Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова

Механико - математический факультет, 5 курс.
Кафедра Высшей Геометрии и Топологии

Алексеевс Русланс
Курсовая работа

О теореме Хилтона-Милнора

Научный руководитель - Тарас Евгеньевич Панов

Москва
2022 г.

1. Введение

Теорема Хилтона-Милнора - один из главных результатов теории гомотопий. Ее первая версия была сформулирована и доказана Хилтоном в его статье 1955 года ([1]), посвященной описанию разложения группы $\pi_n(S^{n_1} \vee S^{n_1} \vee \ldots \vee S^{n_k})$ в бесконеченую прямую сумму гомотопических групп сфер. Уже в 1956 году в неопубликованных заметках Милнора ([2]) результат Хилтона был сильно обобщен - был найден гомотопический тип пространства петель над $\Sigma(S^{n_1} \vee S^{n_1} \vee \ldots \vee S^{n_k})$.

В данной работе мы более подробно обсудим результат Милнора и некоторые его обобщения, а также наметим возможности дальнейшего обобщения теоремы Хилтона-Милнора.

2. Необходимые определения

Давайте введем необходимые относительно редкие определения, которые нам пригодятся.

Определение 1. Категорией компактно порожденных пространств называется полная подкатегория $\mathscr{K}$ категории топологических пространств $\mathscr{T}$, задаваемая следующим условием: $X \in Ob(\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда:

1) X хаусдорфово;
2) Для любого $A \subset X$ замкнутость $A \cap C$ для любого компакта $C \subset X$ влечет замкнутость самого A.

Определение 2. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - счетное семейство топологических пространств с отмеченными точками. Тогда слабым бесконечным произведением $X = \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ мы назовем топологическое пространство, заданное следующими условиями:

1) Элементы X есть элементы обычного декартова произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, у которых на всех позициях за исключением конечного числа стоят отмеченные точки;
2) Топология на описанном множестве финальная. Иными словами, $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $U \cap \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_{i_j}$ открыто для любого конечного произведения исходных пространств с обычной тихоновской топологией.

Нужно отметить, что слабое бесконечное произведение не совпадает ни с обычным бесконечным произведением топологических пространств (даже как множество), ни с таким же множеством, наделенным индуцированной топологией с обычного бесконечного произведения (у слабого произведения топология, как правило, тоньше).

Определение 3. Функция Мебиуса $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ определяется так:

- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = 0$, если n не свободно от квадратов.
- $\mu(n) = 1$, если n свободно от квадратов и раскладывается в произведение четного числа простых чисел.
- $\mu(n) = -1$, если n свободно от квадратов и раскладывается в произведение нечетного числа простых чисел.

Определение 4. K - симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$.

$$(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

есть набор топологических пар. Для каждого $I \subset [m]$ определим

$$(\underline{X}, \underline{A})^I = \Big\{(x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i \mid \; x_i \in A_i \text{ для } j \notin I\Big\}.$$

Тогда полиэдральным произведением $(\underline{X}, \underline{A})$, соответствующим K назовем топологическое пространство

$$(\underline{X}, \underline{A})^K = \bigcup_{I \in K} (X, A)^I = \bigcup_{I \in K} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right).$$

Далее, если (X, A) - просто топологические пара (а не набор пар), то через $(\underline{X}, \underline{A})^K$ будем обозначать полиэдральное произведение набора одинаковых пар $\{(X, A), \ldots, (X, A)\}$.

Для топологического пространства X через X^K будем обозначать полиэдральное произведение $(\underline{X}, \underline{pt})^K$.

3. Оригинальная теорема Хилтона-Милнора

В этой секции мы обсудим теорему Хилтона-Милнора и некоторые ее более тонкие аспекты.

Теорема 5. *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ - связные полусимплициальные комплексы. Тогда $\Omega\Sigma(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r)$ имеет тот же гомотопический тип, что и слабое произведение $\prod_{i=1}^{\infty} \Omega\Sigma A_i$, где для индексов $i > r$ множитель A_i имеет вид*

$$A_1^{\wedge n_1} \wedge A_2^{\wedge n_2} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r},$$

где число множителей данного вида равняется числу Витта $\phi(n_1, \ldots, n_r) = \frac{1}{n} \sum_{d|\delta} \frac{\mu(d)(\frac{n}{d}!)}{(\frac{n_1}{d}!)\ldots(\frac{n_r}{d}!)}$, где $n = n_1 + \ldots + n_r$, а $\delta = \text{НОД}(n_1, \ldots, n_r)$.

Замечание 1. Это формулировка теоремы Хилтона-Милнора из оригинальных заметок Милнора. Конечно, в первую очередь нас интересует, что она выполняется в частности для CW-комплексов. Сам Милнор доказывал ее именно для полусимплициальных комплексов (под этим словом я подразумеваю Δ-комплексы в определениях из [3], суть геометрическая реализация полусимплициальных множеств). С другой стороны, она обобщается до любых компактно порожденных пространств (например, в такой форме это доказывается в [4]).

