Московский Государственный Университет
Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Алгебры Понтрягина момент-угол-комплексов, соответствующих многоугольникам

Выполнил:	Студент 303 гр Бабкин Дмитрий Николаевич
Научный руководитель:	д.ф.-м.н., профессор Т.Е. Панов

Содержание

1 Введение

В этой работе мы рассмотрим задачу описания алгебры Понтрягина (гомологий петель) момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ многоугольника. Набор образующих алгебры Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, известных как образующие GPTW, в случае, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс, был описан в [4]. Известно, что момент-угол комплекс m-угольника является связной суммой произведений сфер (см. [2]). Мы рассматриваем случай $m = 5, 6, 7$. Описывается единственное соотношение в алгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, на основе которого строится гомеоморфизм между связной суммой произведений сфер и момент-угол-комплексом $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, что предоставляет теоретико-гомотопическое доказательство этого факта.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Тарасу Евгеньевичу Панову за помощь, внимание и уделенное время.

2 Основные понятия и определения

Определение 2.1. Абстрактный симплинциальный комплекс на множестве $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $I \subset [m]$ таких, что если I принадлежит симплинциальному комплексу, то и любое подмножество $J \subset I$ ему принадлежит.

Пусть есть некоторое подмножество $J \subset [m]$. Определим полный подкомплекс на подмножестве J следующим образом: $\mathcal{K}_I = \{L \subset K : L \subset J\}$.

Введем кольцо граней построенное по нашему комплексу $\mathcal{K}$.

Определение 2.2. Кольцом Стенли-Райснера назовем следущее фактор кольцо кольца многочленов

$$k[\mathcal{K}] = k[v_1, v_2, .., v_m] \backslash (v_{i_1} * v_{i_2} * ... * v_{i_k}, \{i_1, i_2, .., i_k\} \notin \mathcal{K})$$

Определение 2.3. Момент-угол-комплекс, построенный по симплинциальному комплексу $\mathcal{K}$, - это пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} B_I$, $B_I = \{(z_1, ..., z_m) \subset \mathbb{D}^m : |z_i|^2 = 1$, если $i \notin I\}$.

Аналогично введем пространство Дэвиса-Янушкевича.

Определение 2.4. Пространство Дэвиса-Янушкевича, построенное по симплинциальному комплексу $\mathcal{K}$, - это пространство $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} T_I$,
$T_I = \{(x_1, ..., x_m) \subset (\mathbb{C}P^\infty)^m : |x_i| = pt$, если $i \notin I\}$.

Определение 2.5. Алгебра Понтрягина пространства X - это $H_*(\Omega X; k)$ алгебра гомологий пространства петель над X с произведением, индуцированным произведением петель.

$$H_*(\Omega X; k) \otimes H_*(\Omega X; k) \longrightarrow H_*(\Omega X \times \Omega X; k) \longrightarrow H_*(\Omega X; k)$$

Т.е. первая стрелка - это $\times-$произведение, вторая m_*, где $m : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$.

3 Подсчет колец когомологий

Для подсчета когомологий будем пользоваться DGA моделью коцепей

$$\mathcal{R}^*(\mathcal{K}) = \Lambda[u_1, .., u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}] \backslash (v_i^2 = v_i u_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant m)$$

Лемма 3.1 ([1, Lemma 4.5.1]). *Отображение* $g : \mathcal{R}^*(\mathcal{K}) \to \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$, $u_J v_I \mapsto \chi(J, I)$ *изоморфизм коцепных комплексов. Значит это отображение индуцирует изоморфизм*

$$H^*(\mathcal{R}^*(\mathcal{K})) \to H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$$

Несложными подсчетами получаем, что Когомологии Момент-угол-комплекса пятиугольника
$H^0(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = k$
$H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = k^5$
$H^4(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = k^5$
$H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = k$
Третьи гомологии порождаются элементами вида $[u_i v_{i+2}]$.
Четвертые гомологии порождаются элементами вида. $[u_i u_{i+1} v_{i+3}]$. Произведение класса третьих гомологий на класс четвертых гомологий нулевое если объединение индексов не дает $[5]$, иначе это образующая $H^7(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Нетрудно заметить, что кольцо $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = H^*((S^3 \times S^4)^{\#5})$.

4 Алгебра Понтрягина

4.1 Общие теоремы

Рассмотрим отображение вложения $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \longrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Момент-угол-комплекс является гомотопическим слоем этого отображения. Таким образом имеем гомотопичекое расслоение.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}} \longrightarrow (\mathbb{C}P^{\infty})^{m}$$

Применим функтор петель, а потом гомологий. Имеем:

Предложение 4.1 ([1, Proposition 8.4.1]). *Последовательность алгебр Понтрягина точна*

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};k) \longrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}};k) \longrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{m};k) \longrightarrow 0$$

для любого k коммутативного кольца с единицей.

Из книги [1] имеем описание алгебры посередине и описание образующих алгебры слева.

Теорема 4.2 ([1, Corollary 8.4.3]). *Пусть $\mathcal{K}$ симплинциальный флаговый комплекс, тогда*

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}};k) = T_k(u_1,...,u_m)\backslash(u_i^2 = 0, u_iu_j + u_ju_i = 0, i,j \in \mathcal{K}),$$

где k поле или $\mathbb{Z}$.

Теорема 4.3 (см. [4]). *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый и k — поле. Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};k)$, представленная как коммутаторная подалгебра через точную последовательность, мультипликативно порождена $\sum_{I\subset[m]} dim(\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_I))$ итерированными коммутаторами,*

$$[u_j,u_i],[u_{k_1},[u_j,u_i]],...,[u_{k_1},[u_{k2},[u_{k_{m-2}},[u_j,u_i]]]]$$

где $k_1 < k_2 < \ < k_p < j > i$, $k_s \neq i$ для любого s, и i наименьшая вершина компоненты связности, содержащая j, подкомплекса $\mathcal{K}_{k_1,\dots,k_p,j,i}$. Более того, это мультипликативно порождающее множество минимально, а коммутаторы образуют базис в подмодуле неразложимых элементов $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; k)$.

Нам надо описать соотношение в левой алгебре. Воспользуемся фактом из статьи, описывающим соотношение в терминах образующих u_i.

