ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Обобщенная теорема Хилтона-Милнора для полиэдральных произведений

Выполнил студент
602 группы
Алексеевс Русланс

(подпись студента)

Научный руководитель:
Профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

(подпись научного руководителя)

Москва
2023

Содержание

1. Введение

Теорема Хилтона-Милнора – один из главных результатов нестабильной теории гомотопий. Ее первая версия была сформулирована и доказана Хилтоном в его статье 1955 года ([1]), посвященной описанию разложения группы $\pi_n(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_k})$ в бесконечную прямую сумму гомотопических групп сфер. Уже в 1956 году в неопубликованных заметках Милнора ([2]) результат Хилтона был сильно обобщен – был найден гомотопический тип пространства петель над $\Sigma(X_1 \vee X_{k-1} \vee \ldots \vee X_k)$.

В данной работе представлено исследование возможности дальнейшего обобщения теоремы Хилтона-Милнора на случай полиэдральных произведений. В секции 2 мы вводим необходимые определения, которые затем используются в остальной работе. В секции 3 мы приводим оригинальную теорему Хилтона-Милнора и выводим из нее разложение старшей гомотопической группы $\pi_n(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_k})$ в бесконечное прямое произведение, а в секции 4 вводим конструкцию базиса Холла свободной алгебры Ли и используем ее, чтобы переформулировать теорему Хилтона-Милнора в более удобном для нас виде.

В секции 5 мы, вдохновившись результатом Портера ([3], [4]), совершаем попытку обобщения теоремы Хилтона-Милнора, доказывая существование гомотопического расслоения $(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \prod_{i=1}^{m} Y_i$. Рассматривая гомотопическое расслоение, получающееся из данного применением функтора петель, мы расщепляем его и используем описание гомотопического слоя, полученное в работе Панова и Терио ([5]). Таким образом мы выводим новое альтернативное разложение пространства $\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$ для случая, когда симплициальный комплекс K уже не просто дизъюнктный набор точек, а любой флаговый симплициальный комплекс с хордовым 1-остовом. Мы сравниваем это разложение с разложением, даваемым теоремой Хилтона-Милнора в случае простейшего комплекса L, состоящего из двух несоединенных ребром точек. В секции 6 мы рассматриваем отображение гомотопического слоя $(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K$ и обобщаем теорему, упомянутую Портером в статье 1966 года ([4]) и строго доказанную Терио в 2018 году ([6]), описывающую конкретный вид этого отображения в случае сиплициального комплекса, состоящего из дизьюнктного набора точек, на случай любого флагового симплициального комплекса с хордовым 1-остовом.

Различные утверждения, встречаемые в этой работе, верны для разных классов пространств, однако, если ограничиться односвязными CW-комплексами с отмеченной точкой, они все выполняются. Предполагается, что каждое простанство имеет отмеченную точку, хоть это часто и не произносится явно. Под симплициальными комплексами мы подразумеваем абстрактные симплициальные комплексы на множестве вершин $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Если другого не указано, через L в данной работе мы обозначаем симплициальный комплекс, состоящий из дизьюнктного набора точек, а через K – произвольный симплициальный комплекс. Все расслоения понимаются как расслоения в смысле Гуревича.

Автор работы хочет выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, Тарасу Евгеньевичу Панову, за знакомство с теорией гомотопий, постановку задачи, а также за многочисленные обсуждения и внимание к работе.

2. Необходимые определения

Давайте введем необходимые и местами довольно редкие определения, которые нам пригодятся.

Определение 2.1. *Категорией компактно порожденных пространств называется полная подкатегория $\mathscr{K}$ категории топологических пространств $\mathscr{T}$, задаваемая следующим условием: $X \in Ob(\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда:*

1) *X хаусдорфово;*
2) *Для любого $A \subset X$ замкнутость $A \cap C$ для любого компакта $C \subset X$ влечет замкнутость самого A.*

Определение 2.2. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - счетное семейство топологических пространств с отмеченными точками. Тогда слабым бесконечным произведением $X = \prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ мы назовем топологическое пространство, заданное следующими условиями:*

1) *Элементы X есть элементы обычного декартова произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, у которых на всех позициях за исключением конечного числа стоят отмеченные точки;*

2) *Топология на описанном множестве финальная. Иными словами, $U \subset X$ открыто тогда и только тогда, когда $U \cap \prod_{j=1}^{n} X_{i_j}$ открыто для любого конечного подпроизведения исходных пространств с обычной тихоновской топологией.*

Замечание 1. *Стоит отметить, что слабое бесконечное произведение не совпадает ни с обычным бесконечным произведением топологических пространств (даже как множество), ни с таким же множеством, наделенным индуцированной топологией с обычного бесконечного произведения (у слабого произведения топология, как правило, тоньше).*

Определение 2.3. *Функция Мебиуса $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ определяется так:*

- $\mu(1) = 1$
- $\mu(n) = 0$, *если n не свободно от квадратов.*
- $\mu(n) = 1$, *если n свободно от квадратов и раскладывается в произведение четного числа простых чисел.*
- $\mu(n) = -1$, *если n свободно от квадратов и раскладывается в произведение нечетного числа простых чисел.*

Далее мы определяем конструкцию, подробно описанную [7] и являющуюся центральной в данной работе.

