Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 4 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Алексеевс Русланс
Курсовая работа

Об алгебре Понтрягина момент-угол многообразия, соответствующего кубу со срезанной вершиной

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2021 г.

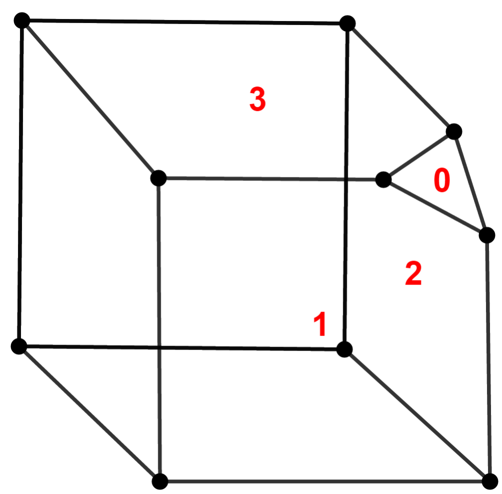
1. Введение

В случае, когда $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер, модель Адамса-Хилтона позволяет напрямую вычислить, как выглядит алгебра Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)$ ([1], Предложение 4.1). Первый (в смысле самый простой) случай, когда это не так, появляется при рассмотрении Z_P для P - куба со срезанной вершиной. В данной работе мы попробуем исследовать алгебру Понтрягина именно в этом случае.

Все когомологии берутся с коэффициентами в $\mathbb{Z}$. Тензорные произведения берутся тоже над $\mathbb{Z}$. Под σ^* подразумевается симплициальная коцепь, принимающая значение 1 на симплексе $\sigma \in K$ и 0 на всех остальных симплексах K той же размерности. Геометрическую реализацию симплициального комплекса будем обозначать так же, как его самого.

2. Некоторые свойства Z_P

Заметим, что P - выпуклый 3-мерный многогранник с 7 гранями, и из каждой вершины выходят ровно 3 ребра. Через K обозначим нерв покрытия границы P его гипергранями. Будем рассматривать момент-угол многообразие Z_P, другими словами, момент-угол комплекс Z_K, построенный симплициальному комплексу K.



Куб со срезанной вершиной. В центре каждой гиперграни ее номер. Противоположные грани имеют номера n и n', т.е. 1 - передняя, 1' - задняя, 2 - правая, 2' - левая, 3 - верхняя, 3' - нижняя, 0 - на месте среза вершины, треугольная.

P имеет 7 граней, поэтому следствие 6.2.5 и предложение 6.1.4 из [2] гарантируют, что Z_P является гладким многообразием размерности $7 + 3 = 10$.

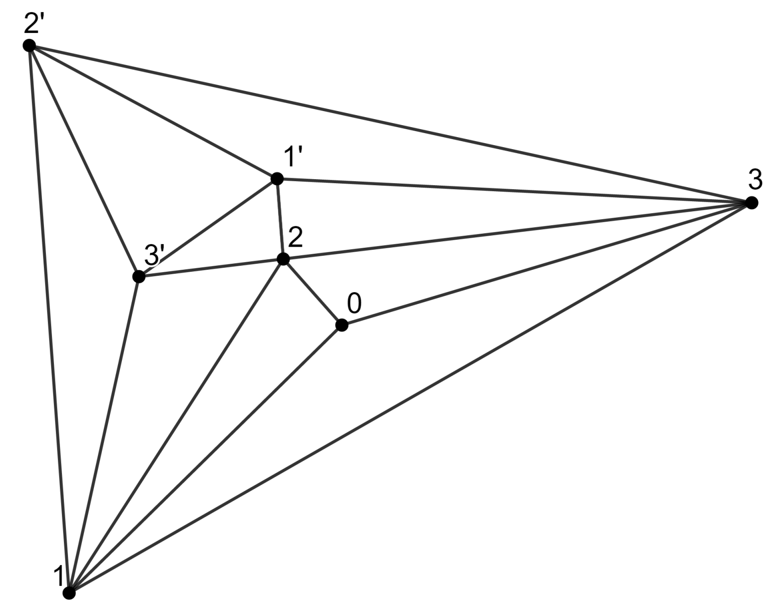
Для K кольцо Стенли-Райснера выглядит следующим образом:

$$\mathbb{Z}[K] = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2, v_3, v_{1'}, v_{2'}, v_{3'}]/(v_{1'}v_1, v_{1'}v_0, v_{2'}v_2, v_{2'}v_0, v_{3'}v_3, v_{3'}v_0, v_1v_2v_3)$$

3. Кольцо когомологий Z_P

Посчитаем кольцо когомологий Z_P.