Теорема 4.4 ([5, Theorem 1.1]). *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный флаговый комплекс на множестве [m], k коммутативное кольцо. Для любого $J \subset [m]$, выберем порождающие первую группу гомологий 1-циклы*

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J} \lambda_{ij}^{(\alpha)}[\{i,j\}]$$

Тогда в алгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; k)$ с неразложимыми элементами типа GPTW выполнено соотношение.

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J} (-1)^(|J_{i<}|+|J_{j<}|)\lambda_{ij}^{(\alpha)} \sum_{[m]\setminus\{i,\}=A\sqcup B: max(A)>i, max(b)>j} (-1)^{\theta(A,B)+|A|}[c(A,u_i),c(B,u_{i+1})] = 0 \tag{4.1}$$

4.2 Случай 5 и 6 угольника

Теорема 4.5 (см. [6]). *Пусть $\mathcal{K}$ — граница пятиугольника.*

а) Существует гомотопическая эквивалентность $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq (S^3 \times S^4)^{\# 5}$.

б) $H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}; k)$ — алгебра с 10 образующими

$$a_1 = [u_3, u_1], a_2 = [u_4, u_1], a_3 = [u_4, u_2], a_4 = [u_5, u_2], a_5 = [u_5, u_3],$$

$$b_1 = [u_4, [u_5, u_2]], b_2 = [u_3, [u_5, u_2]], b_3 = [u_1, [u_5, u_3]], b_4 = [u_3, [u_4, u_1]], b_5 = [u_2, [u_4, u_1]]$$

которые удовлетворяют единственному соотношению

$$[a_1, b_1] - [a_2, b_2] + [a_3, b_3] - [a_4, b_4] + [a_5, b_5] = 0$$

где $deg(a_i) = 2$, $deg(b_i) = 3$, $[x, y] = x * y - (-1)^{deg(x)deg(y)} y * x$.

Доказательство Теоремы 4.5

Сначала выведем соотношение. Выпишем формулу 4.1 из теоремы 4.4 в случае многоугольника. В многоугольнике есть единственный подкомплекс с нетривиальными гомологиями - весь m-угольник. Запишем соотношение для соответствующего цикла.

$$\sum_{i=1}^{m-3} \sum_{[m]\setminus\{i,i+1\}=A\sqcup B: max(A)>i, max(b)>i+1} (-1)^{\theta(A,B)+|A|}[c(A, u_i), c(B, u_{i+1})] = 0$$

В случае 5 тождество выглядит следующим образом.

$$+[[u_3, u_1], [u_4, [u_5, u_2]]] - [[u_4, u_1], [u_3, [u_5, u_2]]] - [[u_3, [u_4, u_1]], [u_5, u_2]]$$

$$-[[u_4, u_2], [u_1, [u_5, u_3]]] - [[u_1, [u_4, u_2]], [u_5, u_3]] = 0$$

Запишем соотношение в термнинах GPTW и вынесем двойной коммутатор в каждом слагаемом вперед

$$+[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,u_2]]]-[[u_4,u_1],[u_3,[u_5,u_2]]]+[[u_5,u_2],[u_3,[u_4,u_1]]]$$

$$-[[u_4,u_2],[u_1,[u_5,u_3]]]-[[u_5,u_3],[u_2,[u_4,u_1]]]=0$$

Получим тождество из [1].

Рассмотрим отображение $f:(S^3\vee S^4)^{\vee 5}\longrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, заданное как букет отображений, соответствующих образующим $a_1,...,a_5$, $b_1,...,b_5$ из начала доказательства (подробнее см [6] Теорема 3.2). Так как имеет место соотношение, отображение f продолжается до отображения из связной суммы (которая отличается от букета одной 7-мерной клеткой), как показано в диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
(S^3\vee S^4)^{\vee 5} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \\
(S^3\times S^4)^{\# 5} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Отображение f^* индуцирует изоморфизм в гомологиях и поэтому является гомотопической эквивалентностью, так как все пространства односвязны.

Теорема доказана

Пользуясь тем же подходом и формулой из Теоремы 4.4 докажем гомотопическую эквивалентность уже для 6 и 7 угольника.

Теорема 4.6 (см. [6]). *Пусть $\mathcal{K}$ - граница шестиугольника.*

a)Существует гомотопическая эквивалентность.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^3\times S^5)^{\#9}\#(S^4\times S^4)^{\#8}$$

б) $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ *— алгебра с 34 образующими:*

$\alpha_1=[\mu_3,\mu_1],\alpha_2=[\mu_4,\mu_1],\alpha_3=[\mu_5,\mu_1],\alpha_4=[\mu_4,\mu_2],\alpha_5=[\mu_5,\mu_2],$

$\alpha_6=[\mu_6,\mu_2],\alpha_7=[\mu_5,\mu_3],\alpha_8=[\mu_6,\mu_3],\alpha_9=[\mu_6,\mu_4],$

$\beta_1=[\mu_1,[\mu_5,\mu_3]],\beta_2=[\mu_3,[\mu_5,\mu_1]],\beta_3=[\mu_3,[\mu_6,\mu_2]],\beta_4=[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]],$

$\beta_5=[\mu_1,[\mu_6,\mu_3]],\beta_6=[\mu_4,[\mu_6,\mu_3]],\beta_7=[\mu_5,[\mu_6,\mu_3]],\beta_8=[\mu_1,[\mu_6,\mu_4]],$

$\delta_1=[\mu_2,[\mu_6,\mu_4]],\delta_2=[\mu_4,[\mu_6,\mu_2]],\delta_3=[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]],\delta_4=[\mu_3,[\mu_4,\mu_1]],$

$\delta_5=[\mu_4,[\mu_5,\mu_2]],\delta_6=[\mu_2,[\mu_5,\mu_1]],\delta_7=[\mu_2,[\mu_4,\mu_1]],\delta_8=[\mu_3,[\mu_5,\mu_2]],$

$\gamma_1=[\mu_4,[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]]],\gamma_2=[\mu_3,[\mu_5,[\mu_6,\mu_2]]],\gamma_3=[\mu_3,[\mu_4,[\mu_6,\mu_2]]],$

$\gamma_4=[\mu_1,[\mu_5,[\mu_6,\mu_3]]],\gamma_5=[\mu_1,[\mu_4,[\mu_6,\mu_3]]],\gamma_6=[\mu_3,[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]]],$

$\gamma_7=[\mu_1,[\mu_2,[\mu_6,\mu_4]]],\gamma_8=[\mu_2,[\mu_4,[\mu_5,\mu_1]]],\gamma_9=[\mu_2,[\mu_3,[\mu_5,\mu_1]]]$

