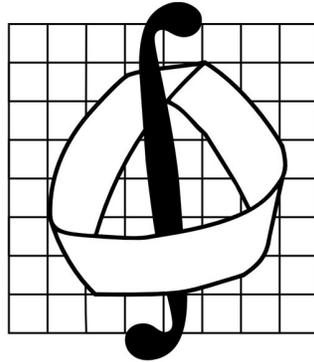


Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра Высшей Геометрии и Топологии



Курсовая работа
студента 312 группы
Айкына Алишера

Коммутант и нижний центральный ряд прямоугольной группы Коксетера
The commutator subgroup and the lower central series of a right-angled Coxeter group

Аннотация

В данной работе рассматривается изоморфизм между фундаментальной группой вещественного момент-угол комплекса $R_{\mathcal{K}}$ и коммутантом прямоугольной группы Коксетера $RC_{\mathcal{K}}$, когда \mathcal{K} - правильный m -угольник, и получен алгоритм явного вычисления соотношения на минимальный набор образующих $RC_{\mathcal{K}}$ для случая $m = 5$.

Научные руководители:
к.ф.-м.н, доцент
Ероховец Николай Юрьевич,
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2021

1 Предварительные сведения

Пусть $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ - конечное упорядоченное множество и \mathcal{K} - симплициальный комплекс на множестве $[m]$

Определение 1.1. (полиэдральное произведение). Пусть

$$(X, A) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

- набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $pt \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(X, A)^I = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k : x_k \in A_k \text{ при } k \notin I \right\}$$

и определим полиэдральное произведение набора (X, A) , соответствующее комплексу \mathcal{K} , как

$$(X, A)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right)$$

Далее мы будем рассматривать только частный случай, когда все пары (X_i, A_i) одинаковы,

т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для $i = 1, \dots, m$.

Определение 1.2. Пусть $X = D^1$ - отрезок $[-1, 1]$, $A = S^0$ - его граница, состоящая из двух точек. Тогда полиэдральное произведение

$$(D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^1, S^0)^I$$

будем называть **вещественным момент-угол комплексом** и обозначать через $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$.

$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ представляет собой кубический подкомплекс в m -мерном кубе $(D^1)^m = [-1, 1]^m$.

В случае, когда \mathcal{K} - цикл из $m \geq 4$ звеньев (граница m -угольника), то $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ будет остовом куба $(D^1)^m$. В дальнейшем для нас будет важен только этот случай. О конструкции вещественного момент-угол-комплекса можно найти в книге Бухштабера В., Панова Т.[1], Chapter 4.

Определение 1.3. Пусть Γ - граф с m вершинами. Будем писать $\{i, j\} \in \Gamma$, если $\{i, j\}$ является ребром. Обозначим через $F(g_1, \dots, g_m)$ свободную группу с m образующими, соответствующими вершинам графа Γ .

Прямоугольная группа Коксетера RC_{Γ} , соответствующая графу Γ , задается образующими и соотношениями как

$$RC_{\Gamma} = F(g_1, \dots, g_m) / (g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i \text{ при } \{i, j\} \in \Gamma).$$

В качестве Γ для RC_{Γ} и \mathcal{K} для $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ далее будем рассматривать только границу m -угольника.

2 Коммутант и момент-угол комплекс

В этом разделе рассмотрим связь между коммутантом группы $RC_{\mathcal{K}}$, который будем обозначать через $RC'_{\mathcal{K}}$, и фундаментальной группой $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$. Через (a, b) будем обозначать коммутатор $a^{-1}b^{-1}ab$.

Для начала введем на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ естественную клеточную структуру, где точки это 0-клетки, ребра это 1-клетки и двумерные грани это 2-клетки. Далее напомним классический результат для клеточных пространств без доказательства из книги Хатчера А.[2], Proposition 1.26.

Предложение 2.1. *Пусть клеточное пространство Y получено из клеточного пространства X приклеиванием 2-клеток с помощью отображения $\phi_{\alpha} : S^1 \rightarrow X$, тогда вложение $X \hookrightarrow Y$ индуцирует сюръекцию $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(Y, x_0)$, ядром которого будет нормальная группа $N \subset \pi_1(X, x_0)$, порожденная всеми петлями вида $\gamma_{\alpha}\phi_{\alpha}\gamma_{\alpha}^{-1}$. Тогда $\pi_1(Y, x_0) \approx \pi_1(X, x_0)/N$.*

Используя это предложение докажем следующую теорему, полученную в статье Droms, C[3], Prop. 1.1.

