Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Произведения Масси в эквивариантных когомологиях момент-угол комплекса с действием координатного подтора

Выполнил студент 403 группы
Балабанов Пётр Григорьевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2023

1 Введение

В данной работе приводится пример нетривиального эквивариантного произведения Масси. Изучение произведений Масси в когомологиях момент-угол комплексов началось с работы [3]. Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на множестве V из m элементов. В [5] построена ДГА-модель эквивариантных когомологий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с действием координатного подтора $T_I \subset T^m$, где $I = i_1, \dots, i_k \subset V$. Везде в этой работе за $\mathbf{k}$ обозначается поле характеристики ноль или кольцо целых чисел.

2 Предварительные сведения

2.1 Момент-угол комплекс

Определение 2.1. *Симплициальный комплекс* $\mathcal{K}$ на множестве вершин $V(\mathcal{K}) = [m] = 1, \dots, m$ - это набор подмножеств $\sigma \subset [m]$ такой, что если $\sigma \in \mathcal{K}$ и $\tau \subset \sigma$, то $\tau \in \mathcal{K}$. Такие подмножества $\sigma \in \mathcal{K}$ называются *симплексами*. Для набора вершин $J \subset [m]$ *полный подкомплекс* $\mathcal{K}_J$ определяется как

$$\mathcal{K}_J = \{\sigma \in \mathcal{K} : V(\sigma) \subset J\} . \tag{1}$$

Момент-угол комплексы впервые появились в работе Бухштабера и Панова [4], они являются основным объектом изучения торической топологии.

Определение 2.2. Для симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на $[m]$ вершинах, момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ для $\mathcal{K}$ определяется как

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \cup_{I \in \mathcal{K}} \left(D^2, S^1\right)^I \subset \left(D^2\right)^m \tag{2}$$

где $\left(D^2, S^1\right)^I = \Pi_{i=1}^m Y_i$ для $Y_i = D^2$ если $i \in I$, и $Y_i = S^1$ если $i \notin I$.

Нетрудно видеть, что в определении выше достаточно брать объединение по максимальным симплексам.

Пример 2.1. Пусть симплекс $\mathcal{K}$ представляет собой две дизъюнктные точки. Момент-угол комплекс для такого симплекса будет равен объединению двух полторий, склеенных по их границе - тору $S^1 \times S^1$, который соответствует пустому симплексу $\emptyset \in \mathcal{K}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &= D^2 \times S^1 \bigcup_{S^1 \times S^1} S^1 \times D^2 \\ &= \partial(D^2 \times D^2) = S^3 \end{aligned}$$

В общем случае, если комплекс $\mathcal{K}$ это триангуляция сферы, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является многообразием.

Теорема 2.1 ([4])**.** *Если $\mathcal{K}$ - триангуляция n-мерной сферы на m вершинах, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ - $(m+n-1)$-мерное замкнутое многобразие.*

Утверждение 2.1 ([4])**.** *Для сиплициального комплекса $\mathcal{K}$ на $[m]$ вершинах существует изоморфизм градуированных алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(R^*(\mathcal{K})) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$$

Также существуют изоморфизмы, функториальные по $\mathcal{K}$, биградуированных алгебр

$$H^{*,*}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{Z}[\mathcal{K}, \mathbb{Z}]) \tag{3}$$

$$\cong H(\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], d) \tag{4}$$

где биградуировка и дифференциал в правой части определяются как

$$\mathrm{bideg}\, u_i = (-1, 2), \quad \mathrm{bideg}\, v_i = (0, 2), \quad du_i = v_i, \ dv_i = 0.$$

Теорема 2.2 (Теорема Хохштера [4]). *Для сиплициального комплекса $\mathcal{K}$ на $[m]$ вершинах выполняется*

$$\operatorname{Tor}^{-i,2j}_{\mathbf{k}[v_1,\ldots,v_m]}\big(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}\big) = \bigoplus_{J\subset[m]\colon |J|=j} \widetilde{H}^{j-i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$$

где мы полагаем $\widetilde{H}^{-1}(\mathcal{K}_\varnothing;\mathbf{k}) = \mathbf{k}$.