Мы начнем с того, что посчитает группы когомологий $\mathcal{Z}_K$ по теореме 4.5.8 из [2]. Для этого будет очень удобно следующее изображение 1-остова комплекса K в виде плоского графа:



1-остов K

Отсюда легко увидеть все 2-симплексы K: симлексом является "основание"$\{2', 1, 3\}$, а также любая из ограниченных областей, на которые граф разбивает плоскость.

С первыми группами все просто, стоит лишь глянуть на аугментированный коцепной комплекс для $\emptyset$, чтобы не ошибиться в ответе:

$$H^0(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{-|J|-1}(K_J) \cong \widetilde{H}^{-1}(\emptyset) \cong \mathbb{Z}$$

$$H^1(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{-|J|}(K_J) \cong \widetilde{H}^{0}(\emptyset) \cong 0$$

$$H^2(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{1-|J|}(K_J) \cong \bigoplus_{i=1}^{7} \widetilde{H}^{0}(pt) \cong 0$$

Далее нам пригодится следующая гомотопическая классификация подкомплексов K_P:

- Подкомплексы на 2 вершинах гомотопически эквивалентны точке или паре точек (6 штук).
- Подкомплексы на 3 вершинах гомотопически эквиваленты точке, или паре точек (6 штук), или окружности (1 штука).

- Подкомплексы на 4 вершинах гомотопически эквиваленты точке, или паре точек (1 штука), или окружности (6 штук).
- Все подкомплексы на 5 вершинах стягиваемы, за исключением 6 подкомплексов, имеющих гомотопический тип окружности.
- Все подкомплексы на 6 вершинах стягиваемы.
- $K_P \simeq S^2$.

Имея эту информацию, досчитать группы когомологий совсем просто. Дополнительно в дальнейших выкладках для каждой группы когомологий $\mathcal{Z}_K$ мы явно укажем, какие именно подкомплексы вносят в нее нетривиальный вклад.

$$H^3(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{2-|J|}(K_J) \cong \bigoplus_{J\subset[m]:|J|=2} \widetilde{H}^0(K_J) \cong \widetilde{H}^0(K_{1',1}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{1',0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{2',2}) \oplus$$

$$\oplus \widetilde{H}^0(K_{2',0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{3',3}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{3',0}) \cong \bigoplus_{i=1}^{6} \widetilde{H}^0(pt_1 \sqcup pt_2) \cong \mathbb{Z}^6$$

$$H^4(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{3-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=2} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=3} \widetilde{H}^0(K_J)\right) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{J\subset[m]:|J|=3} \widetilde{H}^0(K_J) \cong \widetilde{H}^0(K_{1',2',0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{1',1,0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{1',3',0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{2',2,0}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{2',3',0}) \oplus$$

$$\oplus \widetilde{H}^0(K_{3',3,0}) \cong \bigoplus_{i=1}^{6} \widetilde{H}^0(pt_1 \sqcup pt_2) \cong \mathbb{Z}^6$$

$$H^5(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{4-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=3} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=4} \widetilde{H}^0(K_J)\right) \cong$$

$$\cong \widetilde{H}^1(K_{\{1,2,3\}}) \oplus \widetilde{H}^0(K_{\{1',2',3',0\}}) \cong \widetilde{H}^1(S^1) \oplus \widetilde{H}^0(pt_1 \sqcup pt_2) \cong \mathbb{Z}^2$$