Теорема 2.1. *Фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ изоморфна $RC'_{\mathcal{K}}$.*

Доказательство. Пусть ω слово состоящее из символов v_1, \dots, v_n , тогда будем сопоставлять этому слову путь P_{ω} на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, начинающийся в точке $p_0 = (-1, \dots, -1)$ следующим образом: если ω пустое слово, тогда P_{ω} тождественный путь в точке p_0 . Теперь пусть ω' получено из слова ω так, что $\omega' = \omega v_i$, тогда путь $P_{\omega'}$ определяется как композиция пути P_{ω} и пути, проходящего через отрезок, соединяющий концевую точку P_{ω} $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ и точку $x' = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$.

Заметим теперь, что путь P_{ω} является петлей тогда и только тогда, когда в ω все символы встречаются четное количество раз. Тогда, рассматривая только один-остов $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1$, ясно, что для любой петли γ на нем существует слово ω , такое, что $\gamma = P_{\omega}$ и если два пути P_{ω} и $P_{\omega'}$ гомотопны, то слово ω получается из ω' удалением пар вида $v_i v_i$ для любого $i \in \{1, \dots, m\}$. Теперь, если мы будем рассматривать наше множество слов, как свободную группу $S = F(g_1, \dots, g_m)/(g_i^2 = 1)$, то получим, что наше сопоставление слов, в котором все символы встречаются четное количество раз, с петлями, есть изоморфизм этих слов и фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1)$. Покажем, что слова ω этого вида принадлежат S' , коммутанту группы S

$$\omega = v_i x v_i y = v_i x v_i x^{-1} x y = (v_i, x^{-1}) x y$$

и повторяя этот процесс для слова $x y$, мы получим, что $\omega \in S'$. Значит мы доказали, что S' изоморфно $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1)$. Далее, используя Предложение 2.1, доклеивая по ребрам оставшиеся клетки размерности 2, мы получим, что $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1)/N$, но эта фактор-группа есть то же самое, что $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1)$ с соотношением таким, что пути P_{ω} и P_u гомотопны, если слово ω получается из u перестановками символов $v_i v_j$ на $v_j v_i$ при $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Вводя это же соотношение ($g_i g_j = 1$ при $\{i, j\} \in \mathcal{K}$) на S , мы получим группу

$RC_{\mathcal{K}}$ и соответственно предыдущий изоморфизм S' и $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^1)$ будет изоморфизмом групп $RC'_{\mathcal{K}}$ и $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$.

Важно отметить, что справедлив изоморфизм фундаментальной группы $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ и коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$ для произвольного симплициального комплекса \mathcal{K} , доказательство которого есть в статье Веревкин Я., Панова Т.[4.], Следствие 3.3. Отображение сопоставляющее элементу из $RC'_{\mathcal{K}}$ петлю на $RC_{\mathcal{K}}$ будем важно в следующем разделе, но до этого рассмотрим еще один результат для вещественного момент-угол комплекса, доказательство есть в книге [1], Prop.4.1.8.

Теорема 2.2. *Вещественный момент-угол комплекс $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен двумерной ориентированной поверхности S_g рода $g = 1 + (m - 4)2^{m-3}$.*

Тогда используя эту теорему и теорему 2.1 получим следующее следствие

Следствие 2.1. *Коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ изоморфен свободной группе с одним соотношением.*

3 Соотношение на $RC'_{\mathcal{K}}$

В этом разделе будет рассмотрен основной результат работы, а именно приведен алгоритм для подсчета одного соотношения на группе $RC'_{\mathcal{K}}$ и его явный вид, когда $m = 5$.

Для начала определим минимальный набор образующих $RC'_{\mathcal{K}}$ для того, чтобы найти соотношение. Приведем результат, полученный в статье Т.Е.Панова и Я.А.Веревкина, [4], Теорема 4.5.