2.2 Произведения Масси

Произведение Масси - это когомологическая операция высшего порядка, обобщающая $\smile$-произведение(произведение Колмогорова-Александера)([1]). Пусть a, b, c - элементы алгебры когомологий $H^*(\Gamma)$ дифференциальной градуированной алгебры Γ, и пусть выполнено $ab = bc = 0$, тогда тройное произведение Масси $\langle a, b, c\rangle$ определяется как подмножество $H^n(\Gamma)$, где $n = \deg(a) + \deg(b) + \deg(c) - 1$. Тройное произведение является частным случаем n-кратного:

Определение 2.3. Пусть (A, d) - дифференциальная градуированная алгебра с классами $\alpha_i \in H^{p_i}(A, d)$ для $1 \le i \le n$, $a_{i,i} \in A^{p_i}$ - представители классов α_i. *Определяющей системой*, связанной с $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ называется множество элементов $(a_{i,k})$, $1 \le i \le k \le n$ $(i,k) \ne (1,n)$, такое, что $a_{i,k} \in A^{p_i+\ldots+p_k-k+i}$ и

$$d(a_{i,k}) = \sum_{r=i}^{k-1} \overline{a_{i,r}}a_{r+1,k} \tag{5}$$

где $\overline{a_{i,r}} = (-1)^{1+\deg(a_{i,r})}a_{i,r}$ Каждой определяющей системе, связанной с $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ сопоставляется *ассоциированный коцикл*, который определяется как сумма

$$\sum_{r=i}^{n-1} \overline{a_{i,r}}a_{r+1,n} \in A^{p_1+\ldots+p_n-n+2} \tag{6}$$

n-кратным произведением Масси $\langle\alpha_1,\ldots,\alpha_n\rangle$ называется множество классов когомологий ассоциированных коциклов для всех возможных определяющих систем.

Например, тройное произведение $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle \in H^{p_1+p_2+p_3-1}(A)$ определено когда $\alpha_1\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2\alpha_3 = 0$. Поскольку эти произведения равны нулю, можно выбрать коцепи $a_{12} \in A^{p_1+p_2-1}$ и $a_{23} \in A^{p_2+p_3-1}$ такие что $d(a_{12}) = (-1)^{1+p_1}a_1a_2$ и $d(a_{23}) = (-1)^{1+p_2}a_2a_3$. Тогда *тройное произведение Масси* $\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle \in H^{p_1+p_2+p_3-1}(A)$ представляет собой множество классов, представленных цепями

$$(-1)^{p_1+1}a_1a_{23} + (-1)^{p_1+p_2}a_{12}a_3 \in A^{p_1+p_2+p_3-1} \tag{7}$$

эта коцепь действительно является коциклом, поскольку

$$\begin{aligned}
&d((-1)^{p_1+1}a_1a_{23} + (-1)^{p_1+p_2}a_{12}a_3)\\
&= (-1)^{p_1+1}(da_1\cdot a_{23} + (-1)^{p_1}a_1\cdot da_{23}) + (-1)^{p_1+p_2}\big(da_{12}\cdot a_3 + (-1)^{p_1+p_2-1}a_{12}\cdot da_3\big)\\
&(-1)^a_1((-1)^{1+p_2}a_2a_3) + (-1)^{p_1+p_2}(-1)^{1+p_1}a_1a_2a_3\\
&(-1)^{p_2}a_1a_2a_3 + (-1)^{p_2+1}a_1a_2a_3 = 0
\end{aligned}$$

2.3 Модель эквивариантных когомологий для действия координатного подтора

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве V из m элементов. В статье [5] была получена формула для эквивариантных когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ относительно действий координатных подторов $T_I \subset T^m$, где $I = i_1, \ldots, i_k \subset V$. Имеем аддитивный изоморфизм $\mathbb{Z}[v_1, \ldots, v_m]$-модулей

$$H^*_{T_I} \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_m]}(\mathbb{Z}[v_i : i \in I],\, \mathbb{Z}[\mathcal{K}]) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_i : i \in I]}(\mathbb{Z},\, \mathbb{Z}[\mathcal{K}])$$

Применяя резольвенту Кошуля получаем ДГА-модель

$$(\Lambda[u_i : i \notin I] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}]\, d) \quad du_i = v_i,\ dv_i = 0 \tag{8}$$

3 Нетривиальные произведения Масси

Рассмотрим многогранник на Рис. (1), обозначим его за P, и пусть $\mathcal{K}_P$ - нерв-комплекс этого многогранника. Тогда его кольцо граней представляется в виде

$$\mathbb{Z}\left[\mathcal{K}_P\right] = \mathbb{Z}\left[v_1, \ldots, v_6, w_1, w_2\right] / \mathcal{I}_{\mathcal{K}_P}\,, \tag{9}$$

где $v_i = 1, \ldots, 6$ это порождающие, происходящие от граней куба и w_1, w_2 - две новые порождающие, соответствующие двум новым граням, появившимся после надрезания рёбер. Идеал Стенли-Райснера

$$\mathcal{I}_{\mathcal{K}_P} = (v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, w_1w_2, v_1v_3, v_4v_5, w_1v_3, w_1v_6, w_2v_2, w_2v_4) \tag{10}$$

