Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 3 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Алексеевс Русланс

Курсовая работа

Момент-угол-многообразия, произведения Уайтхеда и связные суммы произведений сфер

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2020 г.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию гомотопических типов момент-угол многообразий. А именно, используя представление момент-угол комплекса как гомотопического слоя вложения $(\mathbb{CP}^\infty, pt)^K \hookrightarrow (\mathbb{CP}^\infty)^m$, мы определим гомотопический тип $\mathcal{Z}_K$ в случае, когда симплициальный комплекс K представляет собой границу пятиугольника.

Все когомологии берутся с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Под σ^* подразумевается коцепь, принимающая значение 1 на симплексе $\sigma \in K$ и 0 на всех остальных симплексах K той же размерности.

2. Необходимые определения, конструкции и теоремы

Пусть K - симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. *Полным подкомплексом* K на множестве вершин $J \subset [m]$ называем комплекс

$$K_J = \{I \in K : \; I \subset J\}.$$

Кольцом Стенли-Райснера симплициального комплекса K на m вершинах будем называть факторкольцо

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]/I_K,$$

где $I_K = \{v_I : I \notin K\}$ - *идеал Стенли-Райснера.*

Конструкция 1 (Полиедральное произведение)**.** K - симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$.

$$(X, A) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

есть набор топологических пар. Для каждого $I \subset [m]$ определим

$$(X, A)^I = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i : \; x_i \in A_i \text{ для } j \notin I\}.$$

Тогда полиедральным произведением (X, A), соответствующим K назовем топологическое пространство

$$(X, A)^K = \bigcup_{I \in K} (X, A)^I = \bigcup_{I \in K} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right).$$

Далее, если (X, A) - топологические пара (а не набор пар), то через $(X, A)^K$ будем обозначать полиедральное произведение набора одинаковых пар $\{(X, A), \ldots, (X, A)\}$.

Тогда полиедральное произведение $(D^2, S^1)^K$ называется *момент-угол комплексом* $\mathcal{Z}_K$, соответствующим симплициальному комплексу K.

Конструкция 2 (CW-структура момент-угол комплексов)**.** Двумерный диск имеет стандартную клеточную структуру: к 0-клетке $1 \in D^2$ приклеивается 1-клетка S, и к образованной окружности приклеивается 2-клетка D. Тогда полидиск $(D^2)^m$ получает клеточную структуру, где клетки параметризованы парами подмножеств $J, I \in [m]$ с $J \cap I = \emptyset$: J параметризует S-клетки и I параметризует D-клетки. Клетку полидиска $(D^2)^m$, запараметризованную парой (J, I), обозначим $\kappa(J, I)$ - это произведение $|J|$ S-клеток и $|I|$ D-клеток (места с номерами $[m] \setminus (J \cup I)$ соответствуют 0-клеткам).

Таким образом $\mathcal{Z}_K$ вкладывается в $(D^2)^m$ как клеточный подкомплекс, при этом выполняется $\kappa(J,I) \subset \mathcal{Z} \Leftrightarrow I \in K$.

Далее напомним пару стандартных фактов из теории гомотопий и перечислим несколько теорем из [1], которые пригодятся нам в этой работе.

Теорема 3. *Имеют место изоморфизмы колец*

$$H^*(\mathcal{Z}_K) \cong Tor_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) \cong H(\Lambda[u_1,\dots,u_m] \otimes \mathbb{Z}[K], d),$$

где градуировка и дифференциал определяются так: $\deg u_i = 1, \quad \deg v_i = 2, \quad d(u_i) = v_i, \quad d(v_i) = 0$.