$$H^6(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{5-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=3} \widetilde{H}^2(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=4} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^0(K_J)\right) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{J\subset[m]:|J|=4} \widetilde{H}^1(K_J) \cong \widetilde{H}^1(K_{\{1',2',1,2\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1',1,2,3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1',1,3',3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{2',1,2,3\}}) \oplus$$

$$\oplus \widetilde{H}^1(K_{\{2',2,3',3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1,2,3',3\}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{6} \widetilde{H}^1(S^1) \cong \mathbb{Z}^6$$

$$H^7(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{6-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=4} \widetilde{H}^2(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=6} \widetilde{H}^0(K_J)\right) \cong$$

$$\cong \bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^1(K_J) \cong \widetilde{H}^1(K_{\{1',2',1,2,3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1',2',1,2,0\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1',1,2,3',3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{1',1,3',3,0\}}) \oplus$$

$$\oplus \widetilde{H}^1(K_{\{2',1,2,3',3\}}) \oplus \widetilde{H}^1(K_{\{2',2,3',3,0\}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{6} \widetilde{H}^1(S^1) \cong \mathbb{Z}^6$$

$$H^8(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{7-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=4} \widetilde{H}^3(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^2(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=6} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=7} \widetilde{H}^0(K_J)\right) \cong 0$$

$$H^9(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{8-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^3(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=6} \widetilde{H}^2(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=7} \widetilde{H}^1(K_J)\right) \cong$$
$$\cong \widetilde{H}^1(K_P) \cong \widetilde{H}^1(S^2) \cong 0$$

$$H^{10}(\mathcal{Z}_K) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{9-|J|}(K_J) \cong \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=5} \widetilde{H}^4(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=6} \widetilde{H}^3(K_J)\right) \oplus \left(\bigoplus_{J\subset[m]:|J|=7} \widetilde{H}^2(K_J)\right) \cong$$
$$\cong \widetilde{H}^2(K_P) \cong \widetilde{H}^2(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

Мы получили, что вектор чисел Бетти $\mathcal{Z}_K$ выглядит следующим образом:

$$b(\mathcal{Z}_K) = (1,0,0,6,6,2,6,6,0,0,1)$$

Чтобы выяснить мультипликативную структуру $H^*(\mathcal{Z}_K)$ будем использовать изоморфизм $H*(\mathcal{Z}_K)$ и фактор-алгеброй алгебры Кошуля $R^*(K) = \Lambda[u_0,u_1,u_2,u_3,u_{1'},u_{2'},u_{3'}]\otimes \mathbb{Z}[K]/(v_i^2, u_iv_i\ \forall i)$. ([2], Лемма 4.5.3).

Порождающие $H^3(\mathcal{Z}_K)$

J	$x \in C^0(K_J):\quad \widetilde{H}^0(K_J) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
$\{1',1\}$	$-\{1\}^*$	$a_1 = u_{1'} \otimes v_1$
$\{1',0\}$	$-\{0\}^*$	$a_2 = u_{1'} \otimes v_0$
$\{2',2\}$	$-\{2\}^*$	$a_3 = u_{2'} \otimes v_2$
$\{2',0\}$	$-\{0\}^*$	$a_4 = u_{2'} \otimes v_0$
$\{3',3\}$	$-\{3\}^*$	$a_5 = u_{3'} \otimes v_3$
$\{3',0\}$	$-\{0\}^*$	$a_6 = u_{3'} \otimes v_0$

Порождающие $H^4(\mathcal{Z}_K)$

J	$x \in C^0(K_J):\ \widetilde{H}^0(K_J) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
$\{1', 2', 0\}$	$\{0\}^*$	$b_1 = u_{1'}u_{2'} \otimes v_0$
$\{1', 1, 0\}$	$\{1'\}^*$	$b_2 = u_1 u_0 \otimes v_{1'}$
$\{1', 3', 0\}$	$\{0\}^*$	$b_3 = u_{1'}u_{3'} \otimes v_0$
$\{2', 2, 0\}$	$\{2'\}^*$	$b_4 = u_2 u_0 \otimes v_{2'}$
$\{2', 3', 0\}$	$\{0\}^*$	$b_5 = u_{2'}u_{3'} \otimes v_0$
$\{3', 3, 0\}$	$\{3'\}^*$	$b_6 = u_3 u_0 \otimes v_{3'}$