И соотношением

$$\sum_{i=1}^{9}[\alpha_i,\gamma_i^{'}]+\sum_{i=1}^{8}[\delta_i^{'},\beta_i]=0 \tag{4.2}$$

$\gamma_2^{'}=-\gamma_2,\ \gamma_4^{'}=-\gamma_4,\ \gamma_6^{'}=-\gamma_6,\ \gamma_7^{'}=[\alpha_2,\alpha_6]+\gamma_7,\ \gamma_8^{'}=[\alpha_2,\alpha_5]+[\alpha_4,\alpha_3]-\gamma_8,$ $\gamma_9^{'}=\gamma_9+[\alpha_5,\alpha_1],$

$\delta_1^{'}=\delta_1+\delta_2,\ \delta_3^{'}=-\delta_3,\ \delta_4^{'}=-\delta_4,\ \delta_5^{'}=-\delta_5,\ \delta_6^{'}=-\delta_6,$

остальные коммутаторы совпадают с исходными.

Доказательство Теоремы 4.6

Будем действовать по той же схеме, что и в случае пятиугольника.

Выпишем соотношение по формуле 4.1.

$+[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]]]-[[u_4,u_1],[u_3,[u_5,[u_6,u_2]]]]-[[u_3,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,u_2]]]+$ $[[u_5,u_1],[u_3,[u_4,[u_6,u_2]]]]+[[u_3,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,u_2]]]-[[u_4,[u_5,u_1]],[u_3,[u_6,u_2]]]+$

$[[u_3,[u_4,[u_5,u_1]]],[u_6,u_2]] - [[u_4,u_2],[u_1,[u_5,[u_6,u_3]]]] - [[u_1,[u_4,u_2]],[u_5,[u_6,u_3]]] +$
$[[u_5,u_2],[u_1,[u_4,[u_6,u_3]]]] + [[u_1,[u_5,u_2]],[u_4,[u_6,u_3]]] - [[u_4,[u_5,u_2]],[u_1,[u_6,u_3]]] +$
$[[u_1,[u_4,[u_5,u_2]]],[u_6,u_3]] + [[u_4,[u_6,u_2]],[u_1,[u_5,u_3]]] - [[u_1,[u_4,[u_6,u_2]]],[u_5,u_3]] +$
$[[u_5,u_3],[u_1,[u_2,[u_6,u_4]]]] + [[u_1,[u_5,u_3]],[u_2,[u_6,u_4]]] - [[u_2,[u_5,u_3]],[u_1,[u_6,u_4]]] +$
$[[u_1,[u_2,[u_5,u_3]]],[u_6,u_4]] = 0$

Заметим, что в случае $n = 6$ для нашего соотношения, выраженного в терминах оразующих u_i алгебры Понтрягина пространства Дэвиса-Янушкевича, встречаются коммутаторы, которые напрямую не являются образующими GPTW из алгебры Понтрягина момент-угол-комплекса. Для того, чтобы получить соотношение в алгебре их надо выразить через GPTW пользуясь градуированными антикоммутативностью и тождеством Якоби.

(1)$-[[u_1,[u_4,u_2]],[u_5,[u_6,u_3]]] = +[[u_2,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,u_3]]]$

(2)$+[[u_1,[u_5,u_2]],[u_4,[u_6,u_3]]] = -[[u_2,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,u_3]]]$

(3)$+[[u_1,[u_4,[u_5,u_2]]],[u_6,u_3]] = +[[u_1,[u_4,[u_5,u_2]]],[u_6,u_3]] = +[[[u_1,u_4],[u_5,u_2]],[u_6,u_3]]-$
$[[u_4,[u_1,[u_5,u_2]]],[u_6,u_3]] = +[[[u_1,u_4],[u_5,u_2]],[u_6,u_3]]+[[u_4,[u_2,[u_5,u_1]]],[u_6,u_3]] =$
$+[[[u_1,u_4],[u_5,u_2]],[u_6,u_3]]+[[u_4,[u_2,[u_5,u_1]]],[u_6,u_3]] = +[[[u_4,u_1],[u_5,u_2]],[u_6,u_3]]+$
$[[[u_4,u_2],[u_5,u_1]],[u_6,u_3]] - [[u_2,[u_4,[u_5,u_1]]],[u_6,u_3]]$

(4)$-[[u_1,[u_4,[u_6,u_2]]],[u_5,u_3]] = -[[[u_4,u_1],[u_6,u_2]],[u_5,u_3]]$

(5)$-[[u_2,[u_5,u_3]],[u_1,[u_6,u_4]]] = [[u_3,[u_5,u_2]],[u_1,[u_6,u_4]]]$

(6)$+[[u_1,[u_2,[u_5,u_3]]],[u_6,u_4]] = -[[u_2,[u_1,[u_5,u_3]]],[u_6,u_4]] = +[[u_2,[u_3,[u_5,u_1]]],[u_6,u_4]]+$
$[[u_2,[u_5,[u_3,u_1]]],[u_6,u_4]] = +[[u_2,[u_3,[u_5,u_1]]],[u_6,u_4]] + [[[u_5,u_2],[u_3,u_1]]],[u_6,u_4]]$

Подставляя все это в исходное тождество получим

$+[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]]] - [[u_4,u_1],[u_3,[u_5,[u_6,u_2]]]] - [[u_3,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,u_2]]] +$
$[[u_5,u_1],[u_3,[u_4,[u_6,u_2]]]] + [[u_3,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,u_2]]] - [[u_4,[u_5,u_1]],[u_3,[u_6,u_2]]] +$
$[[u_3,[u_4,[u_5,u_1]]],[u_6,u_2]] - [[u_4,u_2],[u_1,[u_5,[u_6,u_3]]]] + [[u_2,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,u_3]]] +$

$[[u_5, u_2], [u_1, [u_4, [u_6, u_3]]]] - [[u_2, [u_5, u_1]], [u_4, [u_6, u_3]]] - [[u_4, [u_5, u_2]], [u_1, [u_6, u_3]]] +$
$[[[u_4, u_1], [u_5, u_2]], [u_6, u_3]] + [[[u_4, u_2], [u_5, u_1]], [u_6, u_3]] - [[u_2, [u_4, [u_5, u_1]]], [u_6, u_3]] +$
$[[u_4, [u_6, u_2]], [u_1, [u_5, u_3]]] - [[[u_4, u_1], [u_6, u_2]], [u_5, u_3]] + [[u_5, u_3], [u_1, [u_2, [u_6, u_4]]]] +$
$[[u_1, [u_5, u_3]], [u_2, [u_6, u_4]]] - [[u_2, [u_5, u_3]], [u_1, [u_6, u_4]]] + [[u_2, [u_3, [u_5, u_1]]], [u_6, u_4]] +$
$[[[u_5, u_2], [u_3, u_1]]], [u_6, u_4]] = 0$