Определение 2.4. *K - симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.*

$$(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

есть набор топологических пар. Для каждого $I \subset [m]$ определим

$$(\underline{X}, \underline{A})^I = \Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{i=1}^{m} X_i \mid \ x_i \in A_i \text{ для } i \notin I\Big\},$$

иначе говоря

$$(\underline{X}, \underline{A})^I = \prod_{i=1}^{m} Y_i, \qquad \text{где } Y_i = \begin{cases} X_i & \text{если } i \in I, \\ A_i & \text{если } i \notin I. \end{cases}$$

Тогда полиэдральным произведением $(\underline{X}, \underline{A})^K$ назовем топологическое пространство

$$(\underline{X}, \underline{A})^K = \bigcup_{I \in K} (\underline{X}, \underline{A})^I = \bigcup_{I \in K} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right).$$

Рассмотрим пару примеров:

1) $K = \Delta^{m-1}$. Очевидно, тогда $(\underline{X}, \underline{A})^K = \prod\limits_{i=1}^{m} X_i$ вне зависимости от семейства подпространств $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

2) Пусть K – дизъюнктный набор точек. В таком случае, очевидно, мы получаем склейку всех пространств $X_1, \ldots, X_m$ по отмеченной точке, т.е. букет:

$$(\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K \cong \bigvee_{i=1}^{m} X_i.$$

3) $K = \mathrm{sk}^{m-2}\Delta^{m-1}$. Тогда

$$(\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K \cong (X_1 \times \ldots \times X_{m-1} \times pt) \cup (X_1 \times \ldots \times pt \times X_m) \cup \ldots \cup (pt \times \ldots \times X_{m-1} \times X_m)$$

есть пространство, называемое "толстым букетом". Оно еще у нас появится при упоминании результата Портера ([3] и [4]).

В данной работе особенно важен случай, когда $A_i = \mathrm{pt} \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, m$. Из определения и примеров видно, что $(\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$ лежит где-то "между" букетом $\bigvee\limits_{i=1}^{m} X_i$ и произведением $\prod\limits_{i=1}^{m} X_i$. Конкретный же вид пространства полностью шифруется комбинаторикой K.

Наконец, нам будут очень важны несколько комбинаторных определений, описывающих типы симплициальных комплексов (в частности графов).

Определение 2.5. *Симплициальный комплекс K называется флаговым, если в нем любой набор вершин, попарно соединенных рёбрами, образует симплекс.*

Замечание 2. *Из данного определения, очевидно, следует, что симплициальный комплекс K полностью определяется своим 1-остовом.*

Определение 2.6. *Цикл C в графе Γ называется бесхордовым, если никакие две вершины C не соединены ребром, не принадлежащим C.*

Определение 2.7. *Граф Γ называется хордовым, если Γ не содержит бесхордовых циклов длины больше трех.*

3. Оригинальная теорема Хилтона-Милнора

В этой секции мы обсудим теорему Хилтона-Милнора и некоторые ее более тонкие аспекты.

Теорема 3.1 ([2]). *Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_r$ - связные полусимплициальные комплексы. Тогда $\Omega\Sigma(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_r)$ имеет тот же гомотопический тип, что и слабое произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \Omega\Sigma A_i$, где для индексов $i > r$ множитель A_i имеет вид*

$$A_1^{\wedge n_1} \wedge A_2^{\wedge n_2} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r},$$

где число множителей данного вида равняется числу Витта
$\phi(n_1, \ldots, n_r) = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|\delta} \frac{\mu(d)(\frac{n}{d}!)}{(\frac{n_1}{d}!)\ldots(\frac{n_r}{d}!)}$, *где $n = n_1 + \ldots + n_r$, а $\delta = \text{НОД}(n_1, \ldots, n_r)$.*

Замечание 3. *Это формулировка теоремы Хилтона-Милнора из оригинальных заметок Милнора 1956 года. Конечно, в первую очередь нас интересует, что она выполняется в частности для* CW*-комплексов. Сам Милнор доказывал ее именно для полусимплициальных комплексов (под этим словом я подразумеваю Δ-комплексы в определениях из [8], суть геометрическая реализация полусимплициальных множеств). С другой стороны, она обобщается до любых компактно порожденных пространств (например, в такой форме это доказывается в [9]).*

Замечание 4. *Отметим также очевидный факт, что раз $\Sigma X \cong X \wedge S^1$, а смэш-произведение ассоциативно в категории компактно порожденных пространств, мы можем не делать различия между пространствами*

$$\Sigma\left(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r\right) \cong \Sigma A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_r \cong A_1 \wedge \Sigma A_2 \wedge \ldots \wedge A_r \cong \ldots \cong A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge \Sigma A_r.$$

Особенно ценно рассмотреть случай, когда все пространства A_i для $i = 1 \ldots r$ в теореме 3.1 это сферы. В таком случае из теоремы 3.1 простыми рассуждениями вытекает следующее утверждение для старших гомотопических групп букета сфер.

Следствие 3.2. *Пусть даны $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая бесконечная последовательность натуральных чисел $m_{r+1}, m_{r+2}, m_{r+3}, \ldots$, что есть изоморофизм*

$$\pi_n\left(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_n(S^{m_i+1}). \tag{1}$$

Доказательство.
Действительно, $\Sigma S^m \cong S^{m+1}$, поэтому теорема 3.1 дает гомотопическую эквивалентность

$$\Omega\Sigma(S^{m_1} \vee S^{m_2} \vee \ldots \vee S^{m_r}) \simeq \prod_{i=1}^{r} \Omega S^{m_i+1} \times \prod_{i=r+1}^{\infty} \Omega\Sigma A_i,$$

где мы в точности знаем, чему гомеоморфны пространства $\{A_i\}_{i=r}^{\infty}$ – это смэши сфер каких-то размерностей, следовательно, тоже сферы. Также из тех фактов, что $\Sigma X \cong X \wedge S^1$, а смэш-произведение дистрибутивно относительно букета, имеем $\Omega\Sigma(S^{m_1} \vee S^{m_2} \vee \ldots \vee S^{m_r}) \cong \Omega(\Sigma S^{m_1} \vee \Sigma S^{m_2} \vee \ldots \vee \Sigma S^{m_r})$, откуда

$$\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}) \simeq \prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{m_i+1},$$

где при $i > r$ мы можем вычислить, сколько раз во множестве $\{m_i\}$ встречается каждое натуральное число с помощью формулы Витта.