Порождающие $H^5(\mathcal{Z}_K)$

i	J	$x \in C^i(K_J):\ \widetilde{H}^i(K_J) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
1	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 3\}^*$	$c_1 = u_2 \otimes v_1 v_3$
0	$\{1', 2', 3', 0\}$	$-\{0\}^*$	$c_2 = u_{1'}u_{2'}u_{3'} \otimes v_0$

Порождающие $H^6(\mathcal{Z}_K)$

J	$x \in C^1(K_J):\ \widetilde{H}^1(K_J) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
$\{1', 2', 1, 2\}$	$-\{1, 2\}^*$	$d_1 = u_{1'}u_{2'} \otimes v_1 v_2$
$\{1', 1, 2, 3\}$	$\{1, 3\}^*$	$d_2 = u_{1'}u_2 \otimes v_1 v_3$
$\{1', 1, 3', 3\}$	$\{1, 3\}^*$	$d_3 = u_{1'}u_{3'} \otimes v_1 v_3$
$\{2', 1, 2, 3\}$	$-\{2, 3\}^*$	$d_4 = u_{2'}u_1 \otimes v_2 v_3$
$\{2', 2, 3', 3\}$	$\{2, 3\}^*$	$d_5 = u_{2'}u_{3'} \otimes v_2 v_3$
$\{1, 2, 3', 3\}$	$\{2, 3\}^*$	$d_6 = u_1 u_{3'} \otimes v_2 v_3$

Порождающие $H^7(\mathcal{Z}_K)$

J	$x \in C^1(K_J):\ \widetilde{H}^1(K_J) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
$\{1', 2', 1, 2, 3\}$	$-\{1, 2\}^*$	$e_1 = u_{1'}u_{2'}u_3 \otimes v_1 v_2$
$\{1', 2', 1, 2, 0\}$	$-\{2', 1\}^*$	$e_2 = u_{1'}u_2 u_0 \otimes v_{2'}v_1$
$\{1', 1, 2, 3', 3\}$	$-\{1, 3\}^*$	$e_3 = u_{1'}u_2 u_{3'} \otimes v_1 v_3$
$\{1', 1, 3', 3, 0\}$	$-\{1, 3'\}^*$	$e_4 = u_{1'}u_3 u_0 \otimes v_1 v_{3'}$
$\{2', 1, 2, 3', 3\}$	$\{2, 3\}^*$	$e_5 = u_{2'}u_1 u_{3'} \otimes v_2 v_3$
$\{2', 2, 3', 3, 0\}$	$-\{2', 3\}^*$	$e_6 = u_2 u_{3'}u_0 \otimes v_{2'}v_3$

Порождающий $H^{10}(\mathcal{Z}_K)$

$x \in C^2(K):\ \widetilde{H}^2(K) = \langle [x] \rangle$	$f(x) \in R^*(K)$
$-\{2, 3, 0\}^*$	$\gamma = u_{1'}u_{2'}u_1 u_{3'} \otimes v_2 v_3 v_0$

Будем считать произведения порождающих в $R^*(K)$.

Чтобы полностью описать мультипликативную структуру достаточно явно указать все ненулевые произведения порождающих. Их не так много из-за соотношений в урезанной алгебре и из-за структуры умножения в терминах подкомлексов ([2], Теорема 4.5.8).