Замечание 4. *Вывод теоремы 3 содержит доказательство факта, что кольцо $H^*(\mathcal{Z}_K)$ в действительности изоморфно кольцу когомологий градуированной алгебры $R^*(K) \cong \Lambda[u_1,\dots,u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]/(v_i^2, u_i v_i,\ i = 1,\dots,m)$. Нам это пригодится.*

Теорема 5. *Имеют место изоморфизмы групп*

$$H^l(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{l-|J|-1}(K_J).$$

Замечание 6. *Теорема 5 следует из формулы Коксетера:*

$$Tor^{-i,2j}_{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z}) = \bigoplus_{J \subset [m]:\ |J| = j} \widetilde{H}^{j-i-1}(K_J).$$

Сама же теорема Коксетера использует в доказательстве следующий изоморфизм абелевых групп:

$$f : C^{p-1}(K_J) \to R^{p+|J|} \qquad L^* \mapsto \varepsilon(L,J) u_{J \setminus L} \otimes v_L,$$

в котором $L = \{l_1,\dots,l_p\} \in K_J \subset C^{p-1}(K_J)$, а $\varepsilon(L,J)$ это знак, вычисляемый по формуле

$$\varepsilon(L,J) = \prod_{j \in L} \varepsilon(j,J),$$

где $\varepsilon(j,J) = (-1)^{r-1}$, если j это r-ый элемент множества $J \subset [m]$, записанного по возрастанию.

Нам окажется полезным то, что отображение f, будучи цепным, позволяет переводить элементы когомологий полных подкомплексов в элементы когомологий алгебры $R^*(K)$.

Теорема 7. *$\mathcal{Z}_K$ есть гомотопический слой вложения*

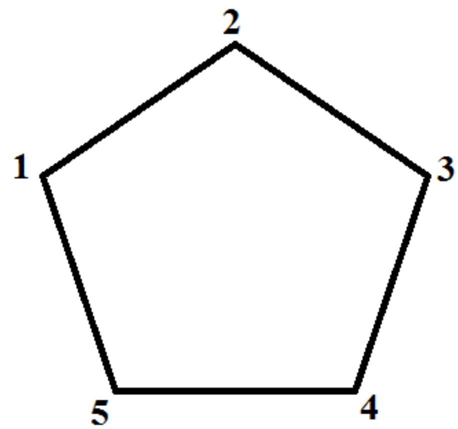
$$(\mathbb{CP}^\infty, pt)^K \hookrightarrow (\mathbb{CP}^\infty)^m.$$

Теорема 8. *Композиция $W \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ гомотопна нулю тогда и только тогда, когда g поднимается на гомотопический слой f, т.е.*

$$\begin{tikzcd} P_f \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & W \arrow[ul, dashed] \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

Теорема 9. *X - CW-комплекс. Отображение $f : sk_n X \to Y$ продолжается до отображения $\widetilde{f} : sk_n X \cup_\varphi e^{n+1} \to Y$ тогда и только тогда, когда композиция $f \circ \varphi$ гомотопна нулю.*

3. Кольцо когомологий $\mathcal{Z}_K$



Начиная с этого момента, рассматриваем симплициальный комплекс K, соответствующий границе пятиугольника.

Предложение 10. *Существует изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(\mathcal{Z}_K) \cong H^*((S^3 \times S^4)^{\#5}).$$

Доказательство. Теоремы 5 позволяет нам выяснить групповую структуру кольца $H^*(\mathcal{Z}_K)$. Аддитивно оно представляется прямой суммой следующих групп:

$$\begin{aligned}
&H^0(\mathcal{Z}_K) \cong \widetilde{H}^{-1}(\emptyset) \cong \mathbb{Z}\\
&H^1(\mathcal{Z}_K) \cong 0\\
&H^2(\mathcal{Z}_K) \cong 0\\
&H^3(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[5]:\ |J|=2} \widetilde{H}^0(K_J) \cong \mathbb{Z}^5\\
&H^4(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[5]:\ |J|=3} \widetilde{H}^0(K_J) \cong \mathbb{Z}^5\\
&H^5(\mathcal{Z}_K) \cong 0\\
&H^6(\mathcal{Z}_K) \cong 0\\
&H^7(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[5]:\ |J|=5} \widetilde{H}^1(K_J) \cong H^1(K) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

где полные подкомплексы K_J получаются гомотопически эквивалентными точки или паре точек, или окружности.