Теорема 3.1. *Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ - прямоугольная группа Кокстера. Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J \subset [m]} \text{rank} H_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j, g_i), \quad (g_{k_1}, (g_j, g_i)), \quad \dots, \quad (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_{m-2}}, (g_j, g_i)) \dots)),$$

где $k_1 < k_2 < \dots < k_{l-2} < j > i$, $k_s \neq i$ для всех s и i - наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1, \dots, k_{l-2}, j, i\}}$, не содержащей j .

Мы будем дальше считать, что \mathcal{K} есть граница m -угольника. Рассмотрим примеры применения этой теоремы.

Пример 3.1. Пусть $m = 4$. Тогда минимальный набор образующих будет

$$a_1 = (g_3, g_1), \quad b_1 = (g_4, g_2)$$

Пример 3.2. Пусть $m = 5$. Тогда минимальным набор образующих будет

$$\begin{aligned} a_1 &= (g_3, g_1), & a_2 &= (g_4, g_1), & a_3 &= (g_4, g_2), & a_4 &= (g_5, g_2), & a_5 &= (g_5, g_3), \\ b_1 &= (g_4, (g_5, g_2)), & b_2 &= (g_3, (g_5, g_2)), & b_3 &= (g_1, (g_5, g_3)), & b_4 &= (g_3, (g_4, g_1)), & b_5 &= (g_2, (g_4, g_1)). \end{aligned}$$

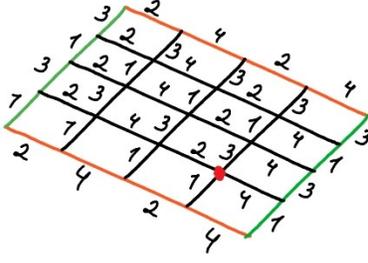


Рис. 1

Найдем соотношение на образующие для Примера 3.1. Построим геометрическое представление $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$. На Рис. 1 изображено объединение всех граней $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, где красным обозначена отмеченная точка $p_0 = (-1, -1, -1, -1)$ и числами $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ помечены ребра так, что i -ое ребро соединяет точки $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_4)$ и $x' = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_4)$. Тогда из этой фигуры мы можем получить вещественный момент-угол комплекс, отождествив крайнее оранжевые ребра 4242 друг с другом и зеленые ребра 1313 по соответственным словам. На этой интерпретации можно явно проследить за изоморфизмом $RC'_{\mathcal{K}}$ и $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$, приведенным в доказательстве Теоремы 2.1. Только теперь обозначения символов v_i в построении изоморфизма будем отмечать как i . Тогда фундаментальная группа будет иметь вид

$$\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \left\{ k, l \mid k l k^{-1} l^{-1} = 1 \right\}$$

где k путь 1(4, 2)1 и l путь 4(3, 1)4. Тогда соотношение на $RC'_{\mathcal{K}}$ благодаря отображению в Теореме 2.1 будет следующим

$$1(4, 2)14(3, 1)41(2, 4)14(1, 3)4 = (4, 2)(3, 1)(2, 4)(1, 3) = b_1 a_1 b_1^{-1} a_1^{-1}$$

Теперь перейдем к основному результату работы, то есть когда $m = 5$. Для начала сразу представим на Рис.2 геометрическую интерпретацию $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ в трехмерном пространстве.

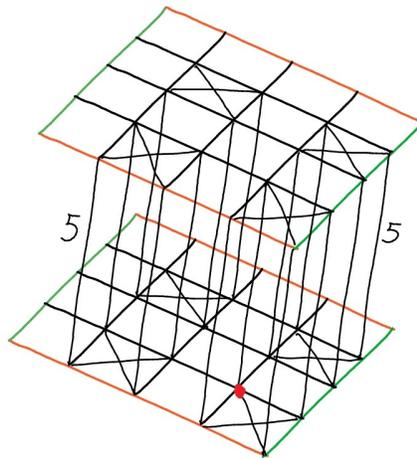


Рис. 2

Данная конструкция такая же, как на Рис. 1, только немного модифицирована. На Рис. 2 ребра и их обозначения для нижнего и верхнего объединения квадратов то же самое, что и для Рис. 1, а все вертикальные ребра обозначены 5 и их геометрический смысл этого обозначения такой же, как для предыдущего примера. Перечеркнутые квадраты, означают, что мы выкидываем из конструкции Рис. 1 их внутренность. Отождествление ребер для нижнего и верхнего объединений такое же, как для предыдущего примера. Введя обозначение \mathcal{K}_m - граница m -угольника и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_m}$ - вещественный момент-угол комплекс, соответствующий \mathcal{K}_m , покажем пошагово, что на самом деле интерпретация $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_5}$ на Рис. 2 есть связная сумма $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_m}$ и трех торов $T^1 = S^1 \times S^1$. В течение построения также найдем соотношения на образующие данные в примере 3.2. Для этого перед построением напомним еще одну классическую теорему, приведенную в [1], Theorem 1.20.