Сгруппируем слагаемые слудующим образом

$+[[u_3, u_1], [u_4, [u_5, [u_6, u_2]]]] - [[u_4, u_1], [u_3, [u_5, [u_6, u_2]]]] + [[u_5, u_1], [u_3, [u_4, [u_6, u_2]]]] -$
$[[u_6, u_2], [u_3, [u_4, [u_5, u_1]]]] - [[u_4, u_2], [u_1, [u_5, [u_6, u_3]]]] + [[u_5, u_2], [u_1, [u_4, [u_6, u_3]]]] +$
$([[[u_4, u_1], [u_5, u_2]], [u_6, u_3]] + [[[u_4, u_2], [u_5, u_1]], [u_6, u_3]] - [[u_2, [u_4, [u_5, u_1]]], [u_6, u_3]]) +$
$([[u_5, u_3], [[u_4, u_1], [u_6, u_2]]] + [[u_5, u_3], [u_1, [u_2, [u_6, u_4]]]]) + ([[u_2, [u_3, [u_5, u_1]]], [u_6, u_4]] +$
$[[[u_5, u_2], [u_3, u_1]], [u_6, u_4]]) - [[u_3, [u_4, u_1]], [u_5, [u_6, u_2]]] + [[u_3, [u_5, u_1]], [u_4, [u_6, u_2]]] -$
$[[u_4, [u_5, u_1]], [u_3, [u_6, u_2]]] + [[u_2, [u_4, u_1]], [u_5, [u_6, u_3]]] - [[u_2, [u_5, u_1]], [u_4, [u_6, u_3]]] -$
$[[u_4, [u_5, u_2]], [u_1, [u_6, u_3]]] + (-[[u_1, [u_5, u_3]], [u_4, [u_6, u_2]]] + [[u_1, [u_5, u_3]], [u_2, [u_6, u_4]]]) -$
$[[u_2, [u_5, u_3]], [u_1, [u_6, u_4]]] = 0$

Данная сумма 4.2 итерированных коммутаторов задает приклеивающее отображение клетки наибольшей размерности как в предыдущей теореме. Значит пользуясь предыдущей схемой будем рассматривать отображение из соответствующего букета, заданного этим соотношением.

$$\begin{tikzcd}
(S^3 \vee S^5)^{\vee 9} \vee (S^4 \vee S^4)^{\vee 8} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \\
(S^3 \times S^5)^{\# 9} \# (S^4 \times S^4)^{\# 8} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

Это отображение продолжается с букета на весь момент-угол-комплекс и индуцирует изоморфизм в гомологиях. Так как все пространства односвязны это гомотопическая эквивалентность по теореме Уайтхеда.

Теорема доказана.

4.3 Случай семиугольника

Теорема 4.7. *Пусть $\mathcal{K}$ - граница семигольника.*

а)Существует гомотопическая эквивалентность.

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (S^3 \times S^6)^{\#14} \# (S^5 \times S^4)^{\#35}$$

б)$H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ - алгебра с образующими

$\alpha_1 = [u_3, u_1], \alpha_2 = [u_4, u_1], \alpha_3 = [u_5, u_1], \alpha_4 = [u_6, u_1], \alpha_5 = [u_7, u_2],$

$\alpha_6 = [u_4, u_2], \alpha_7 = [u_5, u_2], \alpha_8 = [u_6, u_2], \alpha_9 = [u_7, u_3], \alpha_{10} = [u_6, u_3],$

$\alpha_{11} = [u_5, u_3], \alpha_{12} = [u_6, u_4], \alpha_{13} = [u_7, u_4], \alpha_{14} = [u_7, u_5]$

$\beta_1 = [u_2, [u_4, u_1]], \beta_2 = [u_3, [u_4, u_1]], \beta_3 = [u_2, [u_5, u_1]], \beta_4 = [u_3, [u_5, u_1]],$

$\beta_5 = [u_1, [u_5, u_3]], \beta_6 = [u_3, [u_5, u_2]], \beta_7 = [u_4, [u_5, u_1]], \beta_8 = [u_4, [u_5, u_2]],$

$\beta_9 = [u_2, [u_6, u_1]], \beta_{10} = [u_1, [u_6, u_3]], \beta_{11} = [u_3, [u_6, u_1]], \beta_{12} = [u_3, [u_6, u_2]],$

$\beta_{13} = [u_1, [u_6, u_4]], \beta_{14} = [u_4, [u_6, u_1]], \beta_{15} = [u_4, [u_6, u_2]], \beta_{16} = [u_2, [u_6, u_4]],$

$\beta_{17} = [u_4, [u_6, u_3]], \beta_{18} = [u_5, [u_6, u_1]], \beta_{19} = [u_5, [u_6, u_2]], \beta_{20} = [u_5, [u_6, u_3]],$

$\beta_{21} = [u_1, [u_7, u_3]], \beta_{22} = [u_3, [u_7, u_2]], \beta_{23} = [u_1, [u_7, u_4]], \beta_{24} = [u_4, [u_7, u_2]],$

$\beta_{25} = [u_2, [u_7, u_4]], \beta_{26} = [u_4, [u_7, u_3]], \beta_{27} = [u_1, [u_7, u_5]], \beta_{28} = [u_2, [u_7, u_5]],$

$\beta_{29} = [u_5, [u_7, u_2]], \beta_{30} = [u_5, [u_7, u_3]], \beta_{31} = [u_3, [u_7, u_5]], \beta_{32} = [u_5, [u_7, u_4]],$

$\beta_{33} = [u_6, [u_7, u_2]], \beta_{34} = [u_6, [u_7, u_3]], \beta_{35} = [u_6, [u_7, u_4]],$

$\gamma_1 = [u_5, [u_6, [u_7, u_3]]], \gamma_2 = [u_5, [u_6, [u_7, u_2]]], \gamma_3 = [u_4, [u_6, [u_7, u_3]]], \gamma_4 = [u_4, [u_6, [u_7, u_2]]],$