Чтобы выяснить произведения будем использовать теорему 3, а именно изоморфность кольца когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ с кольцом когомологий алгебры Кошуля $H(\Lambda[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] \otimes \mathbb{Z}[K], d)$. Очевидно, у границы пятиугольника $\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]/(v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4, v_2v_5, v_3v_5)$. При этом для изучениия когомологий $\mathcal{Z}_K$, как уже было сказано в замечании 4, вместо алгебры Кошуля достаточно рассматривать ее фактор-алгебру $R^*(K) =$

$\Lambda[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5] \otimes \mathbb{Z}[K]/(v_i^2, u_i v_i,\ i = 1, \dots, 5)$, что мы и будем делать далее.

Найдем соответствующие порождающие в группах когомологий алгебры Кошуля. Например, в $H^3(\mathcal{Z}_K) = \mathbb{Z}^5$ одна циклическая группа порождается элементом приведенных когомологий $\widetilde{H}^0(K_J)$ подкомплекса $K_J = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}\}$. В $\widetilde{H}^0(K_J)$ порождающий, например, $[-\{3\}^*]$, ведь он захватывает одну компоненту связности, формально же для любого элемента $[a\{1\} + b\{3\}] \in \widetilde{H}^0(K_J)$ выполняется $a\{1\}^* + b\{3\}^* = (a-b)(-\{3\}^*) + d(a)$, т.е. $[a\{1\}^* + b\{3\}^*] = [(a-b)(-\{3\}^*)]$. Посредством изоморфизма из замечания к теореме XXX это порождающий будет переходить в класс коцепи $\alpha_1 = u_1 \otimes v_3$ в $H(R^*(K), d)$. Проделав то же для остальных четырех подкомплексов получим:

$$
\begin{array}{lll}
K_J = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}\} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[-\{3\}^*]\rangle & \alpha_1 = u_1 \otimes v_3 \\
K_J = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}\} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[-\{4\}^*]\rangle & \alpha_2 = u_1 \otimes v_4 \\
K_J = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}\} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[-\{4\}^*]\rangle & \alpha_3 = u_2 \otimes v_4 \\
K_J = \{\emptyset, \{2\}, \{5\}\} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[-\{5\}^*]\rangle & \alpha_4 = u_2 \otimes v_5 \\
K_J = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}\} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[-\{5\}^*]\rangle & \alpha_5 = u_3 \otimes v_5
\end{array}
$$

Аналогично для $H^4(\mathcal{Z}_K)$:

$$
\begin{array}{lll}
K_J = K_{\{1,2,4\}} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[\{4\}^*]\rangle & \beta_1 = u_1 u_2 \otimes v_4 \\
K_J = K_{\{1,3,4\}} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[\{1\}^*]\rangle & \beta_2 = u_3 u_4 \otimes v_1 \\
K_J = K_{\{1,3,5\}} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[\{3\}^*]\rangle & \beta_3 = -u_1 u_5 \otimes v_3 \\
K_J = K_{\{2,3,5\}} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[\{5\}^*]\rangle & \beta_4 = u_2 u_3 \otimes v_5 \\
K_J = K_{\{2,4,5\}} & \widetilde{H}^0(K_J) \cong \langle[\{2\}^*]\rangle & \beta_5 = u_4 u_5 \otimes v_2
\end{array}
$$