Замечание 2. Особенно ценно рассмотреть случай, когда все пространства A_i для $i = 1 \ldots r$ в теореме 1 это сферы. В таком случае теорема 1 переходит в первоначальный результат Хилтона. Действительно, $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, поэтому теорема 1 дает гомотопическую эквивалентность

$$\Omega\Sigma(S^{m_1} \vee S^{m_2} \vee \ldots \vee S^{m_r}) \simeq \prod_{i=1}^{r} \Omega S^{m_i+1} \times \prod_{i=r+1}^{\infty} \Omega\Sigma A_i,$$

где мы в точности знаем, какому типу принадлежат пространства $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ - это смэши сфер каких-то размерностей, следовательно, сферы. Учитывая это и коммутирование букета и надстройки, имеем

$$\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}) \simeq \prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{m_i+1},$$

где при $i > r$ мы можем вычислить, сколько раз во множестве $\{m_i\}$ встречается каждое натуральное число с помощью формулы Витта.

Рассматривая классы гомотопности m-мерных сфероидов в левое и правое пространства, получаем

$$\pi_m\left(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})\right) \cong \pi_m\left(\prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{m_i+1}\right),$$

что наконец-то дает разложение

$$\pi_{m+1}\left(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{m+1}(S^{m_i+1}). \tag{1}$$

Особая ценность заключается в том, что можно явно и описать изоморфизм групп (1) в терминах произведений Уайтхеда.

Описание относительно простое, но нам потребуется череда обозначений. Возьмем элемент $\alpha_j \in \pi_{m_j}(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}))$. Есть изоморфизм

$$\pi_{m_j}(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})) \cong \pi_{m_j+1}(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}). \tag{2}$$

При нем α_j переходит в некоторый τ_j.

Слагаемое $\pi_{m+1}(S^{m_j+1})$ из правой части разложения (1) образовалось из-за сферы $S^{m_j+1} \cong \Omega\Sigma A_j \cong A_1^{\wedge n_1} \wedge A_2^{\wedge n_2} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r}$. Чисто для удобства сопоставим этой сфере моном $P_j(x_1, \ldots, x_r) = x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$. Теперь вместо формальных переменных подставим в многочлен классы сфероидов и в вместо умножения переменных будем рассматривать произведение Самельсона. Так как произведение Самельсона действует так

$$[\cdot, \cdot]_s : [X, H] \times [Y, H] \to [X \wedge Y, H],$$

у нас имеется итерированное произведение Самельсона $P_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, лежащее в

$$[A_1^{\wedge n_1} \wedge A_2^{\wedge n_2} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r}, \Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})] = \pi_{m_j}\left(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})\right).$$

При изоморфизме (2) оно переходит (с точностью до знака) в итерированное произведение Уайтхеда $P(\tau_1, \ldots, \tau_r) \in \pi_{m_j+1}(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})$.

Теперь можно описать изоморфизм (1). Оказывается, он осуществляется отображением $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{m+1}(S^{m_i+1}) \to \pi_{m+1}\left(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}\right)$, действующим по формуле

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\tau_1, \ldots, \tau_{i_r}) \circ \beta_j.$$

Данная сумма имеет смысл, ведь только конечное число элементов из $\{\beta\}_{j=1}^{\infty}$ ненулевое.

Т.е. суть изоморфизма (1) заключается в том, что включение группы есть композиция с каким-то итерированным произведением Уайтхеда.

4. Выбор базиса свободной алгебры Ли

Думая о возможных обобщениях, имеет смысл переформулировать теорему 5 так, чтобы зависимость множителя из слабого бесконечного произведения от его индекса была более четко описана.

Чтобы это сделать я хочу обсудить небольшой релевантный кусочек теории алгебр Ли. А именно, я хочу описать один из способов выбора базиса в свободной алгебре Ли, называемый базисом Холла ([5]).

Пусть V - свободная абелева группа на порождающих $x_1, \ldots, x_m$, а через $L\langle V\rangle$ обозначим свободную алгебру Ли, натянутую, на V. Тогда сначала определим глубину d коммутатора из $L\langle V\rangle$ так:

- $d(x_i) = 1$
- $d([a,b]) = d(a) + d(b)$,

т.е. по сути d это просто степень вложенности итерированных коммутаторов (плюс один).

Тогда базис Холла $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 \ldots, \}$ определяется рекуррентно следующим образом:

1) $e_i = x_i \quad \forall i = 1, \ldots, m$;
2) Если $d(e_i) < d(e_j)$, то $i < j$;
3) $[e_i, e_j] \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются 2 условия
    - $e_i, e_j \in \mathcal{B}$ и $i < j$,
    - $e_j = x_j$ для какого-то j или $e_j = [e_l, e_r]$ и $l \leq i$.

Холл доказал, что построенное множество $\mathcal{B}$ действительно образует базис $L\langle V\rangle$.

Пример 6. Пусть $m = 3$, т.е. $L\langle V\rangle = L\langle x, y, z\rangle$. Следуя описанной выше конструкции построим элементы базиса Холла глубины $1 \leq d \leq 3$.