1) Рассмотрим ненулевые произведения

$$H^3(R(K)) \times H^3(R(K)) \to H^6(R(K)).$$

Просто перемножив, сразу имеем равенства

$$[a_1][a_3] = [u_{1'} \otimes v_1][u_{2'} \otimes v_2] = [u_{1'}u_{2'} \otimes v_1v_2] = [d_1]$$
$$[a_1][a_5] = [u_{1'} \otimes v_1][u_{3'} \otimes v_3] = [u_{1'}u_{3'} \otimes v_1v_3] = [d_3]$$
$$[a_3][a_5] = [u_{2'} \otimes v_2][u_{3'} \otimes v_3] = [u_2u_5 \otimes v_2v_3] = [d_5].$$

2) Рассмотрим ненулевые произведения

$$H^3(R(K)) \times H^4(R(K)) \to H^7(R(K)).$$

Просто перемножив, сразу имеем равенства

$$[a_1][b_4] = [u_{1'} \otimes v_1][u_2u_0 \otimes v_{2'}] = [u_{1'}u_2u_0 \otimes v_1v_{2'}] = [e_2]$$
$$[a_1][b_6] = [u_{1'} \otimes v_1][u_3u_0 \otimes v_{3'}] = [u_{1'}u_3u_0 \otimes v_1v_{3'}] = [e_4]$$
$$[a_5][b_4] = [u_{3'} \otimes v_3][u_2u_0 \otimes v_{2'}] = [u_{3'}u_2u_0 \otimes v_3v_{2'}] = -[e_6].$$

Далее используем формулы $d(u_iu_ju_k) = u_ju_k \otimes v_i - u_iu_k \otimes v_j + u_iu_j \otimes v_k$ и $d(u_iu_j) = u_j \otimes v_i - u_i \otimes v_j$ вкупе с соотношениями из идеала Стенли–Райснера, чтобы получить равенства

$$[a_3][b_2] = [u_{2'} \otimes v_2][u_1u_0 \otimes v_{1'}] = [u_2 \otimes v_{2'}][u_1u_{1'} \otimes v_0 - u_0u_{1'} \otimes v_1] = -[u_2u_0u_{1'} \otimes v_1v_{2'}] = -[e_2]$$
$$[a_3][b_6] = [u_{2'} \otimes v_2][u_3u_0 \otimes v_{3'}] = [u_2 \otimes v_{2'}][u_3u_{3'} \otimes v_0 - u_0u_{3'}v_3] = -[u_2u_0u_{3'} \otimes v_{2'}v_3] = [e_6]$$
$$[a_5][b_2] = [u_{3'} \otimes v_3][u_1u_0 \otimes v_{1'}] = [u_3v_{3'}][u_1u_{1'} \otimes v_0 - u_0u_{1'} \otimes v_1] = -[u_3u_0u_{1'} \otimes v_{3'}v_1] = -[e_4].$$

3) Рассмотрим ненулевые произведения

$$H^3(R(K)) \times H^7(R(K)) \to H^{10}(R(K)).$$

Просто перемножив, сразу имеем равенство

$$[a_2][e_5] = [u_{1'} \otimes v_0][u_{2'}u_1u_{3'} \otimes v_2v_3] = [u_{1'}u_{2'}u_1u_{3'} \otimes v_0v_2v_3] = [\gamma].$$

Остальные ненулевые произведение вычисляются с помощью формулы $d(u_iu_ju_ku_l \otimes v_m) = u_ju_ku_l \otimes v_iv_m - u_iu_ku_l \otimes v_jv_m + u_iu_ju_l \otimes v_kv_m - u_iu_ju_k \otimes v_lv_m$, формулы $d(u_iu_ju_ku_lu_m \otimes v_nv_p) = u_ju_ku_lu_m \otimes v_iv_nv_p - u_iu_ku_lu_m \otimes v_jv_nv_p + u_iu_ju_lu_m \otimes v_kv_nv_p - u_iu_ju_ku_m \otimes v_lv_nv_p + u_iu_ju_ku_l \otimes v_mv_nv_p$ и соотношений из идеала Стенли–Райснера. Получаем равенства

$$[a_1][e_6] = [u_{1'} \otimes v_1][u_2u_{3'}u_0 \otimes v_{2'}v_3] = [u_1 \otimes v_{1'}][u_{3'}u_0u_{2'} \otimes v_2v_3 + u_2u_{3'}u_{2'} \otimes v_0v_3] =$$
$$= [u_1u_{3'}u_0u_{2'} \otimes v_{1'}v_2v_3] = -[u_1u_{3'}u_{2'}u_{1'} \otimes v_0v_2v_3] = [\gamma]$$