В свою очередь $H^7(\mathcal{Z}_K) = H^1(K)$ порождается классом любой коцепи, двойственной какому-нибудь 1-симплексу. Мы для удобства коцепь $-\gamma$, двойственную $\{4, 5\}$, тогда $H^7(\mathcal{Z}_K) = \mathbb{Z}\langle[\gamma]\rangle$. В алгебре Кошуля γ превращается в $u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5$. Из-за соотношений в алгебре $R^*(K)$ для $i \neq 6 - j$ выполняется $\alpha_i \beta_j = 0$. Оставшиеся коцепи перемножаются так:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \beta_5 = u_1 u_4 u_5 \otimes v_2 v_3, \\
&\alpha_2 \beta_4 = u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5, \\
&\alpha_3 \beta_3 = -u_2 u_1 u_5 \otimes v_3 v_4 = u_1 u_2 u_5 \otimes v_3 v_4, \\
&\alpha_4 \beta_2 = u_2 u_3 u_4 \otimes v_1 v_5, \\
&\alpha_5 \beta_1 = u_3 u_1 u_2 \otimes v_4 v_5 = (-1)^2 u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5 = u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5
\end{aligned}
$$

Простое вычисление с помощью формулы Лейбница дает

$$d(u_i u_j u_k u_l \otimes v_m) = u_j u_k u_l \otimes v_i v_m - u_i u_k u_l \otimes v_j v_m + u_i u_j u_l \otimes v_k v_m - u_i u_j u_k \otimes v_l v_m,$$

откуда вкупе с соотношениями из идеала Стенли-Райснера следует, что

$$
\begin{aligned}
&u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5 = u_1 u_4 u_5 \otimes v_2 v_3 + d(u_1 u_2 u_4 u_5 \otimes v_2 - u_1 u_2 u_3 u_5 \otimes v_4), \\
&u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5 = u_1 u_2 u_5 \otimes v_3 v_4 + d(-u_1 u_2 u_3 u_5 \otimes v_4), \\
&u_1 u_2 u_3 \otimes v_4 v_5 = u_2 u_3 u_4 \otimes v_1 v_5 + d(-u_1 u_2 u_3 u_4 \otimes v_5),
\end{aligned}
$$

т.е. в $H^7(R^*(K), d)$:

$$[u_1u_2u_3 \otimes v_4v_5] = [u_1u_4u_5 \otimes v_2v_3] = [u_1u_2u_5 \otimes v_3v_4] = [u_2u_3u_4 \otimes v_1v_5].$$

Теперь видно что, что $\alpha_i\beta_{6-i} = \gamma$.

Перенумеруем образующие в $H^4(\mathcal{Z}_K)$: $\omega_i = \beta_{6-i}$. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
H^3(\mathcal{Z}_K) &= \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle \\
H^4(\mathcal{Z}_K) &= \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5 \rangle \\
H^7(\mathcal{Z}_K) &= \langle \gamma \rangle = \alpha_i\omega_i \text{ и } \alpha_i\omega_j = 0 \text{ для } i \neq j,
\end{aligned}$$

откуда видим изоморфность $H^*(\mathcal{Z}_K)$ и $H^*((S^3 \times S^4)^{\#5})$. □

4. Гомотопический тип $\mathcal{Z}_K$

Раз уж кольца когомологий $\mathcal{Z}_K$ и связной суммы произведений сфер совпали, есть хороший шанс, что данные многообразия гомотопически эквиваленты. Оказывается, это действительно так. Этот раздел посвящается доказательству этого факта.

Теорема 11. *Существует гомотопическая эквивалентность*

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^3 \times S^4)^{\#5}.$$

Доказательство теоремы 11 разумно разбить на несколько шагов:
1) Построим некоторое отображение $f : (S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \to \mathcal{Z}_K$.
2) Продолжим f до отображения F из $(S^3 \times S^4)^{\#5}$.
3) Докажем, что F осуществляет нужную нам гомотопическую эквивалентность.

