитическое кручение на уровне не $\updownarrow_2$–когомологий, т.е. групповых алгебр фон Неймана, а на уровне групповых C^*-алгебр. В частности, показано, что в случае алгебр фон Неймана относительное аналитическое кручение равно разности между аналитическим кручением многообразия и комбинаторным кручением.

Главным алгебро-топологическим инструментом, связывающим геометрию и топологию неодносвязных многообразий с теорией банаховых алгебр, является K-теория "с коэффициентами в C^*-алгебре" $K^*(X;A)$, прежде всего, при A равной алгебре функций на топологическом пространстве (многообразии или классифицирующем пространстве фундаментальной группы) или равной групповой $C*$-алгебре (приведенной или нет) фундаментальной группы. При использовании K-теории с коэффициентами в C^*-алгебре очень важно иметь удобное описание ее в терминах аналитически определенных представляющих пространств. Таким образом, первый круг задач, стоявших перед участниками гранта, был связан с этим вопросом. В случае алгебры с единицей это было сделано нами ранее с использованием стягиваемости общей линейной группы гильбертова модуля $l_2(A)$. Состоят эти представляющие пространства из соответствующим образом определенных фредгольмовых операторов в $l_2(A)$. В связи с тем, что не всякий ограниченный оператор в этом модуле допускает сопряженный, возникают, соответственно, две общих линейных группы (GL и GL^*) и два варианта представляющих пространств. Важно понять, стягиваемы ли эти группы и совпадают ли соответствующие K-теории. Положительный ответ на этот вопрос даст большую техническую свободу, а отрицательный может привести к определению новых инвариантов. Следует отметить, что большинство вопросов в этой сложной теме оставалось нерешенными с 1982 г. Е.В.Троицкому удалось получить ряд важных продвижений в их решении.

Получено новое простое доказательство теоремы Кунца и Хигсона о стягиваемости группы обратимых операторов, допускающих сопряженный, для C^*-алгебр со строго положительным элементом. Доказана стягиваемость полной группы обратимых операторов в некоторых частных случаях, например, для подалгебр алгебры компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве и для алгебр функций на конечномерных многообразиях. Доказана стягиваемость полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля и для общей коммутативной сигма-унитальной алгебры.

В классической работе Диксмье и Дуади в свое время была доказана стягиваемость группы

унитарных операторов в гильбертовом пространстве в сильной топологии. В случае C^*-алгебр Е.В.Троицким доказаны различные варианты обобщения этой теоремы на случай общей и полной общей линейной группы стандартного гильбертова модуля. Роль сильной топологии здесь играет строгая топология.

В.М.Мануйловым, Е.В.Троицким и М.Франком [39] были изучены условные ожидания на C^*-алгебрах, возникающие из действия дискретных групп. Рассмотрен ряд новых примеров действий групп, показывающих, в каких случаях условные ожидания корректно определены. Доказан ряд утверждений о конечности индекса таких условных ожиданий. Показано, что в случае конечности индекса условное ожидание определяет гильбертов модуль с внутренним произведением, принимающим значения в алгебре инвариантных функций. Найдены достаточные условия, при которых этот гильбертов модуль рефлексивен. В частности это так, если все орбиты конечны и ограниченны в совокупности некоторым числом n, и точки, орбита которых меньше n, изолированны. Условие изолированности таких точек оказалось излишним и было снято В.В.Серегиным.

При изучении инвариантов, связанных с действием групп на многообразиях, в том числе, таких как числа Лефшеца C^*-комплексов, естественно рассматривать топологизированные (следом и другими способами) K-группы и распространить доказанные Е.В.Троицким ранее теоремы на этот случай. В этом русле А.А.Павлову удалось определить новые инварианты и исследовать их свойства. Именно, реализация идеи пополнения топологизированных K-групп привела в W^*-случае к определению нового объекта — N-группы.

Построен функтор N_0 на категории алгебр фон Неймана как некоторый (более естественный в W^*-случае) аналог K-теории. Изучена его связь с операторной K-теорией. А именно, показано, что каждый элемент из $N_0(A)$, где A - алгебра фон Неймана, может быть представлен как аддитивная $K_0(A)$-значная мера с компактным носителем, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств комплексной плоскости. Кроме того, исследованы свойства N-групп W^*-алгебр.

Также отметим, что группы $N_0(A)$ как расширения $\mathbf{C} \otimes K_0(A)$-групп естественно возникают при рассмотрении произвольных унитарных эндоморфизмов W^*-эллиптических комплексов. При этом оказывается возможным определить (обобщенные) числа Лефшеца для таких эндоморфизмов со значениями в группе $N_0(A)$.