$\gamma_5 = [u_2, [u_6, [u_7, u_4]]], \gamma_6 = [u_1, [u_6, [u_7, u_4]]], \gamma_7 = [u_3, [u_6, [u_7, u_2]]], \gamma_8 = [u_1, [u_6, [u_7, u_3]]],$

$\gamma_9 = [u_4, [u_5, [u_7, u_3]]], \gamma_{10} = [u_2, [u_5, [u_7, u_4]]], \gamma_{11} = [u_4, [u_5, [u_7, u_2]]], \gamma_{12} = [u_1, [u_5, [u_7, u_4]]],$

$\gamma_{13} = [u_2, [u_3, [u_7, u_5]]], \gamma_{14} = [u_3, [u_5, [u_7, u_2]]], \gamma_{15} = [u_1, [u_5, [u_7, u_3]]], \gamma_{16} = [u_1, [u_3, [u_7, u_5]]],$

$\gamma_{17} = [u_1, [u_2, [u_7, u_5]]], \gamma_{18} = [u_3, [u_4, [u_7, u_2]]], \gamma_{19} = [u_1, [u_4, [u_7, u_3]]], \gamma_{20} = [u_1, [u_2, [u_7, u_4]]],$

$\gamma_{21} = [u_4, [u_5, [u_6, u_2]]], \gamma_{22} = [u_4, [u_5, [u_6, u_1]]], \gamma_{23} = [u_3, [u_5, [u_6, u_2]]], \gamma_{24} = [u_3, [u_5, [u_6, u_1]]],$

$\gamma_{25} = [u_1, [u_5, [u_6, u_3]]], \gamma_{26} = [u_2, [u_5, [u_6, u_1]]], \gamma_{27} = [u_3, [u_4, [u_6, u_2]]], \gamma_{28} = [u_1, [u_4, [u_6, u_3]]],$

$\gamma_{29} = [u_3, [u_4, [u_6, u_1]]], \gamma_{30} = [u_1, [u_2, [u_6, u_4]]], \gamma_{31} = [u_2, [u_4, [u_6, u_1]]], \gamma_{32} = [u_2, [u_3, [u_6, u_1]]],$

$\gamma_{33} = [u_3, [u_4, [u_5, u_1]]], \gamma_{34} = [u_2, [u_4, [u_5, u_1]]], \gamma_{35} = [u_2, [u_3, [u_5, u_1]]],$

$\delta_1 = [u_4, [u_5, [u_6, [u_7, u_2]]]], \delta_2 = [u_3, [u_5, [u_6, [u_7, u_2]]]], \delta_3 = [u_3, [u_4, [u_6, [u_7, u_2]]]],$

$\delta_4 = [u_3, [u_4, [u_5, [u_7, u_2]]]], \delta_5 = [u_3, [u_4, [u_5, [u_6, u_1]]]], \delta_6 = [u_1, [u_5, [u_6, [u_7, u_3]]]],$

$\delta_7 = [u_1, [u_4, [u_6, [u_7, u_3]]]], \delta_8 = [u_1, [u_4, [u_5, [u_7, u_3]]]], \delta_9 = [u_2, [u_4, [u_5, [u_6, u_1]]]],$

$\delta_{10} = [u_1, [u_2, [u_5, [u_7, u_4]]]], \delta_{11} = [u_1, [u_2, [u_6, [u_7, u_4]]]], \delta_{12} = [u_1, [u_2, [u_3, [u_7, u_5]]]],$

$\delta_{13} = [u_2, [u_3, [u_5, [u_6, u_1]]]], \delta_{14} = [u_2, [u_3, [u_4, [u_6, u_1]]]],$

и соотношением

$$\sum_{i=1}^{14} [\alpha_i, \delta_i^{'}] + \sum_{i=1}^{35} [\beta_i, \gamma_i^{'}] = 0 \tag{4.3}$$

$\delta_2^{'} = -\delta_2,\ \delta_4^{'} = -\delta_4,$

$\delta_5^{'} = \delta_5 - [\beta_{13}, \alpha_{11}] + [\beta_5, \alpha_{12}],$

$\delta_6^{'} = -\delta_6,\ \delta_8^{'} = -\delta_8,$

$\delta_9^{'} = [\alpha_2, \beta_{19}] - [\beta_7, \alpha_8] - [\alpha_3, \beta_{15}] - [\beta_8, \alpha_4] - [\alpha_7, \beta_{14}] + [\alpha_6, \beta_{18}] - \delta_9,$

$\delta_{10}^{'} = -[\alpha_2, \beta_{29}] + [\beta_7, \alpha_5] + [\alpha_3, \beta_{24}] - \delta_{10},\ \delta_{11}^{'} = -[\alpha_2, \beta_{29}] + [\beta_7, \alpha_5] + [\alpha_3, \beta_{24}] - \delta_{10},$

$\delta_{12}^{'} = [\beta_3, \alpha_9] + [\alpha_3, \beta_{22}] - [\alpha_7, \beta_{21}] - [\beta_{29}, \alpha_1] + [\alpha_5, \beta_5] + [\alpha_5, \beta_4] - \delta_{12}$

$\delta_{13}^{'} = -[\beta_3, \alpha_{10}] + [\alpha_3, \beta_{12}] + [\beta_6, \alpha_4] - [\alpha_{11}, \beta_9] + \delta_{13} + [\alpha_7, \beta_{10}] + [\alpha_7, \beta_{11}] + [\beta_{19}, \alpha_1] + [\alpha_8, \beta_5] + [\alpha_8, \beta_4]$

$\delta_{14}^{'} = -[\alpha_1, \beta_{16}] - \delta_{14} + [\beta_{12}, \alpha_2] - [\alpha_{10}, \beta_1] + [\alpha_8, \beta_2] - [\beta_{16}, \alpha_1] - [\beta_{15}, \alpha_1] - [\alpha_6, \beta_{10}] - [\alpha_6, \beta_{11}]$

$\gamma_2^{'} = -\gamma_2,\ \gamma_3^{'} = -\gamma_3,\ \gamma_7^{'} = -\gamma_7,\ \gamma_8^{'} = -\gamma_8,$

$\gamma_{10}^{'} = -\gamma_{11} - \gamma_{10},$

$\gamma_{11}^{'} = -\gamma_{11} - \gamma_{12},$

$\gamma_{13}^{'} = -[\alpha_7, \alpha_9] - [\alpha_{11}, \alpha_5] + \gamma_{14},$