$$[a_3][e_4] = [u_{2'} \otimes v_2][u_{1'}u_3u_0 \otimes v_1v_{3'}] = [u_{2'} \otimes v_2][u_{1'}u_3u_{3'} \otimes v_0v_1 - u_{1'}v_0v_{3'} \otimes v_3v_1] = [u_{2'}u_{1'}u_3u_{3'} \otimes v_2v_0v_1] =$$
$$= [u_{2'}u_{1'}u_{3'}u_1 \otimes v_3v_2v_0] = [\gamma]$$

$$[a_4][e_3] = [u_{2'} \otimes v_0][u_{1'}u_2u_{3'} \otimes v_1v_3] = [u_{2'} \otimes v_0][u_2u_{3'}u_1 \otimes v_{1'}v_3 - u_{1'}u_{3'}u_1 \otimes v_2v_3] = -[u_{2'}u_{1'}u_{3'}u_1 \otimes v_0v_2v_3] =$$
$$= -[\gamma]$$

$$[a_5][e_2] = [u_{3'} \otimes v_3][u_{1'}u_2u_0 \otimes v_{2'}v_1] = [u_{3'} \otimes v_3][u_{1'}u_2u_{2'} \otimes v_0v_1 - u_{1'}u_0u_{2'} \otimes v_2v_1] = [u_{3'}u_{1'}u_2u_{2'} \otimes v_3v_0v_1] =$$
$$= -[u_{3'}u_{1'}u_{2'}u_1 \otimes v_2v_3v_0] = [\gamma]$$

$$[a_6][e_1] = [u_3' \otimes v_0][u_{1'}u_{2'}u_3 \otimes v_1v_2] = [u_3' \otimes v_0][u_{2'}u_3u_1 \otimes v_{1'}v_2 - u_{1'}u_{2'}u_1 \otimes v_3v_2] = -[u_{3'}u_{1'}u_{2'}u_1 \otimes v_0v_3v_2] =$$
$$= [\gamma]$$

4) Рассмотрим ненулевые произведения
$$H^4(R(K))\times H^6(R(K))\to H^{10}(R(K)).$$
Просто перемножив, сразу имеем равенства
$$[b_1][d_6]=[u_{1'}u_{2'}u_1u_{3'}\otimes v_0v_2v_3]=[\gamma]$$
$$[b_3][d_4]=[u_{1'}u_{3'}u_{2'}u_1\otimes v_0v_2v_3]=[\gamma]$$
$$[b_5][d_2]=[u_{2'}u_{3'}u_{1'}u_2\otimes v_0v_1v_3]=[a_4e_3]=-[\gamma].$$

Немного преобразований с использованием уже выписанных ранее формул и соотношений из идеала Стенли–Райснера и получаем еще и равенства

$$[b_2][d_5]=[u_1u_0\otimes v_{1'}][u_{2'}u_{3'}\otimes v_2v_3]=[u_1u_{1'}\otimes v_0-u_0u_{1'}\otimes v_1]=[u_1u_{1'}u_{2'}u_{3'}\otimes v_0v_2v_3]=[\gamma]$$
$$[b_4][d_3]=[u_2u_0\otimes v_{2'}][u_{1'}u_{3'}\otimes v_1v_3]=[u_2u_{2'}\otimes v_0-u_0u_{2'}\otimes v_2][u_{1'}u_{3'}\otimes v_1v_3]=[u_2u_{2'}u_{1'}u_{3'}\otimes v_0v_1v_3]=$$
$$=[u_{2'}u_{1'}u_{3'}u_1\otimes v_2v_0v_3]=[\gamma]$$
$$[b_6][d_1]=[u_3u_0\otimes v_{3'}][u_{1'}u_{2'}\otimes v_1v_2]=[u_3u_{3'}\otimes v_0-u_0u_{3'}\otimes v_3][u_{1'}u_{2'}\otimes v_1v_2]=[u_3u_{3'}u_{1'}u_{2'}\otimes v_0v_1v_2]=$$
$$=-[u_{3'}u_{1'}u_{2'}u_1\otimes v_3v_0v_2]=[\gamma].$$