Рассматривая классы гомотопности m-мерных сфероидов в левое и правое пространства, получаем

$$\pi_m\left(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})\right) \cong \pi_m\left(\prod_{i=1}^{\infty} \Omega S^{m_i+1}\right),$$

что наконец-то дает разложение

$$\pi_{m+1}\left(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} \pi_{m+1}(S^{m_i+1}). \tag{2}$$

□

Замечание 5. *Особая ценность заключается в том, что можно явно и описать изоморфизм групп (2) в терминах произведений Уайтхеда.*

Описание относительно простое, но громоздкое, т.к. нам потребуется череда обозначений. Возьмем элемент

$$\alpha_j \in \pi_{m_j}(\Omega(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}))$$

Есть изоморфизм

$$\pi_{m_j}(\Omega(S^{m_1+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})) \cong \pi_{m_j+1}(S^{m_1+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}). \tag{3}$$

При нем α_j переходит в некоторый τ_j.

Слагаемое $\pi_{m+1}(S^{m_j+1})$ из правой части разложения (2) образовалось из-за сферы $S^{m_j+1} \cong \Omega\Sigma A_j \cong A_1^{\wedge n_1} \wedge A_2^{\wedge n_2} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r}$. Чисто для удобства сопоставим этой сфере моном $P_j(x_1, \ldots, x_r) = x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$. Теперь вместо формальных переменных подставим в многочлен классы сфероидов, а вместо умножения переменных будем рассматривать произведение Самельсона. Так как произведение Самельсона действует так

$$[\cdot,\cdot]_s : [X, H] \times [Y, H] \to [X \wedge Y, H],$$

у нас имеется итерированное произведение Самельсона $P_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, лежащее в

$$[A_1^{\wedge n_1} \wedge \ldots \wedge A_r^{\wedge n_r}, \Omega(S^{m_1+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})] = \pi_{m_j}\left(\Omega(S^{m_1+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1})\right).$$

При изоморфизме (3) оно переходит (с точностью до знака) в итерированное произведение Уайтхеда

$$P(\tau_1, \ldots, \tau_r) \in \pi_{m_j+1}(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}).$$

Теперь можно описать изоморфизм (2). Оказывается, он осуществляется отображением $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \pi_{m+1}(S^{m_i+1}) \to \pi_{m+1}\left(S^{m_1+1} \vee S^{m_2+1} \vee \ldots \vee S^{m_r+1}\right)$, *действующим по формуле*

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots) \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\tau_1, \ldots, \tau_r) \circ \beta_j.$$

Данная сумма имеет смысл, ведь только конечное число элементов из $\{\beta\}_{j=1}^{\infty}$ *ненулевое.*

Т.е. суть изоморфизма (2) заключается в том, что включение группы есть композиция с каким-то итерированным произведением Уайтхеда.

4. Выбор базиса свободной алгебры Ли и переформулировка теоремы Хилтона-Милнора

Думая о возможных обобщениях, имеет смысл переформулировать теорему 3.1 так, чтобы зависимость множителя из слабого бесконечного произведения от его индекса была более четко описана.

Чтобы это сделать я хочу обсудить небольшой релевантный кусочек теории алгебр Ли. А именно, я хочу описать один из способов выбора базиса в свободной алгебре Ли, называемый базисом Холла ([10]).

Через $L\langle x_1, x_2, \ldots, x_m\rangle$ обозначим свободную алгебру Ли, натянутую на формальные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда сначала определим глубину d коммутатора из $L\langle V\rangle$ так:

- $d(x_i) = 1$
- $d([a, b]) = d(a) + d(b)$,

т.е. по сути d это просто на один больше степени вложенности итерированных коммутаторов или, другими словами, количество задействованных в коммутаторе переменных, включая повторения.

Тогда базис Холла $\mathcal{B} = \{e_1, e_2 \ldots, \}$ определяется рекуррентно следующим образом:

1) $e_i = x_i \;\; \forall i = 1, \ldots, m$;
2) Если $d(e_i) < d(e_j)$, то $i < j$;
3) $[e_i, e_j] \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются 2 условия:

- $e_i, e_j \in \mathcal{B}$ и $i < j$,
- $e_j = x_j$ для какого-то j или $e_j = [e_l, e_r]$ и $l \leq i$.

Холл доказал, что построенное множество $\mathcal{B}$ действительно образует базис свободной алгебры Ли $L\langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$.

Пример 4.1. *Пусть $m = 3$, т.е. $L\langle V \rangle = L\langle x, y, z \rangle$. Следуя описанной выше конструкции построим элементы базиса Холла глубины $1 \leq d \leq 3$.*

- $d = 1: \quad \Big\{x, y, z\Big\}$
- $d = 2: \quad \Big\{[x, y], [x, z], [y, z]\Big\}$
- $d = 3: \quad \Big\{[x, [x, y]], [x, [x, z]], [y, [x, y]], [y, [x, z]], [y, [y, z]], [z, [x, y]], [z, [x, z]], [z, [y, z]]\Big\}$

Отметим, что пока единственный итерированный коммутатор, выброшенный конструкцией Холла это $[x, [y, z]]$. Действительно, так и должно быть, ведь по тождеству Якоби можем выразить его с помощью двух других:

$$[x, [y, z]] = [y, [x, z]] - [z, [x, y]].$$

Остается лишь отметить, что существует теорема Витта ([11]), которая говорит, что количество итерированных коммутаторов из базиса Холла, содержащих в себе переменную x_i ровно n_i раз, в точности равно числу Витта из формулировки теоремы 3.1.

Следовательно, конструкция базиса Холла и теорема Витта позволяют переписать теорему 3.1 следующим образом

Теорема 4.2.

$$\Omega\left(\Sigma X_1 \vee \ldots \vee \Sigma X_m\right) \simeq \prod_{\alpha \in L\langle x_1, \ldots, x_m \rangle} \Omega\Sigma\left(X_1^{\wedge \alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_m^{\wedge \alpha_m}\right), \tag{4}$$

где α пробегает базис Холла для $L\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, а через через α_i мы обозначаем, сколько раз в итерированном коммутаторе α встречается x_i.