Соответствующие порождающие внешней алгебры в $R^*\left(\mathcal{K}_P\right)$ обозначим $u_1, \ldots, u_6, u_7, u_8$; они удовлетворяют условиям $du_i = v_i$ для $1 \leq i \leq 6$ и $du_7 = w_1, du_8 = w_2$

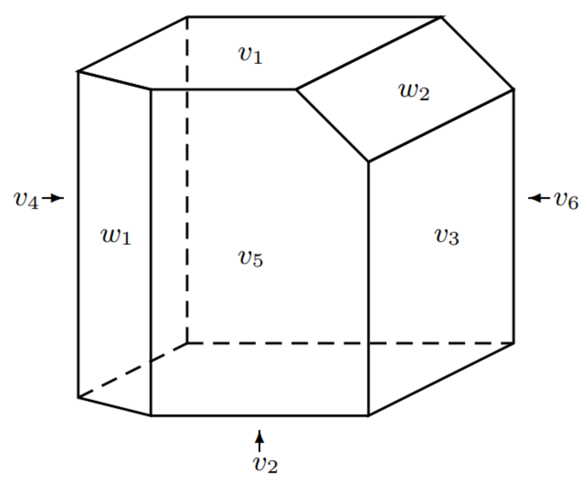

Рисунок 1: Куб с надрезанными гранями

Существует([2], с.170) нетривиальное тройное произведение классов $\alpha, \beta, \gamma \in H^{-1,4}\left[R^*\left(\mathcal{K}_P\right)\right]$, где α, β, γ представлены соответственно классами

$$a = v_1u_2, \quad b = v_3u_4, \quad c = v_5u_6$$

Чтобы понять, существуют ли у $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ эквивариантные произведения масси, посмотрим, сохраняется ли вышеописанное произведение при действии тора по каким-либо координатам. Иными словами: для каких $I \subset [v_1, \ldots, v_6, w_1, w_2]$ можно действовать тором T_I на $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ так, чтобы произведение продолжало существовать? Сравнивая (3) и (8), можно сказать следующее: при $I = \emptyset$ верна формула (3), при добавлении же новых координат в число тех, по которым действует тор, исчезают соответствующие компоненты во внешней алгебре, тем самым мы получаем формулу (8). Чтобы использовать это наблюдение, перепишем ещё раз выражения для коциклов и их произведений в терминах Tor-алгебры:

ДГА-модель когомологий момент-угол комплекса будет равна

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = (\Lambda[u_1, u_2, \ldots, u_6, u_7, u_8]) \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}], \, d)\,, \tag{11}$$

В формуле выше $du_i = v_i$ для $1 \leq i \leq 6$, и $du_7 = w_1, du_8 = w_2$.

Поскольку $v_1v_3 \in \mathcal{I}_\mathcal{K}$, то в $R^*(\mathcal{K})$ имеем $ab = v_1v_3u_2u_4 = 0$, поэтому среди элементов e таких, что $de = ab$ можем взять $e = 0$. Далее: $bc = v_3v_5u_4u_6$, возьмём $f = v_5u_3u_4u_6$, $df = bc$, тогда получаем, что коцикл, определяющий тройное произведение, будет равен

$$af + ec = v_1v_5u_2u_3u_4u_6$$

Нетрудно видеть, что если в алгебре (11) убрать внешние образующие u_1, u_5, u_7, u_8, то в ней останутся верными приведённые выше рассуждения, и поэтому построенное в [2] тройное произведение будет определено в эквивариантных когомологиях $H^*_{T_{1578}}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Оно будет нетривиальным, поскольку было нетривиальным в исходной алгебре $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$. Иными словами, произведение Масси не содержало нуля, и значит, не может его содержать в алгебре, получающейся из исходной удалением некоторых образующих.

Список литературы

[1] William S. Massey. Some higher order cohomology operations. *Symposium internacional de topología algebraica (International symposium on algebraic topology), Mexico City: Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO*, pages 145–154, 1958.

[2] Taras E. Panov Victor M. Buchstaber. *Toric Topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2015.

[3] И.В. Баскаков. Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов. *УМН*, 58:199–200, 2003.

[4] Т. Е. Панов В. М. Бухштабер. Some higher order cohomology operations. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*, 225:96–131, 1999.

[5] И.К. Зейникешева Т.Е. Панов. Эквивариантные когомологии момент-угол-комплексов относительно координатных подторов. *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, 317:157–167, 2022.