Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Использование спектральной последовательности Эйленберга-Мура для вычисления когомологий однородных пространств

Выполнил студент 303 группы
Балабанов Пётр Григорьевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2022

Содержание

1 Введение

Спектральная последовательность Эйленберга-Мура была построена в 70-ых годах американскими математиками Самуэлем Эйленбергом и Робертом Ли Муром[2]. Описание этой последовательности использует DGA-алгебры и DGA-модули([6]). В общей ситуации эта последовательность позволяет посчитать когомологии пулбэка расслоения - тотального пространства расслоения, индуцированного из данного. В частном случае, который мы рассмотрим в этой работе - это спектральная последовательность расслоения, сходящаяся к когомологиям слоя, принимающая в качестве начальных данных когомологии базы и тотального пространства.

2 Предварительные сведения

2.1 Категория $\mathbf{DG_\Gamma Mod}$

Пусть R - ассоциативное кольцо с единицей.Дифференциальная градуированная алгебра Γ над R - это градуированная алгебра над R вместе с отображением $d : \Gamma \longrightarrow \Gamma$, которое имеет степень 1 или -1, и удовлетворяет свойствам $d \circ d = 0$, $d(a \cdot b) = da \cdot b + (-1)^{\deg(a)} a \cdot db$.
Морфизмы $\varphi : (\Gamma, d) \to (\Gamma', d')$ степени 0 определяют категорию DGAlg_R. Сингулярные цепи на пространстве и когомологии(с нулевым дифференциалом) определяют функторы $\mathrm{Top} \to \mathrm{DGAlg}_R$. В этой работе роль кольца R будет выполнять поле $\mathbf{k}$.

Левый модуль N над Γ - это дифференциальный градуированный модуль над R вместе с действием $\psi : \Gamma \otimes_R N \to N$, которое является морфизмом дифференциальных градуированных R-модулей.

2.2 Как строится спектральная последовательность

В [7] доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть база B односвязна, $\pi : E \to B$ - расслоение со связным слоем F, а $f : X \to B$ - непрерывное отображение, которое индуцирует расслоение $\pi' : E_f \to X$:*

$$\begin{array}{ccc} E_f & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ X & \xrightarrow[f]{} & B \end{array} \tag{1}$$

Тогда существует спектральная последовательность, лежащая во втором квадранте, с членом

$$E_2 \cong \mathrm{Tor}_{H^*(B;\mathbf{k})}(H^*(X;\mathbf{k}), H^*(E;\mathbf{k}))\,,$$

сильно сходящаяся к $H^*(E;\mathbf{k})$.

Доказательство основывается следующих двух теоремах.

Теорема 2.2. *(первая теорема Эйленберга-Мура) Пусть* Γ *и* $H(\Gamma)$ *- плоские модули над* R. *Тогда существует спектральная последовательность во втором квадранте, для которой*

$$E_2^{*,*} \cong \mathrm{Tor}^{*,*}_{H(\Gamma)}(H(M), H(N)),$$

сходящаяся к $\mathrm{Tor}^{*,*}_{\Gamma}(M, N)$.

Теорема 2.3. *(вторая теорема Эйленберга-Мура) В условиях диаграммы 1 существует изоморфизм:*

$$\mathrm{Tor}_{C^*(B)}(C^*(X), C^*(E)) \cong H^*(E_f; \mathbf{k}) . \tag{2}$$

3 Когомологии однородных пространств

Рассмотрим такой класс расслоений: пусть H - замкнутая подгруппа в группе Ли G, $i : H \to G$ - включение. Тогда G/H - однородное пространство, которое представляется в виде слоя расслоения:

$$G/H \longrightarrow BH \xrightarrow{Bi} BG \tag{3}$$

Подробно теория однородных пространств изложена, например, в [1].

В этом случае спектральная последовательность Эйленберга-Мура стабилизируется сразу на втором листе. См., например [7](т. 8.1), или [4](3.1, 3.2). Это приводит к изоморфизму векторных пространств.

$$E_\infty \cong E_2 \cong \mathrm{Tor}_{H^*(BG;k)}(k, H^*(BH; k))$$

Но факторпространство G/H может быть разным в зависимости от выбора включения i. Следующий пример показывает как спектральная последовательность реагирует на такие изменения.

Пусть $\mathbf{k}$ - поле нулевой характеристики. Рассмотрим два вложения $U(n-1) \xrightarrow{\varphi} U(n)$:

$$\varphi : A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & A \end{array}\right), \varphi : A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} \det(A)^{-1} & \\ \hline & A \end{array}\right) . \tag{4}$$

Расслоение (3) является локально тривиальным, $H^*(BH)$ - свободный модуль над $H^*(BG)$ по теореме Лере-Хирша, и значит нам достаточно посчитать только нулевую компоненту Tor, то есть $\mathbf{k} \bigotimes_{H^*(BG)} H^*(BH)$.

В первом случае образ является стабилизатором транзитивного действия $U(n)$ на S^{2n+1}, поэтому при данном вложении имеем $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n+1}$. С другой стороны, $H^*(BU(n))$ является кольцом многочленов от переменных $c_1, \ldots, c_n$, $\deg c_p = 2p$, - характеристических классов универсального n-мерного(комплексного) расслоения. Значит, нужно понять, какую структуру модуля задаёт индуцированное отображение φ.