$\gamma_{16}^{'} = \gamma_{15} + \gamma_{16},$

$\gamma_{17}^{'} = \gamma_{17} + [\alpha_3, \alpha_5],$

$\gamma_{18}^{'} = -\gamma_{18},\ \gamma_{19}^{'} = -\gamma_{19},$

$\gamma_{20}^{'} = -\gamma_{20} - [\alpha_2, \alpha_5],$

$\gamma_{23}^{'} = [\alpha_7, \alpha_{10}] + [\alpha_{11}, \alpha_{18}] - \gamma_{23},$

$\gamma_{24}^{'} = -\gamma_{24} - \gamma_{25},$

$\gamma_{25}^{'} = -\gamma_{25},$

$\gamma_{26}^{'} = -[\alpha_3, \alpha_8] + \gamma_{26} - [\alpha_7, \alpha_4],$

$\gamma_{27}^{'} = \gamma_{27} + [\alpha_{10}, \alpha_6],$

$\gamma_{30}^{'} = [\alpha_2, \alpha_8] + [\alpha_2, \alpha_4],$

$\gamma_{32}^{'} = \gamma_{32} + [\alpha_8, \alpha_1],$

$\gamma_{33}^{'} = -\gamma_{33},$

$\gamma_{34}^{'} = -[\alpha_2, \alpha_7] - [\alpha_6, \alpha_3] + \gamma_{34},$

$\gamma_{35}^{'} = -\gamma_{35} - [\alpha_7, \alpha_1],$

остальные коммутаторы совпадают с исходными.

Доказательство Теоремы 4.7

Схема аналогична доказательству для 7-угольника. Выпишем тождество 4.1 для 6-угольника. Для этого используем программу [3].

$[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,[u_6,[u_7,u_2]]]]] - [[u_4,u_1],[u_3,[u_5,[u_6,[u_7,u_2]]]]] - [[u_3,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,[u_7,u_2]]]] +$
$[[u_5,u_1],[u_3,[u_4,[u_6,[u_7,u_2]]]]] + [[u_3,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,[u_7,u_2]]]] - [[u_4,[u_5,u_1]],[u_3,[u_6,[u_7,u_2]]]] +$
$[[u_3,[u_4,[u_5,u_1]]],[u_6,[u_7,u_2]]] - [[u_6,u_1],[u_3,[u_4,[u_5,[u_7,u_2]]]]] - [[u_3,[u_6,u_1]],[u_4,[u_5,[u_7,u_2]]]] +$
$[[u_4,[u_6,u_1]],[u_3,[u_5,[u_7,u_2]]]] - [[u_3,[u_4,[u_6,u_1]]],[u_5,[u_7,u_2]]] - [[u_5,[u_6,u_1]],[u_3,[u_4,[u_7,u_2]]]] +$
$[[u_3,[u_5,[u_6,u_1]]],[u_4,[u_7,u_2]]] - [[u_4,[u_5,[u_6,u_1]]],[u_3,[u_7,u_2]]] - [[u_3,[u_4,[u_5,[u_6,u_1]]]],[u_7,u_2]] -$

$[[u_4,u_2],[u_1,[u_5,[u_6,[u_7,u_3]]]]]-[[u_1,[u_4,u_2]],[u_5,[u_6,[u_7,u_3]]]]+[[u_5,u_2],[u_1,[u_4,[u_6,[u_7,u_3]]]]]+$
$[[u_1,[u_5,u_2]],[u_4,[u_6,[u_7,u_3]]]]-[[u_4,[u_5,u_2]],[u_1,[u_6,[u_7,u_3]]]]+[[u_1,[u_4,[u_5,u_2]]],[u_6,[u_7,u_3]]]-$
$[[u_6,u_2],[u_1,[u_4,[u_5,[u_7,u_3]]]]]-[[u_1,[u_6,u_2]],[u_4,[u_5,[u_7,u_3]]]]+[[u_4,[u_6,u_2]],[u_1,[u_5,[u_7,u_3]]]]-$
$[[u_1,[u_4,[u_6,u_2]]],[u_5,[u_7,u_3]]]-[[u_5,[u_6,u_2]],[u_1,[u_4,[u_7,u_3]]]]+[[u_1,[u_5,[u_6,u_2]]],[u_4,[u_7,u_3]]]-$
$[[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]],[u_1,[u_7,u_3]]]-[[u_1,[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]]],[u_7,u_3]]+[[u_7,u_2],[u_1,[u_4,[u_5,[u_6,u_3]]]]]-$
$[[u_4,[u_7,u_2]],[u_1,[u_5,[u_6,u_3]]]]+[[u_1,[u_4,[u_7,u_2]]],[u_5,[u_6,u_3]]]+[[u_5,[u_7,u_2]],[u_1,[u_4,[u_6,u_3]]]]-$
$[[u_1,[u_5,[u_7,u_2]]],[u_4,[u_6,u_3]]]+[[u_4,[u_5,[u_7,u_2]]],[u_1,[u_6,u_3]]]+[[u_1,[u_4,[u_5,[u_7,u_2]]]],[u_6,u_3]]-$
$[[u_4,[u_6,[u_7,u_2]]],[u_1,[u_5,u_3]]]-[[u_1,[u_4,[u_6,[u_7,u_2]]]],[u_5,u_3]]+[[u_5,u_3],[u_1,[u_2,[u_6,[u_7,u_4]]]]]+$
$[[u_1,[u_5,u_3]],[u_2,[u_6,[u_7,u_4]]]]-[[u_2,[u_5,u_3]],[u_1,[u_6,[u_7,u_4]]]]+[[u_1,[u_2,[u_5,u_3]]],[u_6,[u_7,u_4]]]-$
$[[u_6,u_3],[u_1,[u_2,[u_5,[u_7,u_4]]]]]-[[u_1,[u_6,u_3]],[u_2,[u_5,[u_7,u_4]]]]+[[u_2,[u_6,u_3]],[u_1,[u_5,[u_7,u_4]]]]-$
$[[u_1,[u_2,[u_6,u_3]]],[u_5,[u_7,u_4]]]-[[u_5,[u_6,u_3]],[u_1,[u_2,[u_7,u_4]]]]+[[u_1,[u_5,[u_6,u_3]]],[u_2,[u_7,u_4]]]-$
$[[u_2,[u_5,[u_6,u_3]]],[u_1,[u_7,u_4]]]-[[u_1,[u_2,[u_5,[u_6,u_3]]]],[u_7,u_4]]+[[u_5,[u_7,u_3]],[u_1,[u_2,[u_6,u_4]]]]-$
$[[u_1,[u_5,[u_7,u_3]]],[u_2,[u_6,u_4]]]+[[u_2,[u_5,[u_7,u_3]]],[u_1,[u_6,u_4]]]+[[u_1,[u_2,[u_5,[u_7,u_3]]]],[u_6,u_4]]-$
$[[u_6,u_4],[u_1,[u_2,[u_3,[u_7,u_5]]]]]-[[u_1,[u_6,u_4]],[u_2,[u_3,[u_7,u_5]]]]+[[u_2,[u_6,u_4]],[u_1,[u_3,[u_7,u_5]]]]-$
$[[u_1,[u_2,[u_6,u_4]]],[u_3,[u_7,u_5]]]-[[u_3,[u_6,u_4]],[u_1,[u_2,[u_7,u_5]]]]+[[u_1,[u_3,[u_6,u_4]]],[u_2,[u_7,u_5]]]-$
$[[u_2,[u_3,[u_6,u_4]]],[u_1,[u_7,u_5]]]-[[u_1,[u_2,[u_3,[u_6,u_4]]]],[u_7,u_5]]=0$ (2)