Кроме того, удалось построить обобщенный характер Чженя как отображение из $N_0(A)$ в банаховы циклические гомологии (четной градуировки) W^*-алгебры A, который является продолжением классического характера Чженя с $K_0(A)$ в некотором естественном смысле.

Для гильбертовых модулей над C^*-алгебрами Е.В.Троицким и П.С.Поповым была исследована проблема почти ортодополняемости функционалов свободным подмодулем, которая тесно связана со стягиваемостью полной линейной группы. Свойство почти ортодополняемости функционалов было рассмотрено для стандартного модуля $L_2(A)$ над алгебрами с единицей, в этом случае оно является обобщением определения бесконечной размерности на некоммутативный случай.

Доказана эквивалентность двух определений (K, E) этого свойства в общем некоммутативном случае. Получены критерии выполнения этого свойства для алгебр фон Неймана, выраженные в терминах существования частичных изометрий, у которых коядро строго включает образ. Дано доказательство стабильности класса K, E-алгебр относительно тензорного произведения на матричные алгебры. Приведены примеры K, E-алгебр и контрпримеры, показывающие отличие рассмотренного свойства от других определений размерности, или ранга, для C^*-алгебр.

В теории гильбертовых модулей над C^*-алгебрами ряд интересных результатов получен М.Франком — найдена связь между свойствами различных классов операторов в гильбертовых модулях и различными классами мультипликаторов C^*-алгебр и изучено свойство ортодополняемости; В.А.Трофимовым — доказано свойство рефлексивности для важных классов C^*-алгебр; В.М.Мануйловым — доказана теорема о диагонализации компактных операторов

в гильбертовых модулях над некоторым классом C^*-алгебр.

Последние 10-12 лет работа научного коллектива под руководством А.С.Мищенко была поддержана рядом грантов из нескольких фондов: Международный научный фонд (фод Сороса), Российский фонд фундаментальных исследований, Международный фонд INTAS. В 1996 году А.С.Мищенко была присуждена Государственная премия Российской федерации в области науки и техники за цикл работ "Исследование инвариантов гладких многообразий и динамических систем" (совместно с А.Т.Фоменко). По результатам исследованием А.С.Мищенко и его учениками было опубликовано несколько монографий [?], [44], [43], [35]. Ряд научных результатов научного коллектива был подытожен в цикле статей, опубликованных в специально отведенном для этого томе журнала Acta Applicandae Mathematicae в 2001 году. В 2001 году в связи с 60-летием со дня рождения А.С.Мищенко была проведена международная конференция на тему " ", в которой приняло участие около 60 российских и иностранных ученых.

4 Интегрирование гамильтоновых систем.

К этой группе проблем относится разработка алгебраических и дифференциально–геометрических методов исследования структуры гамильтоновых динамических систем на симплектических многообразиях, допускающих богатую группу симплектических симметрий. Фактически, данная постановка проблемы проистекает из классической теоремы Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы с n степенями свободы при наличиии n независимых попарно коммутирующих первых интеграла динамической системы. Согласно теореме Неттер существование первых интегралов гамильтоновой системы обусловлено наличием однопараметрической группы симплектических симметрий динамической системы. Эта теорема Неттер легко обобщается на случай, когда семейство симплетических симметрий гамильтоновой динамической системы может быть представлено как конечномерная (некоммутативная) группа Ли симплектических преобразований симплектического многообразия, сохраняющая гамильтоново векторной поле. Переходя к инфинитезимальному представлению, немедленно получается конечномерное пространство первых интегралов, которое снабжено естественной структурой конечномерной (некоммутативной) алгебры Ли относительно опреации взфтия скобки Пуассона, ассоциированной с симплектической структурой на симплектическом многообразии. Теорема Марсдена–Вэйнстейна позволяет произвести по крайней мере локально редукцию гамильтонового векторного поля к новому гамильтоновому векторному полю на симплектическом многообразии меньшей размерности, которое получается из поверхности совместного уровня первых интегралов путем его факторизации по действию стацтонарной подгруппы в группе симметрий.