Шаг I

С этого момента будем обозначать $(\mathbb{CP}^\infty, pt)^K$ просто через $(\mathbb{CP}^\infty)^K$. Если рассмотреть 0-мерный симплициальный комплекс $L = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{5\}\}$, то $(\mathbb{CP}^\infty)^L = (\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 5}$, так что есть включение $(\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 5} \hookrightarrow (\mathbb{CP}^\infty)^K$.
Пусть $\mu_i : S^2 \to (\mathbb{CP}^\infty)^K$ есть композиция $S^2 \to \mathbb{CP}^\infty \to (\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 5} \to (\mathbb{CP}^\infty)^K$, где первая стрелка это приклеивающее отображение 2-клетки, а вторая - вложение i-ого слагаемого в букет.

Из $(\mathbb{CP}^\infty)^m = K(\mathbb{Z}^m, 2)$ следует то, что композиция $S^3 \xrightarrow{[\mu_i,\mu_j]_w} (\mathbb{CP}^\infty)^K \to (\mathbb{CP}^\infty)^m$ гомотопна нулю, а значит, следуя теореме 8, каждое произведение Уайтеда поднимается в $\mathcal{Z}_K$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_K \arrow[r] & (\mathbb{CP}^\infty)^K \arrow[r] & (\mathbb{CP}^\infty)^m \\
& S^3 \arrow[u, "{[\mu_i,\mu_j]_w}"'] \arrow[ul, dashed, "\widetilde{[\mu_i,\mu_j]_w}"] &
\end{tikzcd}$$

Поднятие может быть выбрано канонически как включение подкомплекса

$$[\mu_i, \mu_j] \colon S^3 \cong (D^2 \times S^1) \cup (S^1 \times D^2) \hookrightarrow \mathcal{Z}_K$$

Лемма 12. *Произведение Уайтхеда $[\mu_i, \mu_j]_w : S^3 \to (\mathbb{CP}^\infty)^K$ тривиально тогда и только тогда, когда $\{\{i\}, \{j\}\} \in K$.*

Доказательство. Из коммутативной диаграммы видим, что $[\mu_i, \mu_j]_w$ тривиально тогда и только тогда, когда $\widetilde{[\mu_i, \mu_j]_w}$ тривиально.
Пусть $\{\{i\}, \{j\}\} \in K$. Тогда на соответствующих местах в $\mathcal{Z}_K$ стоит $D^2 \times D^2$, следовательно, $\widetilde{[\mu_i, \mu_j]_w}$ продолжается на D^4, поэтому оно тривиально.
Теперь пусть $\widetilde{[\mu_i, \mu_j]_w}$ тривиально. Предположим для противоречия, что $\{\{i\}, \{j\}\} \notin K$. Тогда $K_{\{i,j\}} = \{\emptyset, \{i\}, \{j\}\}$. Можно убедиться, что $\mathcal{Z}_{K_I} \cong S^3$ есть ректракт $\mathcal{Z}_K$. Тогда есть вложение $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_3(\mathcal{Z}_K)$, но это противоречит тривиальности $\widetilde{[\mu_i, \mu_j]_w}$. □

В нашем случае лемма 12 сообщает, что единственные нетривиальные произведения Уайтхеда это

$$[\mu_3, \mu_1]_w,\ [\mu_4, \mu_1]_w,\ [\mu_4, \mu_2]_w,\ [\mu_5, \mu_2]_w,\ [\mu_5, \mu_3]_w : S^3 \to (\mathbb{CP}^\infty)^K.$$

Чтобы отображать S^4, возьмем следующие произведения Уайтхеда полученных сфероидов со старыми:

$$[\mu_4, [\mu_5, \mu_2]_w]_w,\ [\mu_3, [\mu_5, \mu_2]_w]_w,\ [\mu_1, [\mu_5, \mu_3]_w]_w,\ [\mu_3, [\mu_4, \mu_1]_w]_w,\ [\mu_2, [\mu_4, \mu_1]_w]_w : S^4 \to (\mathbb{CP}^\infty)^K.$$