5. Подход к обобщению теоремы

Весьма естественным простором для попыток обобщения теоремы Хилтона-Милнора являются полиэдральные произведения. В данной секции мы переформулируем на язык полиэдральных произведений классический результат, упомянутый в статье Портера 1964 года ([3]) и доказанный в его же статье 1965 года ([4]), и рассмотрим один перспективный подход к обобщению теоремы Хилтона-Милнора.

Портер рассматривает пунктированные CW-комплексы $X_1, \ldots, X_n$, и обобщает теорему Хилтона-Милнора с букета этих пространств на "букеты", лежащие между $\bigvee\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ и $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$. А именно, для каждого $i = 0, \ldots, n-1$ Портер вводит пространство

$$T_i(X_1, \ldots, X_n) \subset \prod_{i=1}^{\infty} X_i,$$

задаваемое условием, что как минимум на i позициях стоят отмеченные точки. Очевидно, эти пространства представляют собой лишь частный случай полиэдрального произведения

$$T_i(X_1, \ldots, X_n) = (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^{\mathrm{sk}_{n-i-1}\Delta^{n-1}},$$

при этом на момент написания статьи [3] понятие полиэдрального произведения не существовало.

Так, например, в случае $i = 1$ пространство $T_i(X_1, \ldots, X_n)$ есть в точности "толстый букет", который мы упоминали в самом начале данной работы.

Теперь мы можем сформулировать результат Портера в современных обозначениях.

Теорема 5.1 ([3], [4]). *Имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^{\mathrm{sk}_{n-i-1}\Delta^{n-1}} \simeq \prod_{j=1}^{\infty} \Omega\Sigma X_j,$$

где произведение в правой части это слабое бесконечное произведение, а каждое пространство X_j есть $\Sigma^r(X_1^{\wedge j_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\wedge j_n})$, и множество всех индексов $(r, j_1, \ldots, j_n)$ вычислимо.

Этот результат в том числе мотивирует нас на попытки изучения гомотопического типа пространства

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K. \tag{5}$$

Мы обсудим подход, позволяющий получить некоторое весьма перспективное разложение $\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$ в произведение, в процессе вводя для этого глубокие инструменты, исследованием которых мы займемся в следующей секции.

Начнем с формулировки полезной леммы.

Лемма 5.2 ([12]). *Пусть дано семейство из m коммутативных диаграмм*

$$\begin{array}{ccccc} F_i' & \longrightarrow & E_i' & \longrightarrow & B_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F_i & \longrightarrow & E_i & \longrightarrow & B_i \end{array}$$

CW-комплексов, где по горизонтали сверху и снизу стоят расслоения, вертикальные стрелки есть вложения, а самая правая вертикальная стрелка – тождественное отображение.

Тогда для любого симплициального комплекса K на множестве вершин $[m]$ существует расслоение

$$(\underline{F}, \underline{F'})^K \to (\underline{E}, \underline{E'})^K \to \prod_{i=1}^{m} B_i.$$

Предложение 5.3. *Существует гомотопическое расслоение*

$$(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \prod_{i=1}^{m} Y_i$$

Доказательство.
Давайте применим лемму 5.2 к "большому" расслоению

$$CPX_i \to X_i \times CPX_i \to X_i$$

и классическому "маленькому" расслоению

$$\Omega X_i \to PX_i \to X_i.$$

Здесь под CPX_i я подразумеваю просто $C(PX_i)$, т.е. конус на пространстве путей.

В результате мы получаем расслоение

$$(\underline{PX}, \underline{\Omega X})^K \to (\underline{X \times PX}, \underline{PX})^K \to \prod_{i=1}^{m} X_i.$$

Остается лишь вспомнить, что и конус, и пространство путей стягиваемы, а также заметить, что есть гомотопическая эквивалентность топологических пар $(PX, \Omega X) \simeq (C\Omega X, \Omega X)$. Это в совокупности с гомотопической инвариантностью полиэдрального прозведения дает нам гомотопическое расслоение

$$(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \prod_{i=1}^{m} Y_i.$$

□

Как мы видим, в случае выбора $Y_i = \Sigma X_i$, интересующее нас пространство (5) есть в точности петли на центральном пространстве в гомотопическом расслоении из предложения 5.3. Следовательно, мы хотим рассмотреть последовательность отображений

$$\Omega(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to \Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \Omega \prod_{i=1}^{m} Y_i.$$

Она вновь оказывается гомотопическим расслоением, что следует из определения гомотопического расслоения и следующего предложения.

Предложение 5.4. *Если дано расслоение CW-комплексов*

$$F \to E \to B,$$

то

$$\Omega F \to \Omega E \to \Omega B$$

также является расслоением.

Доказательство.
Нам дано, что $p : E \to B$ это расслоение, так что можем рассмотреть его свойство поднятия гомотопии

$$\begin{tikzcd} S^1 \times Z \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ S^1 \times Z \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & B \end{tikzcd}$$

Обозначим поднятие гомотопии символом G, т.е. $G : S^1 \times Z \times I \to E$. Тогда сопряженное отображение к G будет поднятием гомотопии уже в сопряженной диаграмме

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & \Omega E \arrow[d] \\ Z \times I \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \Omega B \end{tikzcd}$$

Единственная тонкость здесь заключается в том, что вообще говоря отображение, сопряженное к G, будет бить не в ΩE, а просто в $\mathcal{C}(S^1, E)$, т.е. в морфизмы, не обязательно сохраняющие отмеченную точку. Однако, это обходится тем, что мы рассматриваем CW-комплексы. Выходит, в частности для B вложение точки является корасслоением, откуда следует, что постоянные пути в B поднимаются в постоянные пути в E, что в свою очередь дает тождество

$$G(*, z, t) = *, \qquad \forall t \in I,\ \forall z \in Z.$$

Это тождество и гарантирует, то, что сопряженное к G отображение бьет именно в петли.