Существенным шагом оказалось выяснение геометрической природы условий полной интегрируемости в случае наличия некоммутативной группы Ли симплектических симметрий. В 1977 году А.С.Мищенко совместно с А.Т.Фоменко ([3]) нашел естественные алгебро–геометрические условия, при которых наличие конечномерной некоммутативной алгебры Ли первых интегралов автоматически влечет полную интегрируемость гамильтоновой динамической системы в классическом смысле. Этот обощенный способ интегрирования имеет по крайней мере два аспекта. Во–первых, сами условия формулируются в простой и естественной форме и заключаются в том, что размерность симплектического многообразия, на котором действует гамильтонова динамическая система, равняется сумме размерности алгебры Ли первых интегралов и индекса этой же алгебры. В случае попарно коммутирующих первых интегралов соответстующая алгебра Ли является абелевой, т.е. ее индекс совпадает с размерностью, что дает в качестве частного случая классическую теорему Лиувилля. Таким образом обобщенные условия полной интегрируемости позволяют вскрыть геометрическую природу естественных классических условий полной интегрируемости гамильтоновых систем по Лиувиллю.

Во–вторых, как показывают многочисленные классические примеры гамильтоновых си-

стем, возникающих в механике, естественные первые интегралы, происходящие из наличия симметрий, порожденных физичекими условиями, как правило не образуют коммутативной алгебры Ли. Поэтому проблема нахождения достаточной системы коммутипрющих первых интегралов всегда представляла нетривиальную задачу, а их наличие представлялось несколько загадочным. Типичным примером в механие гамильтоновой динамической системы, имеющей богатый запас симметрий, является динамический поток на фазовом пространстве группы Ли, задаваемый левоинвариантной функцией Гамильтона. Условие левой инвариантности функции Гамильтона выполняется во многих механических динамических системах, в частности, при описании динамики движения $n-$мерного твердого тела с закрепленной точкой в центре массы. В последнем случае система первых интегралов образует алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы $SO(n)$.

В той же работе авторы исследовали вопрос, когда наличие условий некоммутативной полной интегрируемости можно переработать в условия полной интегрируемости в классическом, коммутативном смысле. Эти условия связаны не со свойствами симплектического многообразия и гамильтонового векторного поля на нем, а с алгебраическими свойствами соответствующей некоммутативной алгбры Ли первых интегралов гамильтонового векторного поля. Найдены достаточно широкие естественные условия на структуру конечномерной алгебры Ли, при которых некоммутативная теорема Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой динамической системы влечет классическую коммутативную теорему Лиувилля. Этот ворос сводится к задаче полной интегрируемости некоторых специальных гамильтоновых систем на фазовом пространстве группы Ли. В частности, этот вопрос в случае группы $SO(n)$ сводится к полной интегрируемости динамики движения твердого тела, который был проанализированн авторами ранее([2]) и в более общей ситуации полупростых групп Ли.

Вопрос о полной интегрируемости движения $n-$мерного твердого тела, как естественное обобщение задачи о движении трехмерного твердого тела интересовал исследователей уже давно, как в связи с попытками понять геометрическую природу гамильтоновой механики трехмерного твердого тела, так и в связи с наличием глубоких связей этой задачи с другими задачами математической физики, описываемыми, например, уравнениями Кортевега–де Фриза. Эта задача была поставлена в 1966 году В.И.Арнольдом. В 1970 году Мищенко А.С. нашел ([1]) дополнительную серию первых интегралов для движения $n-$мерного твердого тела. Однако она давала полную интегрируемость помимо трехмерно твердого тела еще только в четырехмерном случае.

Другим примером применения некоммутативной теоремы Лиувилля о полной интегрируемости гамильтоновой системы является установленная А.С.Мищенко в 1982 году ([4], [5]) полная интегрируемость геодезического потока на симметрических пространствах.

Построение первых интегралов гамильтоновых динамических систем изучалось не только на орбитах общего положения, но и на особых орбитах. Здесь часто тоже можно установить полную интегрируемость гамильтоновой системы, что было показано в работах М.В.Мещерякова. Но более интересным оказалось наболюдение, что если рассмотреть неособую поверхность уровня первых интегралов, так что стационарная подгруппа вообще говоря не является коммутативной, то в этом случае однородное пространство, полученное путем факторизации по кокомпактной решетке, и однородный поток на нем устроены более сложным образом. А.Н.Старков начал с того, что стал проверять, является ли замыкание орбиты однородного потоко в указанном случае гладким многообразием. Результаты исследования привели его к построению большой теории однородных потоком на однородных пространствах, и изложены в написанной им монографии [35].