Как прежде, поднимем все наши сфероиды из $(\mathbb{CP}^\infty)^K$ в $\mathcal{Z}_K$ и введем обозначения:

$$a_1 = \widetilde{[\mu_3, \mu_1]_w},\quad a_2 = \widetilde{[\mu_4, \mu_1]_w},\quad a_3 = \widetilde{[\mu_4, \mu_2]_w},\quad a_4 = \widetilde{[\mu_5, \mu_2]_w},\quad a_5 = \widetilde{[\mu_5, \mu_3]_w},$$

$$b_1 = [\mu_4, \widetilde{[\mu_5, \mu_2]_w}]_w,\ b_2 = [\mu_3, \widetilde{[\mu_5, \mu_2]_w}]_w,\ b_3 = [\mu_1, \widetilde{[\mu_5, \mu_3]_w}]_w,\ b_4 = [\mu_3, \widetilde{[\mu_4, \mu_1]_w}]_w,\ b_5 = [\mu_2, \widetilde{[\mu_4, \mu_1]_w}]_w.$$

Теперь мы можем задать отображение

$$f = \bigvee_i^5 a_i \vee b_i : (S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \to \mathcal{Z}_K.$$

Шаг II

Предложение 13. *Построенное отображение $f : (S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \to \mathcal{Z}_K$ продолжается до отображения $F : (S^3 \times S^4)^{\# 5} \to \mathcal{Z}_K$.*

Доказательство. Т.к. комплекс $(S^3 \vee S^4)^{\vee 5}$ отличается от $(S^3 \times S^4)^{\# 5}$ одной 7-клеткой, приклеивающейся по отображению φ, достаточно доказать, что композиция $S^6 \xrightarrow{\varphi} (S^3 \vee S^4)^{\vee 5} \xrightarrow{f} \mathcal{Z}_K$ гомотопна нулю и использовать теорему 9.

Отображение φ есть сумма пяти произведений Уайтхеда. Проведя некоторое длинное вычисление, из тождества Якоби и леммы 12 можно вывести следующее соотношение в $\pi_6(\mathcal{Z}_K)$:

$$\sum_{i=1}^{5} \pm [a_i, b_i]_w = 0,$$

т.е. φ гомотопно нулю, следовательно $f \circ \varphi$ гомотопно нулю, и f действительно можно продолжить на связную сумму. □

Шаг III

Лемма 14. *Многообразия $\mathcal{Z}_K$ и $(S^3\times S^4)^{\#5}$ 2-связны.*

Доказательство. Из теоремы 7 знаем, что $\mathcal{Z}_K$ это гомотопический слой вложения $(\mathbb{CP}^\infty)^K \overset{in}{\hookrightarrow} (\mathbb{CP}^\infty)^5$. Рассмотрим точную последовательность соответствующего расслоения $p: E_{in}\to(\mathbb{CP}^\infty)^5$:

$$\cdots\to\pi_3((\mathbb{CP}^\infty)^5)\to\pi_2(\mathcal{Z}_K)\to\pi_2(E_{in})\xrightarrow{p_*}\pi_2((\mathbb{CP}^\infty)^5)\to\pi_1(\mathcal{Z}_K)\to\pi_1(E_{in}).$$

Мы знаем, что

1) Существует гомотопическая эквивалентность $j:(\mathbb{CP}^\infty)^K\to E_{in}$ с $in = p\circ j$.

2) $sk_3(\mathbb{CP}^\infty)^K = sk_3(\mathbb{CP}^\infty)^5$, поэтому их π_1 и π_2 изоморфны.

3) $(\mathbb{CP}^\infty)^5 = K(\mathbb{Z}^5,2)$.