Теорема 3.2. Пусть X есть объединение линейно связных открытых множеств A_α , содержащих отмеченную точку $x_0 \in X$, и пусть каждое пересечение вида $A_\alpha \cap A_\beta$ линейно связно, тогда гомоморфизм $\Phi : *_\alpha \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, который есть продолжение гомоморфизмов, индуцированных включением $A_\alpha \hookrightarrow X$, сюръективен.

Если дополнительно каждое пересечение вида $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ линейно связно, тогда ядро Φ будет нормальной подгруппой N , порожденной всеми элементами вида $i_{\alpha\beta}(\omega)i_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ для $\omega \in \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta)$, где $i_{\alpha\beta} : \pi_1(A_\alpha \cap A_\beta) \rightarrow \pi_1(A_\alpha)$ это гомоморфизм, индуцированный вложением $A_\alpha \cap A_\beta \hookrightarrow A_\alpha$, и, следовательно, Φ индуцирует изоморфизм

$$\pi_1(X) \approx *_\alpha \pi_1(A_\alpha) / N.$$

Теперь начнем строить $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_5}$:

Шаг 1. $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$. Рассмотрим две копии $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$ и удалим отмеченные квадраты 1414 (Рис. 3(a)) на каждой копии и соединим их по цилиндру из вертикальных ребер 5. Данная процедура соответствует построению связной суммы. Теперь определим образующие и соотношение на них, применяя Теорему 3.2. В терминах теоремы ван Кампена $X = \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$ и в качестве A_α возьмем нижнюю копию $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$ без внутренности перечеркнутого квадрата, а A_β верхнюю копию $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$ и вертикальные ребра 5 исходящие из него. Тогда образующими фундаментальной группы $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4})$ возьмем

$$k_1 = (1, 3), \quad k_2 = 3(2, 4)3, \quad k_3 = 5(1, 3)5 \quad k_4 = 53(2, 4)35$$

Эти петли гомотопны петлям, которые мы взяли для Рис. 1, поэтому для удобных расчетов мы возьмем их. Так как $A_\alpha \cap A_\beta \approx S^1$ и ее образующей будет петля 1414, которая гомотопически продолжается до границы на обоих пространствах A_α и A_β , и соотношение будет иметь вид

$$(k_1, k_2)(k_3, k_4) = 1$$

Шаг 2. $(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1$. Теперь из поверхности $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}$, полученной по предыдущему шагу, удалим все перечеркнутые квадраты и его ребра, кроме тех, что помечены синим цветом, (будем обозначать эту поверхность как $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^0$) и приклеим к ней фигуру T_0^1