5 Прикладные направления геометрии и топологии

Методы геометрии и топологии развивались А.С.мищенко и его учениками не только и не столько в теоретическом аспекте, но как правило с учетом возможных применений к прикладным задачам как в других областях математики, так и в математическом моделировании задач естествознания. Вот краткий перечень таких задач:

а) Асимптотические методы, метод канонического оператора Маслова. Здесь А.С.Мищенко установил геометрические препятствия в виде когомологий лагранжевого многообразия для построения асимптотик решений уравнений методом комплексного каноничсеского оператора Маслова.

б) Стохастические уравнения в экологии. А.С.Мищенко построил нелинейную математическую модель водного баланса замкнутого водоема, которая более адекватно отражает поведение водного режима на примере Каспийского моря. Ее стохастическая реализация потребовала установить оценку числа стационарных решений таких нелинейных уравнений, что позволило улучшить предсказания поведения уровня замкнутого водоема.

в) Дифференциальные игры преследования убегающего объекта.

В цикле совместных с Л.С.Понтрягиным работ установлены аналитические формулы, позволяющие находить оптимальную стратегию преследования убегающего объекта в линейной дифференциальной игре.

г) Двумерная модель Изинга в статистической физике. Совместно с соавторами А.С.Мищенко установил топологическую природу построения точных формул для статистической суммы в двумерной модели Изинга на поверхностях произвольного рода.

References

[1] А.С.Мищенко , *Интегралы геодезических потоков на группах Ли .* — Функц. анализ и его приложения , (1970) Том **4 ,** No. 3 , p. 73–77

[2] А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко , *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1978) Том **42 ,** No. 2 , p. 396–415

[3] А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко , *Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем .* — Функц.анализ и его приложения , (1978) Том **12 ,** No. 2 , p. 46–56

[4] А.С.Мищенко , *Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах .* — Матем.заметки , (1982) Том **31 ,** No. 2 , p. 257–262

[5] А.С.Мищенко , *Интегрирование геодезических потоков на симметрических пространствах .* — Труды семинара по векторному и тензорному анализу, М. , (1982) Том **21 ,** p. 13–22

[6] А.С.Мищенко , *Гомотопические инварианиты неодносвязных многообразий. 1.Рациональные инварианты .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1970) Том **34 ,** No. 3 , p. 501–514

[7] А.С.Мищенко , *Extraordinary homology theories: bordisms and K-theory .* — Congres international des mathematiciens, Actes, Nice , (1971) , p. 113–119

[8] А.С.Мищенко , *Перестройки комплексов Пуанкаре .* — Матем.сб., Новая сер. , (1971.) Том **85 ,** No. 3 , p. 366–372

[9] А.С.Мищенко , *Infinite-dimensional representations of discrete groups and higher signatures. .* — Math. USSR Izvestia , (1974) Vol. **8 ,** No. 1 , p. 85–111

[10] А.С.Мищенко , *О фредгольмовых представлениях дискретных групп .* — Функц.анализ и его приложения , (1975) Том **9 ,** No. 2 , p. 36–41

[11] А.С.Мищенко , *Классифицирующее пространство эрмитовой K-теории .* — 8-я Воронежская зимняя математическая школа, Воронеж , (1974) , p. 73–74

[12] А.С.Мищенко , *Эрмитова K-теория. Теория характеристических классов, методы функционального анализа .* — Успехи матем. наук , (1976) Том **31 ,** No. 2 , p. 69–134

[13] А.С.Мищенко , *Теория эллиптических операторов над C*-алгебрами .* — Доклады АН СССР , (1978) Том **239 ,** No. 6 , p. 1289–1291

[14] А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко , *Индекс эллиптических операторов над C-алгебрами .* — Известия АН СССР, Сер.матем. , (1979) Том **43 ,** No. 4 , p. 831–859

[15] А.С.Мищенко, А.Т. Фоменко , *C*–алгебры и K*–теория Школа по теории операторов функциональных пространствах, Новосибирск , (1979) ,* p. 16

[16] А.С.Мищенко , *Банаховы алгебры, псевдодифференциальные операторы и их приложения к K–теории .* — Успехи матем. наук , (1979) Том **34 ,** No. 6 , p. 67–79

[17] А.С.Мищенко , *C*–algebras and K–theory .* — Lecture Notes in Mathematics , (1979) Vol. **763 ,** p. 262–274

[18] А.С.Мищенко , *Представления компактных групп в гильбертовых модулях над C*–алгебрами .* — Труды МИАН СССР , (1984) Том **166 ,** p. 161–176

[19] A.S.Mishchenko , *Controlled Fredholm representations .* — in:NovikovConjectures, Index Theorems and Ridgidity (London Math. Soc, Lect. Notes Series, v. 226) , (1995) Vol. **1 ,** p. 174–200 .