Тогда этот кусок точной последовательности переписывается так:

$$0\xrightarrow{g_1}\pi_2(\mathcal{Z}_K)\to\mathbb{Z}^5\xrightarrow{p_*}\mathbb{Z}^5\to\pi_1(\mathcal{Z}_K)\xrightarrow{g_2}0.$$

Доказав, что p_* изоморфизм, мы сразу получим, что g_1 и g_2 изоморфизмы, т.е. $\mathcal{Z}_K$ 2-связно.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & \pi_2((\mathbb{CP}^\infty)^K) \arrow[dl, "in_*"'] \arrow[d, "j_*"] \\ \pi_2((\mathbb{CP}^\infty)^5) & \pi_2(E_{in}) \arrow[l, "p_*"] \end{tikzcd}$$

ведь $in_* = (p\circ j)_* = p_*\circ j_*$. Мы знаем, что in_* изоморфизм и что j_* изоморфизм, следовательно, p_* - изоморфизм.

Коротко про $(S^3\times S^4)^{\#5}$: для связной суммы односвязных 7-многообразий M и N можем рассмотреть подходящие покрытия и применить теорему ван Кампена, тем самым получив, что $\pi_1(M\#N)=\pi_1(M)*\pi_1(N)=0$. Тогда 2-связность следует из знания групп гомологий, односвязности и теоремы Гуревича. $\square$

Лемма 15. *Гомоморфизм Гуревича $h:\pi_{k+1}(\mathcal{Z}_K)\to H_{k+1}(\mathcal{Z}_K)$ переводит итерированное произведение Уайтхеда $[\mu_{i_1},[\mu_{i_2},\dots,[\mu_{i_{k-1}},\mu_{i_k}]\dots]]$ в класс клеточной цепи $S_{i_1}\dots D_{i_{k-1}}S_{i_k}+S_{i_1}\dots S_{i_{k-1}}D_{i_k}$*

Предложение 16. *Построенное отображение $F:(S^3\times S^4)^{\#5}\to\mathcal{Z}_K$ индуцирует изоморфизмы во всех группах гомологий.*

Доказательство. Из предыдущего раздела знаем, что нетривиальные гомологии есть только в размерностях 3, 4, 7.

Рассмотрим $F_*: H_3((S^3\times S^4)^{\#5})\to H_3(\mathcal{Z}_K)$. Лемма 14 и теорема Гуревича дают $\pi_3((S^3\times S^4)^{\#5})\cong H_3((S^3\times S^4)^{\#5})$ и $\pi_3(\mathcal{Z}_K)\cong H_3(\mathcal{Z}_K)$. Тогда F_* переводит порождающие в порождающие просто по построению отображения f (продолжением которого является F).

Рассмотрим $F_*: H_4((S^3\times S^4)^{\#5})\to H_4(\mathcal{Z}_K)$. Здесь нам уже потребуется использовать явный вид образа итерированного произведения Уайтхеда при отображении Гуревича. 4-сферы из связной суммы F отображает с помощью сфероидов вида $[\mu_i,[\mu_j,\mu_k]_w]_w$. По лемме 15

$$h([\mu_i,[\mu_j,\mu_k]_w]_w)=S_iD_jS_k+S_iS_jD_k.$$

Однако, сравнивая правую часть равенства с порождающими коциклами в $H^3(\mathcal{Z}_K)$, найденными в предыдущем разделе, получаем, что эта цепь представляет порождающий в гомологиях. Значит, и здесь изоморфизм.
Зная, что F индуцирует изоморфизмы в H_3 и H_4 автоматически получаем, что и в H_7, ведь H^7 порождается произведением соответствующих порождающих H^3 и H^4. $\square$

Нам остается применить гомологическую версию теоремы Уайтхеда к отображению F, и мы получаем $\mathcal{Z}_K \simeq (S^3 \times S^4)^{\#5}$.

Список литературы

[1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Веревкин Я.А. *Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов.* Дальневост. Матем. Ж. 2016, вып. 1, 9-23.

[3] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии.* Наука, 1989.

[4] Hatcher A. *Algebraic topology.* Cambridge Univ. Press, 2002.