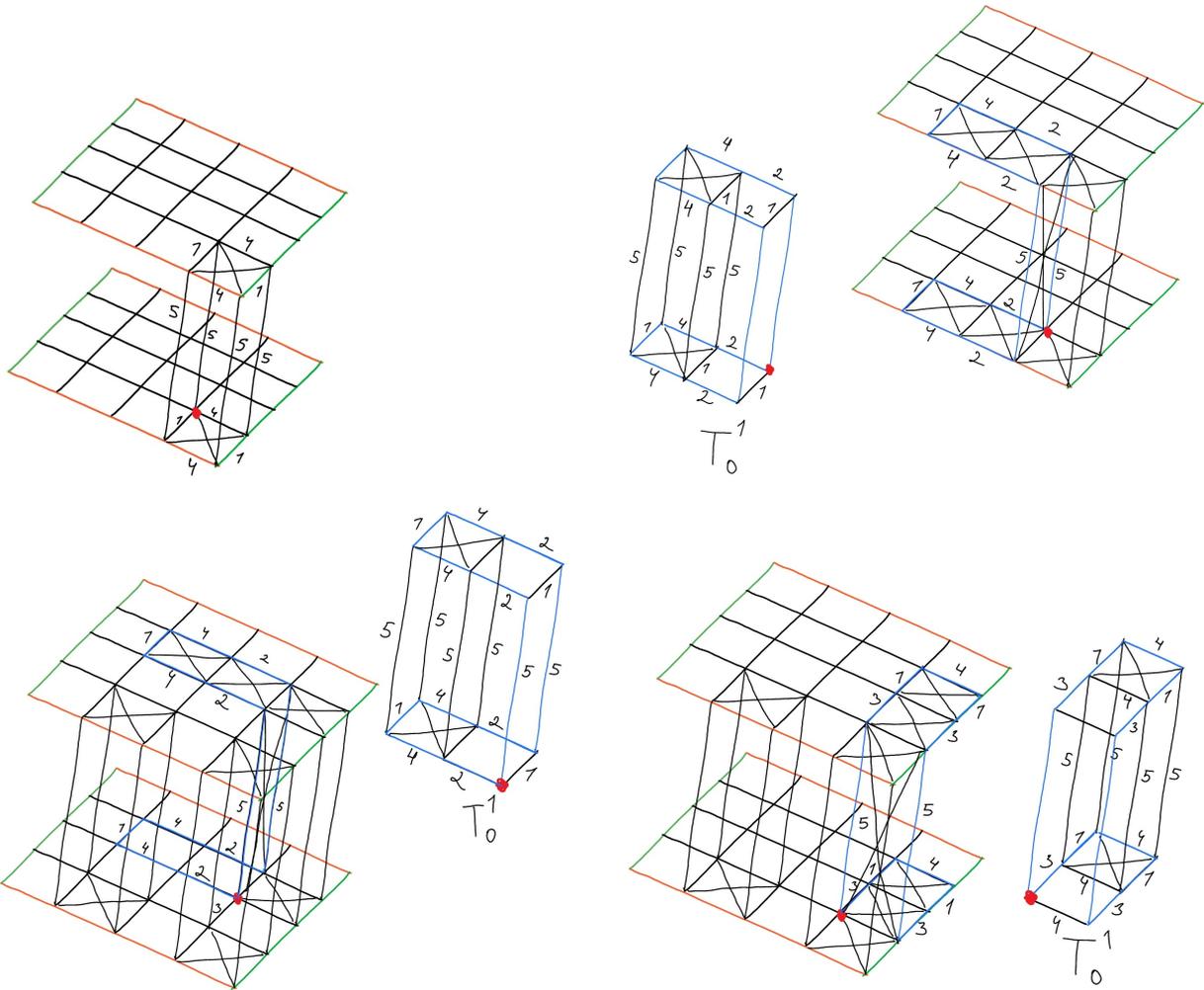


Рис. 1: Рис. 3(а), (б), (в), (г)

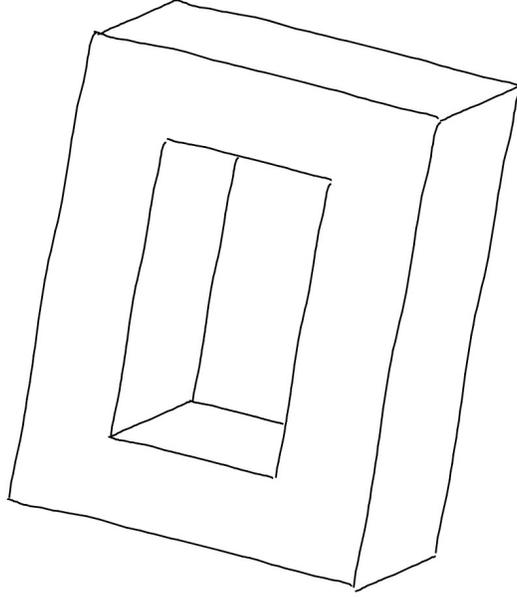


Рис. 2: Рис. 4

по синей границе, как показано на Рис. 3(б). Поверхность T_0^1 для дальнейших рассуждений будем представлять как часть квадратного тора на Рис. 4. Так как синяя граница и для $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^0$ и для T_0^1 представляет собой окружность и область ограниченная синей границей представляет внутренность диска, тогда каждое из пространств есть $(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4})/D^1$ и T^1/D^1 соответственно. То есть мы получили связную сумму $(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1$.