В выписанной сумме подобно случаю 6-угольника встречаются элементы, которые надо раскладывать в Лиевские многочлены от мультипликативных образующих GPTW.

(1) $-[[u_1,[u_4,u_2]],[u_5,[u_6,[u_7,u_3]]]]=+[[u_2,[u_4,u_1]],[u_5,[u_6,[u_7,u_3]]]]$

(2) $+[[u_1,[u_5,u_2]],[u_4,[u_6,[u_7,u_3]]]]=-[[u_2,[u_5,u_1]],[u_4,[u_6,[u_7,u_3]]]]$

(3) $+[[u_1,[u_4,[u_5,u_2]]],[u_6,[u_7,u_3]]]=[[[[u_4,u_1],[u_5,u_2]],[u_6,[u_7,u_3]]]+$
$+[[[u_4,u_2],[u_5,u_1]]],[u_6,[u_7,u_3]]]-[[u_2,[u_4,[u_5,u_1]]],[u_6,[u_7,u_3]]]$

(4) $-[[u_1,[u_6,u_2]],[u_4,[u_5,[u_7,u_3]]]]=+[[u_2,[u_6,u_1]],[u_4,[u_5,[u_7,u_3]]]]$

$(5) - [[u_1,[u_4,[u_6,u_2]]],[u_5,[u_7,u_3]]] = -[[[u_4,u_1],[u_6,u_2]],[u_5,[u_7,u_3]]]-$

$-[[[u_4,u_2],[u_6,u_1]],[u_5,[u_7,u_3]]] + [[u_2,[u_4,[u_6,u_1]]],[u_5,[u_7,u_3]]]$

$(6) + [[u_1,[u_5,[u_6,u_2]]],[u_4,[u_7,u_3]]] = +[[[u_5,u_1],[u_6,u_2]],[u_4,[u_7,u_3]]]-$

$-[[u_2,[u_5,[u_6,u_1]]],[u_4,[u_7,u_3]]] + [[[u_5,u_2],[u_6,u_1]],[u_4,[u_7,u_3]]]$

$(7) - [[u_1,[u_4,[u_5,[u_6,u_2]]]],[u_7,u_3]] = -[[[u_4,u_1],[u_5,[u_6,u_2]]],[u_7,u_3]]+$

$+[[u_4,[u_5,u_1]],[u_6,u_2]],[u_7,u_3]] + [[[u_5,u_1],[u_4,[u_6,u_2]]],[u_7,u_3]]+$

$+[[u_4,[u_5,u_2]],[u_6,u_1]],[u_7,u_3]] + [[[u_5,u_2],[u_4,[u_6,u_1]]],[u_7,u_3]]-$

$-[[[u_4,u_2],[u_5,[u_6,u_1]]]],[u_7,u_3]] + [[u_2,[u_4,[u_5,[u_6,u_1]]]],[u_7,u_3]]$

$(8) + [[u_7,u_2],[u_1,[u_4,[u_5,[u_6,u_3]]]]] = -[[u_7,u_2],[[u_1,[u_6,u_4]],[u_5,u_3]]]-$

$-[[u_7,u_2],[[u_6,u_4],[u_1,[u_5,u_3]]]]$

$(9) + [[u_1,[u_4,[u_7,u_2]]],[u_5,[u_6,u_3]]] = +[[[u_4,u_1],[u_7,u_2]],[u_5,[u_6,u_3]]]$

$(10) - [[u_1,[u_5,[u_7,u_2]]],[u_4,[u_6,u_3]]] = -[[[u_5,u_1],[u_7,u_2]],[u_4,[u_6,u_3]]]$

$(11) + [[u_1,[u_4,[u_5,[u_7,u_2]]]],[u_6,u_3]] = +[[[u_4,u_1],[u_5,[u_7,u_2]]],[u_6,u_3]]-$

$-[[[u_4,[u_5,u_1]],[u_7,u_2]],[u_6,u_3]] - [[[u_5,u_1],[u_4,[u_7,u_2]]],[u_6,u_3]]$

$(12) - [[u_1,[u_4,[u_6,[u_7,u_2]]]],[u_5,u_3]] = -[[[u_4,u_1],[u_6,[u_7,u_2]]],[u_5,u_3]]+$

$+[[[u_4,[u_6,u_1]],[u_7,u_2]],[u_5,u_3]] + [[[u_6,u_1],[u_4,[u_7,u_2]]],[u_5,u_3]]$

$(13) - [[u_2,[u_5,u_3]],[u_1,[u_6,[u_7,u_4]]]] = +[[u_3,[u_5,u_2]],[u_1,[u_6,[u_7,u_4]]]]$

$(14) + [[u_1,[u_2,[u_5,u_3]]],[u_6,[u_7,u_4]]] = +[[u_2,[u_3,[u_5,u_1]]],[u_6,[u_7,u_4]]]+$

$+[[[u_5,u_2],[u_3,u_1]],[u_6,[u_7,u_4]]]$

$(15) + [[u_2,[u_6,u_3]],[u_1,[u_5,[u_7,u_4]]]] = -[[u_3,[u_6,u_2]],[u_1,[u_5,[u_7,u_4]]]]$

