МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО—МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

кафедра высшей геометрии и топологии

Прямоугольные группы Кокстера, реализуемые отражениями в пространстве Лобачевского

Курсовая работа
студентки 4–го курса
Чепаковой Д.В.

Научный руководитель:
доктор физ.–мат. наук,
профессор
Панов Т. Е.

Москва 2021 г.

Содержание

Введение

Из [1] известно, что любую дискретную группу отражений, действующую в пространстве постоянной кривизны X, можно восстановить по ее фундаментальному многограннику $P = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$ следующим образом:

$$G(P) = \langle g_1, ..., g_m | (g_i g_j)^{n_{ij}} = e \text{ , если } \angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{n_{ij}} \rangle, \text{ где } n_{ij} \in \mathbb{N}.$$

Многогранники, соответствующие дискретным группам отражений называются *многогранниками Кокстера.* Нас будет интересовать, в каких случаях абстрактная прямоугольная группа Кокстера, то есть любая группа G вида

$$G = \left\langle g_1, \ldots, g_m | (g_i g_j)^2 = e \right\rangle \text{ , для некоторых пар } (i,j)$$

реализуема как дискретная группа отражений в X. В качестве X будем рассматривать пространство Лобачевского(евклидов и сферический случаи исследованы и полностью классифицированы). Заметим, что каждой абстрактной прямоугольной группе Кокстера RC_Γ однозначно соответствует граф Γ без петель и кратных ребер, устроенный следующим образом:

$$V(\Gamma) = \{1, \ldots, m\}$$
$$E(\Gamma) = \left\{(i,j) : (g_i g_j)^2 = e\right\}$$

Теперь сформулируем главный вопрос, которому будет посвящена эта работа: как по абстрактной прямоугольной группе Кокстера понять, может она быть реализована как дискретная группа отражений в пространстве Лобачевского или нет?

1. Пространство $E^{n,1}$

Для начала опишем модель пространства Лобачевского $\mathbb{L}^n$, которой будем пользоваться. Пусть $E^{n,1}$— $(n+1)$–мерное вещественное векторное пространство, снабженное следующим скалярным произведением

$$(x,y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + ... + x_n y_n$$

и пусть V — множество вида

$$V = \left\{x \in E^{n,1} : (x,x) < 0\right\},$$

а V_+ — одна из его компонент связности. Точки пространства Лобачевского отождествляются с прямыми, проходящими через начало координат и лежащими в V_+.

Подпространство пространства $E^{n,1}$' называется *гиперболическим* (соответственно *эллиптическим,параболическим*), если индуцированное на нем скалярное произведение невырожденно и неопределенно (соответственно положительно, вырожденно). Ортогональное дополнение к гиперболическому (соответственно эллиптическому, параболическому) подпространству есть эллиптическое (соответственно гиперболическое, параболическое) подпространство дополнительной размерности.

Каждой s-мерной плоскости в $\mathbb{L}^n$ соответствует гиперболическая $(s+1)$—мерная плоскость в $E^{n,1}$. Следовательно каждому многограннику $P = \bigcap_{i=1}^{m} H_i^-$ будет соответствовать многогранный угол $\widehat{P}$:

$$\hat{P} = \bigcap_{i=1}^{m} \widehat{H}_i^-$$

где $\widehat{H}_i$ –гиперболическая гиперплоскость в $E^{n,1}$, соответствующая H_i. Заметим, что нормали к гиперболическим гиперплоскостям $\widehat{H}_i$ имеют положительную длину, так как лежат в эллиптическом пространстве, ортогональном к гиперболическому пространству $\widehat{H}_i$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — единичные нормали к $\widehat{H}_1, \ldots, \widehat{H}_m$ соответственно.

Многогранный угол $\widehat{P}$ задается следующим образом

$$\widehat{P} = \{x : (e_i, x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\}$$

При этом гиперболический многогранник P будет компактен, если $\hat{P} \subset V_+$ и будет иметь конечный объем, если $\hat{P} \subset \overline{V_+}$ (см. Рис. 1).