[20] А.С.Мищенко , *Метрический подход к построению фредгольмовых представлений .* — Международная конференция, посвященная 100–летию со дня рождения П.С.Александрова, Москва, Тезисы , (1996 , p. 2 .

[21] А.С.Мищенко, Ю.П.Соловьев , *Представления банаховых алгебр и формулы типа Хирцебруха .* — Математический сборник, Новая серия , (1980) Том **111 ,** No. 2 , p. 209–226 .

[22] А.С.Мищенко , *Локальная комбинаторная формула Хирцебруха .* — Труды МИАН , (1999) Том **224 ,** p. 249–263 .

[23] A.S.Mishchenko, A.Carey, Mathai Varghese , *On analytical torsion over C*–algebras .* — Proceedings of the Workshop "Dynamical Zeta Functions, Nielsen Theory / Reidemeister Torsion '96" of the Banach Center, Warszawa, Poland, 1996 , (1999) Vol. **46 ,** p. 20 .

[24] А.С.Мищенко, Векторные расслоения и их применения, "Наука",(1984), 208 p.

[25] А.С.Мищенко, Б.Ю.Стернин, В.Е.Шаталов, Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, "Наука", М.,(1978), 350 p.

[26] А.С.Мищенко, Б.Ю.Стернин, Метод канонического оператора в прикладной математике, Московский институт электронного машиностроения, М.,(1974), 188 с.

[27] А.С.Мищенко, Б.Ю.Стернин, В.Е.Шаталов, Метод канонического оператора Маслова. Комплексная теория, Московский институт электронного машиностроения, М.,(1974), 226 с.

[28] A.S.Mishchenko, B.Ju.Sternin, V.E.Shatalov, Lagrangian Manifolds and the Maslov Operator, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg,(1990), 395 p.

[29] A.S.Mishchenko, G. Luke, Vector Bundles and Their Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrrecht, Boston, London,(1998), 254 p.

[30] A.Connes , *Noncommutative Geometry* . — Academic Press , (1994

[31] Ю.П.Соловьев , *Дискретные подгруппы, комплексы Брюа-Титса и высшие сигнатуры* . — Успехи матем. наук , (1976) Том **31** , No. 1 , p. 261–262 .

[32] Ю.П.Соловьев, Е.В.Троицкий , *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии* . — "Факториал" , (1996 .

[33] В.М.Мануйлов, Е.В.Троицкий , *C^*-гильбертовы модули* . — "Факториал Пресс" , (2001 .

[34] M.Gromov , *Positive curvature, macroscopic mimension, spectral gaps and higher signatures* . — Functional Anal. on the Eve og the 21st Century, v. II. Progress in Math., Basel–Boston: Birkhauser , (1995) Vol. **132**

[35] А.Н.Старков , *Динамические системы на однородных пространствах* . — М., ¡Фазис¿ , (1999) .

[36] Мануйлов В. М. *K-гомологии C^*-алгебр.* Матем. сб. (н.с.) **131** (1986), No. 4, 536–543.

[37] Manuilov V. M. *Diagonalization of compact operators in Hilbert modules over finite W^*-algebras.* Annals of Global Anal. and Geom. **13** (1995), No. 3, 207–226.

[38] Мануйлов В. М., Мищенко А. С. *Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп.* Матем. сб. **189** (1998), No. 10, 53–72.

[39] Frank M., Manuilov V. M., Troitsky E. V. *On conditional expectations arising from group actions.* Zeitschr. Anal. Anwendungen. **16** (1997), 831–850.

[40] Мануйлов В. М. *Почти представления и асимптотические представления дискретных групп.* Изв. РАН, сер. матем. **63** (1999), No. 5, 159–178.

[41] Manuilov V. M., Thomsen K. *Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms.* Adv. Math. **154** (2000), 258–279.

[42] Мануйлов В. М., Томсен К. *Асимптотически расщепимые расширения и E-теория.* Алгебра и анализ **12** (2000), No. 5, 142–157.

[43] Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. *C^*-Гильбертовы модули*. — М.: Факториал Пресс, 2001.

[44] Соловьев, Ю. П., Троицкий, Е. В. *C^*-алгебры и эллиптические операторы в дифференциальной топологии* М., ¡Факториал¿, (1996)

[45] , . — , () Том , No. , p. .

[46] , . — , () Том , No. , p. .