$(16) - [[u_1,[u_2,[u_6,u_3]]],[u_5,[u_7,u_4]]] = -[[u_2,[u_3,[u_6,u_1]]],[u_5,[u_7,u_4]]]-$

$-[[[u_6,u_2],[u_3,u_1]],[u_5,[u_7,u_4]]]$

$(17) - [[u_2,[u_5,[u_6,u_3]]],[u_1,[u_7,u_4]]] = -[[[u_5,u_2],[u_6,u_3]],[u_1,[u_7,u_4]]]-$

$-[[[u_5,u_3],[u_6,u_2]],[u_1,[u_7,u_4]]] + [[u_3,[u_5,[u_6,u_2]]],[u_1,[u_7,u_4]]]$

$(18) - [[u_1,[u_2,[u_5,[u_6,u_3]]]],[u_7,u_4]] = +[[[u_2,[u_5,u_1]],[u_6,u_3]],[u_7,u_4]]-$

$-[[[u_5,u_1],[u_3,[u_6,u_2]]],[u_7,u_4]]-[[[u_3,[u_5,u_2]],[u_6,u_1]],[u_7,u_4]]+$

$+[[[u_5,u_3],[u_2,[u_6,u_1]]],[u_7,u_4]]-[[u_2,[u_3,[u_5,[u_6,u_1]]]],[u_7,u_4]]-$

$-[[[u_5,u_2],[u_1,[u_6,u_3]]],[u_7,u_4]]-[[[u_5,u_2],[u_3,[u_6,u_1]]],[u_7,u_4]]-$

$-[[[u_5,[u_6,u_2]],[u_3,u_1]],[u_7,u_4]]-[[[u_6,u_2],[u_1,[u_5,u_3]]],[u_7,u_4]]-$

$-[[[u_6,u_2],[u_3,[u_5,u_1]]],[u_7,u_4]]$

(19) $+[[u_2,[u_5,[u_7,u_3]]],[u_1,[u_6,u_4]]]=+[[[u_5,u_2],[u_7,u_3]],[u_1,[u_6,u_4]]]+$

$+[[[u_5,u_3],[u_7,u_2]],[u_1,[u_6,u_4]]]-[[u_3,[u_5,[u_7,u_2]]],[u_1,[u_6,u_4]]]$

(20) $+[[u_1,[u_2,[u_5,[u_7,u_3]]]],[u_6,u_4]]=-[[[u_2,[u_5,u_1]],[u_7,u_3]],[u_6,u_4]]-$

$-[[[u_5,u_1],[u_3,[u_7,u_2]]],[u_6,u_4]]+[[[u_5,u_2],[u_1,[u_7,u_3]]],[u_6,u_4]]+$

$+[[[u_5,[u_7,u_2]],[u_3,u_1]],[u_6,u_4]]-[[[u_7,u_2],[u_1,[u_5,u_3]]],[u_6,u_4]]-$

$-[[[u_7,u_2],[u_3,[u_5,u_1]]],[u_6,u_4]]$

(21) $-[[u_3,[u_6,u_4]],[u_1,[u_2,[u_7,u_5]]]]=+[[u_4,[u_6,u_3]],[u_1,[u_2,[u_7,u_5]]]]$

(22) $+[[u_1,[u_3,[u_6,u_4]]],[u_2,[u_7,u_5]]]=-[[u_1,[u_4,[u_6,u_3]]],[u_2,[u_7,u_5]]]$

(23) $-[[u_2,[u_3,[u_6,u_4]]],[u_1,[u_7,u_5]]]=-[[u_3,[u_4,[u_6,u_2]]],[u_1,[u_7,u_5]]]-$

$-[[[u_6,u_3],[u_4,u_2]],[u_1,[u_7,u_5]]]$

(24) $-[[u_1,[u_2,[u_3,[u_6,u_4]]]],[u_7,u_5]]=+[[[u_3,u_1],[u_2,[u_6,u_4]]],[u_7,u_5]]+$

$+[[u_2,[u_3,[u_4,[u_6,u_1]]]],[u_7,u_5]]-[[[u_3,[u_6,u_2]],[u_4,u_1]],[u_7,u_5]]+$

$+[[[u_6,u_3],[u_2,[u_4,u_1]]],[u_7,u_5]]-[[[u_6,u_2],[u_3,[u_4,u_1]]],[u_7,u_5]]+$

$+[[[u_2,[u_6,u_4]],[u_3,u_1]],[u_7,u_5]]+[[[u_4,[u_6,u_2]],[u_3,u_1]],[u_7,u_5]]+$

$+[[[u_4,u_2],[u_1,[u_6,u_3]]],[u_7,u_5]]+[[[u_4,u_2],[u_3,[u_6,u_1]]],[u_7,u_5]]$

Подставим выражения в исходную формулу и сгруппируем слагаемые. Получим соотношение 4.3. Данная сумма 4.3 итерированных коммутаторов задает приклеивающее отображение клетки наибольшей размерности как в предыдущей теореме. Значит пользуясь той же схемой будем рассматривать отображение из соответствующего букета, заданного этим соотношением.

$$
\begin{tikzcd}
(S^3 \vee S^6)^{\vee 14} \vee (S^5 \vee S^4)^{\vee 35} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \\
(S^3 \times S^6)^{\# 14} \# (S^5 \times S^4)^{\# 35} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

Это отображение продолжается с букета на весь момент-угол-комплекс в силу тривиальности приклеивающего отображения и индуцирует изоморфизм в гомологиях. Так как все пространства односвязны это гомотопическая эквивалентность по теореме Уайтхеда.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] V.M. Buchstaber и T.E.Panov. "Toric Topology". В: Math.Surv. and Monogr. 204 (2015).

[2] D.McGavran. "Adjancent connected sums and torus action". В: Trans Amer.Math.Soc 251 (1979), с. 235—254.

[3] DaMbY1. *Algebra Pontryagin of polyhedra.* URL: `https://github.com/DaMbY1/Pontryagin_Algebra_Of_Polyhedra`.

[4] S.Theriault J.Grbic T.Panov и J.Wu. "Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes". В: Amer.Math.Soc (2015). arXiv: `1211.0873`.

[5] Fedor Vylegzhanin. "Loop homology of moment-angle complexes in the flag case". В: (2024). arXiv: `2403.18450`.

[6] Я.А.Верёвкин. "Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов". В: *Дальневост. матем. журн.* (2016).