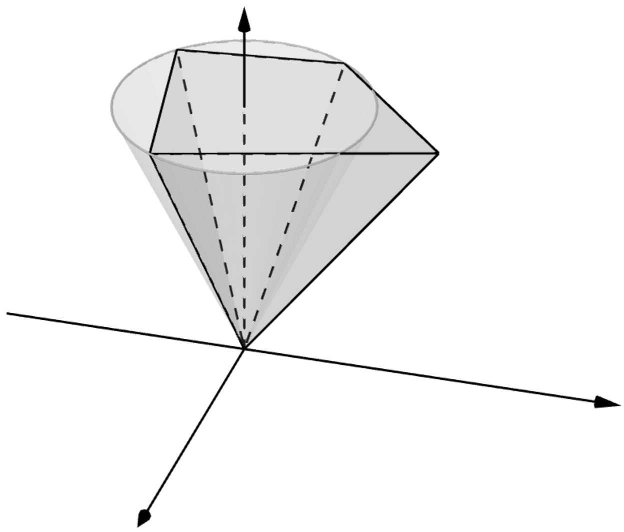

Рис. 1. Многогранник неконечного объема с тремя идеальными вершинами

Обозначим как $G(P) = (g_{ij})$ матрицу Грамма системы единичных нормалей $e_1, \ldots, e_m$. Эта матрица имеет следующий вид:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, если } i = j; \\ -\cos \frac{\pi}{n_{ij}} & \text{, если } H_i \text{ и } H_j \text{ пересекаются, и } \angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{n_{ij}}; \\ -\cosh \rho(H_i, H_j) & \text{, если } H_i \text{ и } H_j \text{ не пересекаются} \end{cases}$$

где ρ—расстояние в пространстве Лобачевского.

Невырожденный выпуклый многогранник $P \subset \mathbb{L}^n$ назовем *разложимым*, если у него найдётся собственная грань положительной размерности, ортогональная всем не содержащим ее гиперграням. Всякий выпуклый многогранник конечного объема — неразложим [2]. Разложимость многогранника P эквивалентна разложимости системы векторов $\{e_i\}_{i=1}^m$ на две непустые ортогональные части, что в свою очередь эквивалентно неразложимости матрицы $G(P)$.

Заметим, что многогранник P имеет максимальную размерность, тогда и только тогда, когда $rank\, G(P) = n + 1$. В этом случае система векторов $\{e_i\}$ определена с точностью до ортогонального преобразования пространства $E^{n,1}$.

Для получения ответа на сформулированный выше вопрос, приведем с кратким доказательством результат Э.Б.Винберга. Для этого воспользуемся следующими двумя предложениями.

Предложение 1.1. *Пусть $e_1, \dots, e_m$ — неразложимая система векторов в $E^{n,1}$ ранга $n+1$, причем $(e_i, e_j) < 0$ при $i \neq j$. Пусть, к тому же, сигнатура матрицы $G(P) = (n, 1)$. Тогда угол $\hat{P}$, определенный выше, содержит непустое открытое подмножество одной из связных компонент множества V и не содержит ненулевых векторов из замыкания другой компоненты.*

Доказательство. $G(P)$— неразложимая симметричная матрица с неположительными элементами вне диагонали. Обозначим через $\lambda(G)$ минимальное собственное значение матрицы $G(P)$ и через $\delta(G)$ — максимальный из ее диагональных элементов. Тогда $\lambda(G) < 0$, что следует из сигнатуры матрицы. Из теоремы Перрона-Фробениуса, примененной к матрице

$$B = \delta(G)E - A$$

получаем, что:

1) $\lambda(G)$ является простым собственным значением матрицы $G(P)$;

2) для соответствующего собственного вектора $\overline{c} = (c_1, \dots, c_m)$ имеем $c_i > 0,\ i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим вектор $v = \sum_i c_i e_i$, тогда

$$(v, e_j) = \sum_i g_{ij} c_i = \lambda c_j < 0, j = 1, \dots, m$$

Это означает, что v является внутренней точкой конуса $\hat{P}$. В то же время

$$(v, v) = \sum_i c_i (v, e_i) < 0$$

так что $v \in V$. Пусть $v \in V_+$. Тогда для всех ненулевых векторов x из $\overline{V_-}$ выполняется

$$(v, x) > 0$$

Но для всех векторов из $\widehat{P}$ выполнено

$$(v, x) = \sum_i c_i (e_i, x) \leq 0$$

следовательно, многогранный угол $\widehat{P}$ пересекается только с одной из связных компонент V. □

Теперь сформулируем результат Э.Б.Винберга и приведем его краткое доказательство.