Теперь, когда свойство поднятия гомотопии обосновано, нам остается лишь взглянуть на слой расслоения $\Omega E \to \Omega B$ и убедиться, что это ΩF. По определению его слой есть

$$\{\gamma \in \Omega E \mid p(\gamma(S^1)) = *\} = \{\gamma \in \Omega E \mid \gamma(S^1) \subseteq F\} \cong \Omega F.$$

Получили, что

$$\Omega F \to \Omega E \to \Omega B$$

действительно тоже является расслоением. □

Наконец, можем получить разложение пространства $\Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K$.

Теорема 5.5. *Гомотопическое расслоение*

$$\Omega(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to \Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \Omega \prod_{i=1}^{m} Y_i.$$

расщепляется.

Доказательство.
Очевидно, $\Omega \prod\limits_{i=1}^{m} Y_i \cong \prod\limits_{i=1}^{m} \Omega Y_i$. Явно построим сечение

$$s : \prod_{i=1}^{m} \Omega Y_i \to \Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K.$$

Просто по определению полиэдрального произведения у нас есть отображения $Y_i \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K$. Следовательно, имеем отображения $\Omega Y_i \to \Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K$. Тогда положим $s(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \ldots \cdot \gamma_m$, где справа берется умножение как операция в H-пространстве. Индуцированный гомоморфизм $s_* : \pi_k \left(\prod\limits_{i=1}^{m} \Omega Y_i\right) \to \pi_k \left(\Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K\right)$ в гомотопических группах позволяет нам разбить длинную точную последовательность расслоения в серию коротких точных последовательностей

$$0 \to \pi_k \left(\Omega(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K\right) \to \pi_k \left(\Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K\right) \to \pi_k \left(\prod_{i=1}^{m} \Omega Y_i\right) \to 0.$$

Наличие сечения расщепляет эту короткую точную последовательность, т.е. мы нашли непрерывное отображение, индуцирующее изоморфизм

$$\pi_k \left(\prod_{i=1}^{m} \Omega Y_i\right) \oplus \pi_k \left(\Omega(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K\right) \cong \pi_k(\Omega(Y, \mathrm{pt})^K)$$

во всех гомотопических группах. Теорема Уайтхеда говорит, что тогда оно есть гомотопическая эквивалентность. $\square$

Замечание 6. *Стоит отметить, что это расщепление не как H-пространств.*

Замечание 7. *Также стоит отметить, что здесь мы неявно использовали односвязность пространств $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Лемма о расщеплении короткой точной последовательности работает только в абелевых категориях, а группа $\pi_0(\Omega Y_i)$ не обязана быть абелевой, если мы не обговариваем, что наши пространства односвязны. Это одна из причин, почему в введении мы предлагали считать, что все пространства, о которых идет речь в данной работе, есть односвязные CW-комплексы с отмеченной точкой.*

Следовательно, мы получили гомотопическую эквивалентность

$$\Omega(\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \simeq \prod_{i=1}^{m} \Omega Y_i \times \Omega(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K. \tag{6}$$

Так как мы заинтересованы в потенциальном обобщении теоремы Хилтона-Милнора, нам очень важен гомотопический тип именно пространства $\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$. Это заставляет нас положить в разложении (6) $Y_i = \Sigma X_i$. Тогда получим гомотопическую эквивалентность

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K \simeq \prod_{i=1}^{m} \Omega\Sigma X_i \times \Omega(\underline{C\Omega\Sigma X}, \underline{\Omega\Sigma X})^K. \tag{7}$$

Вид второго множителя в правой части, являющегося петлями на полиэдральном произведении, вытекает из следующей теоремы, доказанной в работе [5].

Теорема 5.6 ([5])**.** *Пусть K – флаговый симплициальный комплекс. Пусть при этом $\mathrm{sk}_1(K)$ есть хордовый граф.*

$$(\underline{CY}, \underline{Y})^K \simeq \bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} (\Sigma Y_{i_1} \wedge \ldots \wedge Y_{i_k})^{\vee c(i_1,\ldots,i_k)},$$

где $c(i_1, \ldots, i_k) = \mathrm{rank}\, \widetilde{H}^0\left(K_{\{i_1,\ldots,i_k\}}\right)$, т.е. на 1 меньше, чем связных компонент в полном подкомплексе $K_{\{i_1,\ldots,i_k\}}$).

Теперь, положив в теореме 5.6 $Y_i = \Omega\Sigma X_i$ и используя нашу гомотопическую эквивалентность (7), мы наконец-то получаем следующее разложение.

Теорема 5.7. *Для односвязных CW-комплексов $X_1, X_2, \ldots, X_m$ есть гомотопическая эквивалентность*

$$\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K \simeq \prod_{i=1}^{m} \Omega\Sigma X_i \times \Omega\left(\bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} (\Sigma\Omega\Sigma X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega\Sigma X_{i_k})^{\vee c(i_1,\ldots,i_k)}\right).$$

Этот результат сам по себе весьма интересен и нов, однако он так и не позволяет получить обобщение Хилтона-Милнора. Давайте взглянем на самый простой пример, когда K это всего лишь дизъюнктное обьединение пары точек.

Положим $L = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Настоящая теорема Хилтона-Милнора (4.2) для пары пространств X, Y дает нам гомотопическую эквивалентность

$$\Omega\left(\Sigma X \vee \Sigma Y\right) \simeq \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma X \times \prod_{\alpha \in L\langle x,y\rangle, |\alpha| \geq 2} \Omega\Sigma\left(X^{\wedge\alpha_1} \wedge Y^{\wedge\alpha_2}\right), \tag{8}$$

где α пробегает базис Холла для $L\langle x, y\rangle$.

Наше разложение из теоремы 5.7, в свою очередь, выдает следующую гомотопическую эквивалентность:

$$\Omega\left(\Sigma X \vee \Sigma Y\right) \simeq \Omega\Sigma X \times \Omega\Sigma Y \times \Omega\left(\Sigma\Omega\Sigma X \wedge \Omega\Sigma Y\right). \tag{9}$$

Видим, что разложение (8) в отличии от разложения (9) содержит бесконечное число множителей, но множители в нем имеют более простой вид. Даже для самого простого случая комплекса эквивалентность этих двух разложений абсолютно не очевидна и их отождествление кажется совсем нетривиальной задачей.