Теперь применим Теорему 3.2, чтобы найти образующие и соотношение полученной поверхности. Элементами, порождающими полученную поверхность, будет составлять k_1, k_2, k_3, k_4 из предыдущего шага и новые k_5, k_6 , которые можно явно выписать сохраняя на T_0^1 наше обозначение ребер. Тогда

$$k_5 = 2(4, 1)2 \quad k_6 = (5, 2)$$

Посчитаем соотношение на полученные 6 образующих. Так как по Следствию 2.1 $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}^0$ гомеоморфно $(T^1 \# T^1)/D^1$, то вложение образующей $\pi_1(S^1)$ аналогично тому, как считают фундаментальную группу двумерной ориентированной поверхности S_g . То есть образующая $\pi_1(S^1)$ отображается $(k_1, k_2)(k_4, k_3)$. Аналогично для вложения образующей $\pi_1(S^1)$ в T_0^1 , она отображается в (k_5, k_6) . Тогда по Теореме ван Кампена получим, что соотношение на $(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1$ будет

$$(k_1, k_2)(k_4, k_3)(k_6, k_5) = 1$$

Шаг 3. $(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1 \# T^1$. Для шага 3 рассуждения для подсчета аналогичны Шагу 2, поэтому сразу приведем, новые образующие k_7, k_8 и соотношение для получившейся поверхности по Рис. 3(в)

$$k_7 = 3(4, 1)3 \quad k_8 = (5, 3)$$

$$(k_1, k_2)(k_4, k_3)(k_6, k_5)(k_8, k_7) = 1$$

Шаг 4. $((\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1) \# T^1 \# T^1$. По Рис. 3(г) можно заметить, что этот случай отличается от предыдущих тем, что синяя граница не соединит отмеченной точки, поэтому для того, чтобы повторить подсчет соотношения и образующих аналогично предыдущим шагам, нам нужно переместить отмеченную точку p_0 по ребру 3, тогда расчеты на предыдущих шагах изменятся только сопряжением на элемент 3. Для удобства теперь выпишем новые полученные 10 образующих и соотношение на них

$$\begin{aligned} k_1 &= 3(1, 3)3, & k_2 &= 33(2, 4)33, & k_3 &= 35(1, 3)53, & k_4 &= 353(2, 4)353, & k_5 &= 32(4, 1)23 \\ k_6 &= 3(5, 2)3, & k_7 &= (4, 1), & k_8 &= 3(5, 3)3, & k_9 &= 2(4, 1)2, & k_{10} &= (5, 2) \end{aligned}$$

$$(k_1, k_2)(k_4, k_3)(k_6, k_5)(k_8, k_7)(k_{10}, k_9) = 1$$

Таким образом мы представили наше $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_5}$ в виде связной суммы $((\mathcal{R}_{\mathcal{K}_4} \# \mathcal{R}_{\mathcal{K}_4}) \# T^1) \# T^1 \# T^1$. Это построение можно обобщить для $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_m}$, где $m > 5$. Для окончательного результата нам осталось выразить образующие k_i через набор образующих a_i, b_i данных в Примере 3.2 и мы найдем соотношение для группы $RC'_{\mathcal{K}}$, где \mathcal{K} - пятиугольник.

Для этого нам понадобятся следующие групповые тождества

$$y^{-1}xy = x(x, y), \tag{1}$$

$$x(y, z)x^{-1} = (xyx^{-1}, xzx^{-1}), \tag{2}$$

$$(x, yz) = (x, z)(x, y)((x, y), z), \tag{3}$$

$$(xy, z) = (x, z)((x, z), y)(y, z), \tag{4}$$

$$((x, y), z) = (y, x)(z, (y, x))(x, y), \tag{5}$$

$$(x, (y, z)) = (x, z)(z, (x, y))(x, y)(z, y)(y, (x, z))(z, x)(y, x)(x, z) \tag{6}$$