- $d = 1: \quad \Big\{x, y, z\Big\}$
- $d = 2: \quad \Big\{[x,y], [x,z], [y,z]\Big\}$
- $d = 3: \quad \Big\{[x,[x,y]], [x,[x,z]], [y,[x,y]], [y,[x,z]], [y,[y,z]], [z,[x,y]], [z,[x,z]], [z,[y,z]]\Big\}$

Отметим, что пока единственный итерированный коммутатор, выброшенный конструкцией Холла это $[x,[y,z]]$. Действительно, так и должно быть, ведь по тождеству Якоби можем выразить его с помощью двух других:

$$[x,[y,z]] = [y,[x,z]] - [z,[x,y]].$$

Остается лишь отметить, что существует теорема Витта, которая говорит, что количество итерированных коммутаторов из базиса Холла, содержащих в себе переменную x_i ровно n_i раз, в точности равно числу Витта из формулировки теоремы 5.

Таким образом, теорему 5 можно переписать в виде

$$\Omega\left(\Sigma X_1 \vee \cdots \vee \Sigma X_m\right) \simeq \prod_{\alpha \in L\langle V\rangle} \Omega\Sigma\left(X_1^{\wedge\alpha_1} \wedge \cdots \wedge X_m^{\wedge\alpha_m}\right), \tag{3}$$

где α пробегает базис $L\langle V\rangle$. Элемент α это какой-то итерированный коммутатор, и через α_i мы обозначаем, сколько раз в нем встречается x_i.

5. Обобщения теоремы

Естественным простором для обобщения теоремы Хилтона-Милнора являются полиэдральные произведения. Здесь я хочу упомянуть 2 результата - статью Портера 1964 года ([6]) и статью Панова и Терио 2019 года ([7]).

Портер рассматривает пунктированные CW-комплексы $X_1, \dots, X_n$, и обобщает теорему Хилтона-Милнора с букета этих пространств на "букеты лежащие между $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. А именно, для каждого $i = 0, \dots, n-1$ Портер вводит пространство

$$T_i(X_1, \dots, X_n) \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i,$$

задаваемое условием, что как минимум на i позициях стоят отмеченные точки. Очевидно, эти пространства представляют собой лишь частный случай полиэдрального произведения

$$T_i(X_1, \dots, X_n) = (\underline{X}, pt)^{\mathrm{sk}_{n-i-1}\,\Delta^{n-1}}.$$

Теперь мы можем сформулировать результат Портера в современных обозначениях.

Теорема 7. *Имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{pt})^{\mathrm{sk}_{n-i-1}\,\Delta^{n-1}} \simeq \prod_{j=1}^{\infty} \Omega\Sigma X_j,$$

где произведение в правой части это слабое бесконечное произведение, а каждое пространство $X_j = \Sigma^r(X_1^{\wedge j_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\wedge j_n})$, *и множество всех индексов* $(r, j_1, \dots, j_n)$ *вычислимо.*

Второе обобщение теоремы Хилтона-Милнора из [7] дает результат для полиэдральных произведений с гораздо более широким классом симплициальных комлексов, однако жертвует произвольностью пространств и точностью описания гомотопической эквивалентности.

Теорема 8. *K - флаговый симплициальный комплекс.* $\underline{S} = \{S^{n_1-1}, \dots, S^{n_m-1}\}$. *Тогда имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\Omega(\underline{S}, pt)^K \simeq \left(\prod_{i=1}^{m} \Omega S^{n_i}\right) \times M,$$

где M имеет гомотопический тип произведения каких-то сфер и петель на сферах.

Гипотеза и потенциальное направление обобщений состоит в том, что взятие полиэдрального произведения отражается на гомотопической эквивалентости (3) выкидыванием некоторых коммутаторов из базиса свободной алгебры Ли, т.е., может иметь место гомотопическая эквивалентность

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{pt})^K \simeq \prod_{\alpha \in A} \Omega\Sigma\left(X_1^{\wedge\alpha_1} \wedge \cdots \wedge X_m^{\wedge\alpha_m}\right),$$

где $A = L\langle V\rangle / \left([x_i, x_i] = 0 \;\; \forall i, [x_i, x_j] = 0 \;\; \forall i, j : \{i, j\} \in K\right)$.

Список литературы

[1] P. J. Hilton. “On the homotopy groups of the union of spheres”. В: *Jour. London Math. Soc.* 30 (1955), с. 154—172.

[2] John Willard Milnor. “On the construction FK”. В: *Adams, John Frank, Algebraic topology—a student’s guide* (1972), с. 118—136.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2002.

[4] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[5] J.-P. Serre. *Lie Algebras and Lie Groups.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992.

[6] Gerald J. Porter. “A generalization of the Hilton-Milnor theorem”. В: *Bull. Amer. Math. Soc.* 71.2 (1965), с. 357—359.

[7] Taras. E. Panov и Stephen Theriault. “The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes”. В: *Compositio Mathematica* 155 (2019), с. 206—228.

[8] Victor M. Buchstaber и Taras. E. Panov. *Toric topology.* Mathematical Surveys and Monographs, 204. American Mathematical Society, 2015.