5) Очевидно, есть единственное ненулевое произведение
$$H^5(R(K))\times H^5(R(K))\to H^{10}(R(K)),$$
а именно
$$[c_1][c_2]=[u_2u_{1'}u_{2'}u_{3'}\otimes v_1v_3v_0]=[a_4e_3]=-[\gamma].$$

Уже из начала списка можно понять, что $\mathcal{Z}_K$ гомотопически не эквивалентно связной сумме произведений сфер: с одной стороны имеем $a_1a_3\neq 0,\ a_1b_4\neq 0$, а с другой $a_3b_4=u_{2'}u_2u_0\otimes v_2v_{2'}=0$.

Следствие 1. *$\mathcal{Z}_K$ не гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер.*

Доказательство. Вспомним, что для связной суммы $H^i(M^n\#N^n)=H^i(M^n)\bigoplus H^i(N^n)$ для $0<i<n$. В то же время $H^i(S^{n_1}\times S^{n_2}\times\cdots\times S^{n_k})\cong\mathbb{Z}^{|\{n_{i_1}\leq\cdots\leq n_{i_p}:\ n_{i_1}+\cdots+n_{i_p}=i\}|}$ ([3], Теорема 6.9). При этом ненулевым будет произведение только тех порождающих, чьи сферы лежат в одном связном слагаемом.

В нашем случае, будь $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер, из $[a_1][a_3]\neq 0$ следовало бы, что сферы, соответствующие порождающим $[a_1]$ и $[a_3]$ лежит в $n-$ом связном слагаемом. Из $[a_1][b_4]\neq 0$ следовало бы, что сфера, соответствующая $[b_4]$, тоже лежит в $n-$ом связном слагаемом. Однако $[a_3][b_4]=0$, т.е. сферы, соответствующие $[a_3]$ и $[b_4]$ не могут обе лежать в $n-$ом связном слагаемом. Противоречие. □

4. Алгебра Понтрягина для $\mathcal{Z}_K$

Раз $\mathcal{Z}_K$ не имеет гомотопического типа связной суммы произведений сфер, мы задаемся вопросом об устройстве алгебры Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)$.

Для простого многогранника P симплициальный комплекс K (т.е. нерв покрытия границы P его гипергранями) флаговый тогда и только тогда, когда для любого семейства гиперграней, такого, что любые два элемента семейства имеют непустое пересечение, пересечение всех элементов семейства опять непусто. Несложно увидеть, что для куба это св-во выполняется: для любых двух смежных гиперграней F_1 и F_2 куба существует две гиперграни F, G, смежные для обеих, а все три гиперграни (F_1, F_2 и одна из F,G) пересекаются по вершине. Если же мы срежем вершину куба, то грани 1, 2, 3, 0 пересекаются попарно, но их пересечение пусто, т.к. пусто даже пересечение граней 1,2,3. Выходит, в нашем конкретном примере, K не флаговый, в частности, теорема 8.5.7 из [2] не дает нам описание порождающих алгебры $H_*(Z_P)$.

Если рассмотреть 0-мерный симплициальный комплекс $L = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1'\}, \{2\}, \{2'\}, \{3\}, \{3'\}\Big\}$, то $(\mathbb{CP}^\infty)^L = (\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 7}$, так что есть включение $(\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 7} \hookrightarrow (\mathbb{CP}^\infty)^K$.

Пусть $\widehat{\mu_i} : S^2 \to (\mathbb{CP}^\infty)^K$ есть композиция $S^2 \to \mathbb{CP}^\infty \to (\mathbb{CP}^\infty)^{\vee 5} \to (\mathbb{CP}^\infty)^K$, где первая стрелка это приклеивающее отображение 2-клетки, а вторая - вложение i-ого слагаемого в букет.