Проблема построения такой гомотопической эквивалентности для пространства $\Omega(\underline{\Sigma X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$ и некоторого бесконечного произведения, которая при рассмотрении симплициального комплекса L, представляющего собой дизъюнктный набор точек, совпадала бы с теоремой 4.2, требует дальнейшего исследования топологическими и алгебраическими методами. Мы же пока продолжим изучать свойства ценного гомотопического расслоения из теоремы 5.3.

6. Явное описание отображения гомотопического слоя

В прошлом разделе мы доказали существование гомотопического расслоения

$$(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K \to \prod_{i=1}^{m} Y_i.$$

В данном разделе мы попытаемся дать явное описание отображения гомотопического слоя $(\underline{C\Omega Y}, \underline{\Omega Y})^K \to (\underline{Y}, \underline{\mathrm{pt}})^K$.

Для формулировки результата нам потребуется ввести пару инструментов из теории гомотопий.

Конструкция 6.1. *Для любого пространства X можно построить отображение $\widetilde{\mathrm{ev}} : \Sigma\Omega X \to X$. Это является простым следствием того, что функтор петель является правым сопряженным к функтору надстройки ([13]), т.е. существует гомеоморфизм*

$$\mathcal{C}_*(X, \Omega Y) \cong \mathcal{C}_*(\Sigma X, Y).$$

В частности, есть гомеоморфизм

$$F : \mathcal{C}_*(\Omega X, \Omega Y) \to \mathcal{C}_*(\Sigma\Omega X, Y),$$

действующий следующим образом. Пусть $g \in \mathcal{C}_*(\Omega X, \Omega Y)$ отправляет петлю γ в петлю α. Тогда $F(g)$ есть отображение $\Sigma\Omega X \to Y$, действующее так: $t \wedge \beta \mapsto g(\beta)(t)$.

Теперь можем определить $\widetilde{\mathrm{ev}}$ как $F(\mathrm{id})$ или же явно $\widetilde{\mathrm{ev}}(t \wedge \gamma) = \gamma(t)$, чем и обусловлено обозначение.

Нас будут интересовать отображения

$$\mathrm{ev}_i : \Sigma\Omega X_i \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{ev}}} X_i \hookrightarrow \bigvee_{j=1}^{m} X_j = (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K.$$

Следующая конструкция является далеко идущим обобщением стандартного понятия произведения Уайтхеда $[\cdot,\cdot] : \pi_k(X) \times \pi_l(X) \to \pi_{k+l-1}(X)$.

Конструкция 6.2 ([14], [15])**.** *Пусть даны отображения $f : \Sigma Y_1 \to Z$ и $g : \Sigma Y_2 \to Z$. Их обобщенное произведение Уайтхеда есть отображение*

$$[f, g] : \Sigma Y_1 \wedge Y_2 \to Z.$$

Определим его конкретнее. Пусть даны пространства A, B и X и пусть $\alpha \in [\Sigma A, X]$ и $\beta \in [\Sigma B, X]$. Обобщенное произведение Уайтхеда α и β есть элемент

$$[\alpha, \beta] \in [\Sigma(A \wedge B), X],$$

определяемый следующим образом. Возьмем для α представитель $f : \Sigma A \to X$ и для β представитель $g : \Sigma B \to X$ и обозначим через

$$p_1 : A \times B \to A, \quad p_2 : A \times B \to B$$

проекции. Тогда $f' = f(\Sigma p_1)$ и $g' = g(\Sigma p_2)$ отображают $\Sigma(A \times B)$ в X. Определим c так: $c = (f', g') = f'^{-1} g'^{-1} f' g'$, т.е. как коммутатор f' и g'. Пусть $j : A \vee B \to A \times B$ есть отображение вложения,
и $q : A \times B \to A \wedge B$ – отображение факторизации. Выполеяется тождество

$$(\Sigma j)^*(c) = 0.$$

Следовательно, существует единственный элемент $[\alpha, \beta]$ такой, что

$$(\Sigma q)^*[\alpha, \beta] = c.$$

Когда A и B сферы, это обычное произведение Уайтхеда. Далее, пусть $\iota_1 \in [\Sigma A, \Sigma A \vee \Sigma B]$ и $\iota_2 \in [\Sigma B, \Sigma A \vee \Sigma B]$ это вложения. Тогда $[\iota_1, \iota_2] \in [\Sigma(A \wedge B), \Sigma A \vee \Sigma B]$ называется универсальным элементом для обобщенного произведения Уайтхеда. Если f представляет α и g представляет β, то $[\alpha, \beta] = (f, g)_* [\iota_1, \iota_2]$, где $(f, g) : \Sigma A \vee \Sigma B \to X$ есть отображение, задаваемое f и g, а $(f, g)_*$ есть индуцированное отображение

$$[\Sigma(A \wedge B), \Sigma A \vee \Sigma B] \to [\Sigma(A \wedge B), X].$$

Таким образом любое обобщенное произведение Уайтхеда есть образ универсального элемента.

Замечание 8. *Во многом польза данной конструкции заключается в том, что она в большой степени обладает теми же свойствами, что и обычное произведение Уайтхеда, например, тождеством Якоби. Их формулировки и доказательства можно найти в фундаментальной работе [15] и в книге [16].*

Следующая теорема была высказана Портером в 1966 году ([4]), но оставалась фольклором до строгого доказательства Терио 2018 года ([6]).