Обозначим $H^*(BU(n-1)) = \mathbf{k}[s_1, \ldots, s_{n-1}]$. Получаемое отображение на классифицирующих пространствах обладает таким свойством, что если отображение $X \to BU(n-1)$ классифицирует расслоение ξ с базой X, то композиция $X \to BU(n-1) \to BU(n)$ является классифицирующим отображением для $\xi \oplus \varepsilon$, где ε - тривиальное одномерное расслоение. Характеристические классы тривиального расслоения нулевые, поэтому по формуле суммы Уитни([3]) и по свойству универсальности характеристических классов имеем:

$$\varphi^* : \mathrm{k}[c_1, \ldots, c_n] \longrightarrow \mathrm{k}[s_1, \ldots, s_{n-1}] , \tag{5}$$

$$\varphi(c_1) = s_1 , \ \ldots , \ \varphi(c_{n-1}) = s_{n-1} , \varphi(c_n) = 0 .$$

Теперь, зная это отображение, мы можем воспользоваться резольвентой Кошуля([5], A):

$$\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[c_1,\dots,c_n]}(\mathbf{k};\mathbf{k}[s_1,\dots,s_{n-1}]) = H(\Lambda[u_1,\dots,u_n]\otimes\mathbf{k}[s_1,\dots,s_{n-1}],\, d)\ , \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &d(u_1) = s_1,\\ &\dots\\ &d(u_{n-1}) = s_{n-1},\\ &d(u_n) = 0; \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда видно, что элементы с индексами 1, … , $n-1$ образуют ацикличный комплекс,

$$H(\Lambda[u_1,\dots,u_n]\otimes\mathbf{k}[s_1,\dots,s_{n-1}],\, d) = \Lambda[u_n]\,.$$

Причём $\mathrm{bideg}\, u_n = (-1, \deg c_n) = (-1, 2)$, степень этого класса соответствует образующей $H^*(S^{2n-1})$.

Во втором варианте вложения (4) рассмотрим такое транзитивное действие $U(n)$ на $S^1\times\mathbb{C}P^{n-1}$: первая компонента умножается на определитель, действие на вторую определяется через вложение в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. $U(n-1)$ является стабилизатором этого действия. Поэтому в слое получаем пространство орбит, гомеоморфное $S^1\times\mathbb{C}P^{n-1}$. Композиция классифицирующего ξ отображения $X \to BU(n-1)$ с $B\varphi$ является классифицирующим для $\xi\oplus(\det\xi)^{-1}$ - прямой суммы с тензорно обратным к детерминантному. Имеем

$$B\varphi* : H^*(BU(n)) \to H^*(BU(n-1))\,,$$

$$\mathbf{k}[c_1,\dots,c_n] \to \mathbf{k}[s_1,\dots,s_{n-1}]\,,\ s_i = c_i(\xi)$$

Единственный ненулевой характеристический класс детерминантного расслоения это c_1. Поэтому снова, по формуле суммы Уитни получим отображение на когомологиях и дифференциал в (6)

$$c_i \mapsto c_i(\xi\oplus(\det\xi)^{-1}) = s_i - s_{i-1}s_1\,,$$

$$\begin{aligned} &d(u_1) = 0,\\ &d(u_2) = s_2 - s_1^2,\\ &\dots\\ &d(u_{n-1}) = s_{n-1} - s_1 s_{n-2},\\ &d(u_n) = -s_1 s_{n-1}; \end{aligned} \tag{8}$$

получаем разности мономов одинаковых степеней. На уровне когомологий это означает, что мы можем представлять элемент в виде произведения элементов меньших степеней. Иными словами, можно рассмотреть образы линейных комбинаций u_i:

$$\begin{aligned} &u_3 + u_2 s_1 \mapsto s_3 - s_1^3\ ,\\ &u_4 + u_3 s_1 + u_2 s_1^2 \mapsto s_4 - s_1^4\ ,\\ &\dots\\ &u_{n-1} + u_{n-2}s_1 + \dots + u_2 s_1^{n-3} \mapsto s_{n-1} - s_1^{n-1}\ ,\\ &u_n + u_{n-1}s_1 + \dots + u_2 s_1^{n-2} \mapsto -s_1^n\ , \end{aligned}$$

а поскольку $d(s_i) = 0$, в ядре оператора d остаётся только $\Lambda[u_1]\otimes\mathbf{k}[s_1,s_2,\dots,s_{n-1}]$. В итоге имеем:

$$H(\Lambda[u_1,\dots,u_n]\otimes\mathbf{k}[s_1,\dots,s_{n-1}],\, d) = \Lambda[u_1]\otimes\frac{\mathbf{k}[s_1,s_2,\dots,s_{n-1}]}{(s_2-s_1^2,\dots,s_1^n)} \cong \Lambda[u_1]\otimes\mathbf{k}[s_1]/(s_1^n) = H^*(S^1\times\mathbb{C}P^{n-1})\,.$$

Список литературы

[1] Andreas Arvanitoyeorgos. *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, volume 22 of *Student mathematical library*. American Mathematical Society, 2003.

[2] Moore John C. Eilenberg, Samuel. Homology and fibrations. i. coalgebras, cotensor product and its derived functors. *Commentarii mathematici Helvetici*, 40:199–236, 1965/66.

[3] J.Milnor. *Lectures on characteristic classes (notes by James Stasheff)*, volume 3. Matematika, 1959.

[4] Larry Smith. Homological Algebra and the Eilenberg-Moore Spectral Sequence, journal =.

[5] Taras E. Panov Victor M. Buchstaber. *Toric Topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2015.

[6] А. Картан. Алгебры когомологий пространств Эйленберга-Маклейна. *Математика*, 3(5):3–50, 1959.

[7] Джон Мак-Клири. *Путеводитель по спектральным последовательностям.* МЦНМО, перев. на русск. яз., 2008.