Теорема 1.2. *Пусть $G = (g_{ij})$— неразложимая симметричная матрица сигнатуры $(n, 1)$ с единицами на диагонали и неположительными элементами вне диагонали. Тогда в n-мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$ существует такой выпуклый многогранник конечного объема , что его матрица Грама $G(P)$ совпадает с G. Многогранник определен однозначно с точностью до движения пространства $\mathbb{L}^n$.*

Доказательство. Так как группа движений пространства $\mathbb{L}^n$ является подгруппой индекса два в группе $O_{n,1}$, то существует, с точностью до движения, не более двух невырожденных выпуклых многогранников с заданной матрицей Грама. При этом неопределенность может иметь место только тогда, когда конус $\widehat{P}$ пересекается с обеими связными компонентами конуса V. Но по предложению выше, эта неопределенность снимается. Тогда P–выпуклый многогранник в $\mathbb{L}^n$, определенный с точностью до движения этого пространства, причем его матрица Грама совпадает с G. □

Таким образом, чтобы узнать реализуема ли данная прямоугольная группа Кокстера как группа отражений относительно гиперграней прямоугольного многогранника в $\mathbb{L}^n$, достаточно посмотреть на матрицу

$G = (g_{ij})$, построенную по графу $\Gamma(V, E)$ следующим образом:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j; \\ 0, \text{ если } i, j \in E(\Gamma); \\ a_{ij}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

где a_{ij}—неопределенные параметры.

В случае, если существуют неопределенные параметры $a_{ij} \leq -1$, такие, что матрица G удовлетворяет всем условиям теоремы, ответ на сформулированный вопрос положителен.

2. Пространства $\mathbb{L}^2$ и $\mathbb{L}^3$

Так как известны комбинаторные строения всех гиперболических прямоугольных многоугольников в $n = 2$, и прямоугольных многогранников конечного объема в случае, когда $n = 2, 3$, частично ответ на вопрос можно дать и не прибегая к теореме.

2.1. Двумерный случай

Предложение 2.1. *Прямоугольная группа Кокстера RC_Γ реализуется как группа отражений прямоугольного многоугольника в $\mathbb{L}^2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) Γ *изоморфен простому циклу на трех вершинах без k ребер,* $2 \leq k \leq 3$*;*

2) Γ *изоморфен простому циклу на четырех вершинах без k ребер,* $1 \leq k \leq 4$ *;*

3) Γ *изоморфен простому циклу на $m \geq 5$ вершинах без k ребер,* $0 \leq k \leq m$*,* $m \geq 5$*;*

4) $|V(\Gamma)| = 2$.

1) $m \geq 3$, Γ *изоморфен простому циклу без k ребер, причем если $m \geq 5$, то $0 \leq k \leq m$; если $m = 4$, то $1 \leq k \leq 4$; если $m = 3$, то $2 \leq k \leq 3$;*

2) $m = 2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно полностью классифицировать прямоугольные многоугольники в плоскости Лобачевского. Будем называть вершины, лежащие на или за абсолютом—*особыми.* Тогда эта классификация имеет следующий вид:

1) треугольник с двумя или тремя особыми вершинами;

2) четырехугольник с особыми k вершинами, $1 \leq k \leq 4$;

3) m-угольник с k особыми вершинами, $0 \leq k \leq m$, $m \geq 5$;

4) плоский угол равный либо $\frac{\pi}{2}$ либо 0.