Теорема 6.3 ([6]). *$X_1, \ldots, X_m$ односвязные CW-комплексы. Пусть L – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, представляющий собой дизъюнктный набор из m точек. Тогда отображение*

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \simeq \bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} (\Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k})^{\vee(k-1)} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L$$

есть (с точностью до гомотопии) букет отображений

$$\bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} f_{i_1,\ldots,i_k}^{\vee(k-1)},$$

где

$$f_{i_1,\ldots,i_k} : \Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L$$

есть итерированное обобщенное произведение Уайтхеда отображений

$$\mathrm{ev}_{i_1}, \mathrm{ev}_{i_2}, \mathrm{ev}_{i_3}, \ldots \mathrm{ev}_{i_{k-2}}, \mathrm{ev}_{i_{k-1}}, \mathrm{ev}_{i_k}.$$

Замечание 9. *Доказательство Терио теоремы 6.3 занимает в районе 10 страниц технически сложных гомотопических выкладок в работе [6]. В его процессе Терио переходит к рассмотрению итерированных обобщенных произведений Уайтхеда, где множители упорядочены конкретным образом. А именно, если мы рассматриваем слагаемое букета, в котором надстройка берется над смэш-произведением пространств $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$, то соответствующее итерированное обобщенное произведение Уайтхеда упорядочивается так: мы выбираем наименьший $r_1 := \min(i_1, \ldots, i_k)$, далее выбираем j любым из $k-1$ оставшихся способов, а оставшиеся невзятыми элементы из множества $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ упорядочиваем по убыванию как*

$$r_{k-1} > r_{k-2} > \ldots > r_3 > r_2.$$

Тогда мы берем итерированные произведения вида

$$[\mathrm{ev}_{r_{k-1}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-2}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-3}}, \ldots [\mathrm{ev}_{r_2}, [\mathrm{ev}_{r_1}, \mathrm{ev}_j]] \ldots]]].$$

Как видим из замечания, можно уточнить формулировку теоремы и далее использовать ее в следующем виде.

Теорема 6.4. *$X_1, \ldots, X_m$ односвязные CW-комплексы. Пусть L – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, представляющий собой дизъюнктный набор из m точек. Тогда отображение*

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \simeq \bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} (\Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k})^{\vee(k-1)} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L$$

есть (с точностью до гомотопии) букет отображений

$$\bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} f_{i_1,\ldots,i_k}^{\vee(k-1)},$$

где

$$f_{i_1,\ldots,i_k} : \Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L$$

есть итерированное обобщенное произведение Уайтхеда

$$[\mathrm{ev}_{r_{k-1}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-2}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-3}}, \ldots [\mathrm{ev}_{r_2}, [\mathrm{ev}_{r_1}, \mathrm{ev}_j]] \ldots]]],$$

где $\{r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, j\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, \quad r_1 < r_2 < \ldots < r_{k-1}, \quad j > r_1$ *и* $j \neq r_k \ \ \forall l$.

Простое комбинаторное рассуждение позволяет вывести явную формулу для подсчета количества итерированных обобщенных произведений Уайтхеда в теореме 6.4 (или, эквивалентно, для количества слагаемых в букете, представляющем гомотопический слой $(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L$). Автор встречал подобную формулу в несколько схожей алгебраической ситуации в работе [17], но ее вывод нигде так не был записан, вероятно, из-за своей простоты. И все же мы приведем его.

Лемма 6.5. *Количество слагаемых в букете из разложения гомотопического слоя из теоремы 6.4 в точности равно*

$$(m-2)2^{m-1}+1.$$

Доказательство.
Для каждого $k \geq 2$ мы можем выбрать подмножество вершин $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$ в нужном диапазоне ровно C_m^k способами. Слагаемых для такого подмножества будет $(k-1)$, следовательно, нужно вычислить следующую сумму

$$\sum_{k=2}^{m}(k-1)C_m^k = \sum_{k=2}^{m} kC_m^k - \sum_{k=2}^{m} C_m^k = \left(\sum_{k=0}^{m} kC_m^k - m\right) - (2^m - 1 - m)\,.$$

Оставшуюся сумму же можно вычислить несложным трюком. Продифференцируем бином Ньютона $(1+x)^m = \sum\limits_{k=0}^{m} x^k$ и получим

$$m(1+x)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m} kx^{k-1}.$$

Подстановка $x=1$ дает $\sum\limits_{k=0}^{m} kC_m^k = m2^{m-1}$, откуда

$$\sum_{k=2}^{m}(k-1)C_m^k = m2^{m-1} - m - 2^m + 1 + m = 2^{m-1}(m-2) + 1.$$

□

Теперь мы можем обобщить теорему 6.4 следующим образом.

Теорема 6.6. *$X_1, \dots, X_m$ односвязные CW-комплексы, а K – флаговый симплициальный комплекс с хордовым $\mathrm{sk}_1(K)$. Тогда отображение*

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \simeq \bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} (\Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k})^{\vee c(i_1, \ldots, i_k)} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$$

есть (с точностью до гомотопии) букет отображений

$$\bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} f_{i_1, \ldots, i_k}^{\vee c(i_1, \ldots, i_k)},$$

где

$$f_{i_1, \ldots, i_k} : \Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k} \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$$

есть итерированное обобщенное произведение Уайтхеда

$$[\mathrm{ev}_{r_{k-1}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-2}}, [\mathrm{ev}_{r_{k-3}}, \ldots [\mathrm{ev}_{r_2}, [\mathrm{ev}_{r_1}, \mathrm{ev}_j]] \ldots]]],$$

где $\{r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, j\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $r_1 < r_2 < \ldots < r_{k-1}$, $j > r_1$ и $j \neq r_l$ $\forall l$. При этом требуется, чтобы вершина j лежала в связной компоненте подкомплекса $K_{\{r_1, r_2, \ldots, r_{k-1}, j\}}$, не содержащей r_1, и была в ней максимальной вершиной.

Доказательство.
Естественность полиэдрального произведения дает нам следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \arrow[r] \arrow[d] & (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L \arrow[d] \\
(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K
\end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки есть отображение гомотопического слоя, а вертикальные индуцированы вложением симплициальных комплексов $L \hookrightarrow K$. Стрелка $(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \to (\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K$ есть ретракция, стягивающая некоторые из слагаемых длинного букета.