(1), (2) и (5) проверяются непосредственно, (2) и (3) известны как тождества Витта-Холла, (6) можно доказать через (2) и (3). Применим эти тождества и заданные соотношения на $RC'_{\mathcal{K}}$, чтобы явно преобразовать k_1, k_2, k_3

$$\begin{aligned} k_1 &= (3, 1) = a_1 \\ k_2 &= (2, 4) = a_3^{-1} \\ k_3 &= 35(1, 3)53 = 3(1, 3)((1, 3), 5)3 = (3, 1)((3, 1), 353) = (3, 1)((3, 1), 5(5, 3)) = \\ &= (3, 1)\left((3, 1), (5, 3)\right)((3, 1), 5)\left((3, 1), 5, (5, 3)\right) = (3, 5)(3, 1)(5, 3)(3, 5)((3, 1), 5)(5, 3) = \\ &= (3, 5)(3, 1)\left((1, 3)(5, (1, 3))(3, 1)\right)(5, 3) = (3, 5)(3, 1)\left((1, 3)(5, 3)(3, 1)(1, (5, 3))(3, 1)\right)(5, 3) = \\ &= (3, 1)(1, (5, 3))(3, 1)(5, 3) = a_1 b_3 a_1 a_5 \end{aligned}$$

Остальные образующие уже приведем в окончательном виде

$$\begin{aligned}
k_4 &= (2, 4)(3, 5)(4, 2)(4, (5, 2))^{-1}(4, 2)(2, 5)(2, 4) = a_3^{-1}a_5^{-1}a_3b_1^{-1}a_3a_4^{-1}a_3^{-1} \\
k_5 &= (4, 1)(1, 3)(3, (4, 1))\left((4, 1)(1, 3)(3, (4, 1)), (4, 2)\right)\left((4, 2), (3, 1)\right)(4, 1)(4, 2) \\
&(1, 4)(4, 2)(4, 1)(4, 1)(2, (4, 1))(1, 4)\left((4, 1)(4, 2)(1, 4)(4, 2)(4, 1)(4, 1)(2, (4, 1))(1, 4), (3, 1)\right) \\
&= a_2a_1^{-1}b_4(a_2a_1^{-1}b_4, a_3)(a_3, a_1)a_2a_3a_2^{-1}a_3a_2^2b_5a_2(a_2a_3a_2^{-1}a_3a_2^2b_5a_2, a_1) \\
k_6 &= (5, 2)(3, (5, 2)) = a_4b_2 \quad k_7 = (4, 1) = a_2 \quad k_8 = (3, 5) = a_5^{-1} \\
k_9 &= (4, 1)(2, (4, 1)) = a_2b_5 \quad k_{10} = (5, 2) = a_4
\end{aligned}$$

Тогда, подставив в соотношение на k_i их вид через образующие a_i и b_i , получим соотношение на RC'_K при $m = 5$

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_3^{-1})(a_3^{-1}a_5^{-1}a_3b_1^{-1}a_3a_4^{-1}a_3^{-1}, a_1b_3a_1a_5) \cdot \\
\cdot (a_4b_2, a_2a_1^{-1}b_4(a_2a_1^{-1}b_4, a_3)(a_3, a_1)a_2a_3a_2^{-1}a_3a_2^2b_5a_2(a_2a_3a_2^{-1}a_3a_2^2b_5a_2, a_1))(a_5^{-1}, a_2)(a_4, a_2b_5) = \\
&= a_1^{-1}a_3a_1a_4a_3^{-1}b_1a_3^{-1}a_5a_3a_5^{-1}a_1^{-1}b_3^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}a_5^{-1}a_3b_1^{-1}a_3a_4^{-1}a_3^{-1}a_1b_3a_1a_5 \cdot \\
\cdot b_2^{-1}a_4^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_5^{-1}a_2^{-2}a_3^{-1}a_2a_3^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_1b_4^{-1}a_1a_2^{-1}a_3a_4b_2a_3^{-1}a_2a_1^{-1}b_4a_1^{-1}a_3a_2a_3a_2^{-1}a_3a_2^2b_5a_2a_1 \cdot \\
\cdot a_5a_2^{-1}a_5^{-1}a_2a_4^{-1}b_5^{-1}a_2^{-1}a_4a_2b_5 = 1
\end{aligned}$$

4 Литература.

- [1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. Toric Topology.
- [2] Hatcher, Alan. Algebraic Topology.
- [3] Droms, Carl. "A complex for right-angled Coxeter groups", Proc. Amer. Math. Soc., 131:8 (2003), 2305–2311.
- [4] Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин, Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера, Матем. сб., 2016, том 207, номер 11, 105–126