Переходя к сопраженному отображению получаем 7 отображений

$$\mu_i : S^1 \to \Omega(\mathbb{CP}^\infty)^K.$$

Т.к. $\mu_i \in \pi_1(\Omega(\mathbb{CP}^\infty)^K)$, можем применить гомоморфизм Гуревича к $[\mu_i]$, тем самым получая 7 циклов $u_i := h([\mu_i]) \in H_1(\Omega(\mathbb{CP}^\infty)^K)$.

Теорема 8.4.1 из [2] говорит о существовании точной последовательности

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_K) \hookrightarrow H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^K\right) \xrightarrow{j} \Lambda[u_0, u_1, u_2, u_3, u_{1'}, u_{2'}, u_{3'}] \to 0.$$

$H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)$ мы ищем именно как ядро j, поэтому ценно узнать максимально много про структуру алгебры $H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^K\right)$ и понять, какие элементы переходят в 0 при отображении j.

Лемма 2. $[u_i, u_j] := u_iu_j + u_ju_i = 0$ *в* $H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^K\right)$ *тогда и только тогда, когда* $\{i, j\} \in K$*. При этом, если* $[u_i, u_j] \neq 0$*, верно, то* $[u_i, u_j] \in \ker j$*.*

Доказательство. В $\pi_1(\Omega(\mathbb{CP}^\infty)^K$ имеем $[\mu_i, \mu_j]_s = 0$ тогда и только тогда, когда $\{i, j\} \in K$ ([2], Предложение 8.4.2). По теореме B.1.17 из [2], $h([\mu_i, \mu_j]_s) = u_iu_j + u_ju_i$. Следовательно, $[u_i, u_j] := u_iu_j + u_ju_i = 0$ в алгебре $H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^K\right)$ тогда и только тогда, когда $\{i, j\} \in K$.

Т.к. $j(u_i) = u_i$, в $\Lambda[u_0, u_1, u_2, u_3, u_{1'}, u_{2'}, u_{3'}]$ ненулевой коммутатор переходит в 0: $j([u_i, u_j]) = u_iu_j + u_ju_i = u_iu_j - u_iu_j = 0$. $\square$

Введем высшее произведение Уайтхеда $\widehat{w_{123}} = [\widehat{\mu_1}, \widehat{\mu_2}, \widehat{\mu_3}]_w : S^5 \to \mathbb{CP}^{\infty K}$ ([4]). Именно симплекс $\{1, 2, 3\}$ отсутствует в K, поэтому w_{123} нетривиально. Образ гомоморфизма Гуревича от гомотопического класса 4-мерного сфероида, сопряженного $\widehat{w_{123}}$, обозначим через $w_{123} \in H_*(\Omega(\mathbb{CP}^\infty)^K)$. При j элемент w_{123} также переходит в 0.

Тогда возникает гипотеза, что алгебра $H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^K\right)$ порождается элементами u_i и w_{123}. Соотношения в ней могут получаться, например, с помощью тождества Якоби для произведения Самельсона. В качестве примера

Лемма 3. $[[w_{123}, u_{1'}], u_{2'}] + [[w_{123}, u_{2'}], u_{1'}] = 0.$

Доказательство. Просто выпишем тождество Якоби $[[w_{123}, \mu_{1'}]_s, \mu_{2'}]_s = [w_{123}, [\mu_{1'}, \mu_{2'}]_s]_s - (-1)^4[\mu_{1'}, [w_{123}, \mu_{2'}]_s]_s$. Остается заметить, что первое слагаемое зануляется, т.к. $\{1', 2'\} \in K$. $\square$

Список литературы

[1] Jelena Grbic, Marina Ilyasova, Taras Panov и George Simmons. "One-relator groups and algebras related to polyhedral products". в: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* (2021), с. 1—20. DOI: https://doi.org/10.1017/prm.2020.101.

[2] Victor M. Buchstaber и Taras E. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2015. ISBN: 147042214X.

[3] Т. Е. Панов. *Топология-2.* URL: http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-topology2.pdf.

[4] С. А. Абрамян. "Итерированные высшие произведения Уайтхеда в топологии момент-угол комплексов". в: *Сиб. матем. журн* 60.2 (2019), с. 243—256.