В формулировке теоремы мы взяли ровно столько итерированных обобщенных произведений Уайтхеда, сколько слагаемых в букете, представляющем $(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K$. Заметим, что каждое из указанных отображений поднимается на гомотопический слой

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega X_{i_1} \wedge \ldots \wedge \Omega X_{i_k} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \arrow[r] & (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K \arrow[r] & \prod_{i=1}^{m} X_i
\end{tikzcd}$$

Взяв букет таких поднятых отображений, мы получим морфизм

$$\bigvee_{k=2}^{m} \bigvee_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant m} (\Sigma\Omega X_{i_1}\wedge\ldots\wedge\Omega X_{i_k})^{\vee c(i_1,\ldots,i_k)} \to (\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K.$$

Ограничения на K в точности означают наличие правого гомотопического обратного (по следствию 6.7 из [5]) и мы получаем, что данный букет отображений является гомотопической эквивалентностью.

Выходит, что все остальные коммутаторы при ретракции отображаются в ноль, и действительно мы представили каждое слагаемое букета указанным каноническим итерированным обобщенным произведением Уайтхеда.

□

Пример 6.7. *Возьмем в качестве K симплициальный комплекс на 4 вершинах, где есть лишь ребра $1-2$ и $2-3$, т.е.*

$$K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{2,3\}\}.$$

Вложенный в него 0-мерный симплициальный комплекс L это, соответственно, $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

Геметрически L есть просто набор из 4 точек, а K – следующий граф.

$$\begin{tikzcd} 2\bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet 3 \\ 1\bullet & \bullet 4 \end{tikzcd}$$

По лемме 6.5 мы знаем, что с точностью до гомотопии отображение

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L$$

есть букет $(4-2)2^3+1 = 17$ итерированных обобщенных произведений Уайтхеда. Теорема 6.4 дает следующий список таких коммутаторов:

1) Длины 2:

$$[\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2], \quad [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3], \quad [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4], \quad [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_3], \quad [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_4], \quad [\mathrm{ev}_3, \mathrm{ev}_4].$$

2) Длины 3:

$$[\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2]], \quad [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3]], \quad [\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2]], \quad [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]],$$
$$[\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]], \quad [\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_3]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_4]].$$

3) Длины 4:

$$[\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2]]], \quad [\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3]]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]]].$$

Для комплекса K, в свою очередь, по теореме 6.6 отображение

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$$

с точностью до гомотопии есть букет следующих отображений:

1) Длины 2:

$$[\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3], \quad [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4], \quad [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_4], \quad [\mathrm{ev}_3, \mathrm{ev}_4].$$

2) Длины 3:

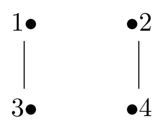
$$[\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]], \quad [\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_3]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_4]].$$

3) Длины 4:

$$[\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]]].$$

Пример 6.8. *Теперь возьмем комплекс на том же количестве вершин, но с другим* 1*-остовом. А именно, рассмотрим*

$$K = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}.$$



Так как 0*-остов данного комплекса совпадает с* 0*-остовом комплекса из прошлого примера, теорема 6.4 дает то же самое (с точностью до гомотопии) отображение*

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^L \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^L.$$

Однако теорема 6.6 утверждает, что отображение

$$(\underline{C\Omega X}, \underline{\Omega X})^K \to (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^K$$

с точностью до гомотопии есть букет уже других итерированных обобщеннных произведений Уайтхеда:

1) Длины 2:

$$[\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2], \quad [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4], \quad [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_3], \quad [\mathrm{ev}_3, \mathrm{ev}_4].$$

2) Длины 3:

$$[\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_2]], \quad [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]], \quad [\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]], \quad [\mathrm{ev}_4, [\mathrm{ev}_2, \mathrm{ev}_3]].$$

3) Длины 4:

$$[\mathrm{ev}_3, [\mathrm{ev}_2, [\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_4]]].$$

Список литературы

[1] P. J. Hilton. “On the homotopy groups of the union of spheres”. В: *Jour. London Math. Soc.* 30 (1955), с. 154—172.

[2] John Willard Milnor. “On the construction FK”. В: *Adams, John Frank, Algebraic topology—a student’s guide* (1972), с. 118—136.

[3] Gerald J. Porter. “A generalization of the Hilton-Milnor theorem”. В: *Bull. Amer. Math. Soc.* 71.2 (1965), с. 357—359.

[4] Gerald J. Porter. “The Homotopy Groups of Wedges of Suspensions”. В: *American Journal of Mathematics* 88.3 (1966), с. 655—663.

[5] Taras. E. Panov и Stephen Theriault. “The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes”. В: *Compositio Mathematica* 155 (2019), с. 206—228.

[6] Stephen Theriault. “The dual polyhedral product, cocategory and nilpotence”. В: *Advances in Mathematics* 340 (2018), с. 138—192.

[7] Victor M. Buchstaber и Taras. E. Panov. *Toric topology.* Mathematical Surveys and Monographs, 204. American Mathematical Society, 2015.

[8] Allen Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press, 2002.

[9] George W. Whitehead. *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1978.

[10] J.-P. Serre. *Lie Algebras and Lie Groups.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1992.

[11] Marshall Hall. *The Theory of Group.* AMS Chelsea Publishing, 1976.

[12] Graham Denham и Alexander I. Suciu. “Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products”. В: *Pure and Applied Mathematics Quarterly* 3.1 (2007), с. 25—60.

[13] Т. Е. Панов. *Записки лекций "Топология-1".* 2023.

[14] Martin Arthur Arkowitz. “Binary operations for homotopy groups with coefficients”. В: *Science China Mathematics* 61 (2018), с. 1543—1552.

[15] Martin Arthur Arkowitz. “The generalized Whitehead product”. В: *Pacific Journal of Mathematics* 12.1 (1962), с. 7—23.

[16] Hans Joachim Baues. *Commutator Calculus and Groups of Homotopy Classes.* London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1981.

[17] Т. Е. Панов и Я. А. Верёвкин. “Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера”. В: *Математический сборник* 207.11 (2016), с. 105—126.