Тогда многоугольникам типа 1) однозначно соответствуют графы, удовлетворяющие условию 1) и т.д. В последнем четвертом случае, RC_Γ изоморфна либо $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (многогранники для этих случаев изображены на Рис.3). □

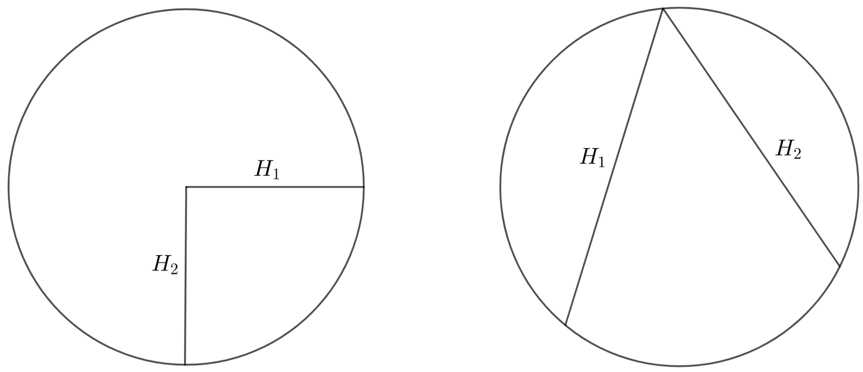

Рис. 2. Неограниченные прямоугольные многогранники при $m = 2$. Слева — $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, справа — $G \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

2.2. Трехмерный случай

Для ответа на поставленный вопрос в трехмерном случае воспользуемся следующими известными результатами о комбинаторном строении гиперболических прямоугольных многогранников в $\mathbb{L}^3$.

Определение 2.2. *k-поясом* называется циклический набор двумерных граней, имеющий пустое пересечение, в котором пересекаются только последовательные грани.

Теорема 2.3. *Простой многогранник P (за исключением 3-симплекса) реализуем как ограниченный прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^3$, тогда и только тогда, когда он не содержит 3- и 4-пояса .*

Такие многогранники называются *погореловскими.*

Определение 2.4. *Почти погореловскими* называются простые многогранники без 3-поясов, любой 4-пояс в которых окружает грань.

В многогранниках конечного объема могут быть вершины на абсолюте, причем все они будут 4-валентными. Если их срезать, то получим простой многогранник, для которого 4-угольные грани будут соответствовать срезанным вершинам.

Теорема 2.5. [3] *Срезка 4-валентных вершин устанавливает биекцию между комбинаторными типами прямоугольных многогранников конечного объема в $\mathbb{L}^3$ и почти погореловскими многогранниками, отличными от куба I^3 и 5-угольной призмы $M_5 \times I$.*

Если группа G дискретна, то соотношение в группе отражений G вида $(g_i g_j)^2 = 1$ однозначно соответствует пересечению гиперплоскостей H_i и H_j в пространстве ее действия, что в свою очередь, однозначно соответствуе пересечению соответствующих гиперграней фундаментального многогранника. Из того, что многогранники конечного объема флаговые, следует, что в случае, если группа G реализуется как группа отражений многогранника конечного объема, то по соотношениям в группе, то есть по попарному пересечению гипеграней, однозначно восстанавливается комбинаторное строение многогранника. Также, заметим, что в этом случае граф Γ совпадает с реберным графом двойственного к P многогранника. Из этих соображений следует следующее предложение.

Определение 2.6. Граф называется *планарным,* если его можно вложить в плоскость без самопересечений, и *максимально планарным,* если при добавлении любого ребра, он перестает быть планарным.

Определение 2.7. Граф называется *k-связным,* если при удалении менее, чем k вершин, он остается связным.

Теорема 2.8. *(Штейница [4])Граф можно реализовать как реберный граф многогранника в трехмерном пространстве тогда и только тогда, когда это граф 3-связен и ппланарен.*

Теорема 2.9. [5] *Граф является максимально планарным тогда и только тогда, когда он представляет собой триангуляцию сферы.*

Теорема 2.10. *Прямоугольная группа RC_Γ Кокстера реализуется как группа отражений компактного прямоугольного многогранника в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия на граф Γ:*

1) *максимальная планарность;*

2) *3-связность;*

3) *отсутствие бесхордовых 4-циклов;*

4) *количество 3-циклов $l = 2m - 4$, где $m = |V(\Gamma)|$.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть RC_Γ реализуется как группа отражений в гипергранях компактного прямоугольного многогранника $Q \subset \mathbb{L}^3$. Тогда $P = Q^*$ — симплициальный многогранник, а его реберный граф изоморфен Γ. Из теоремы 2.9 следует, что граф Γ максимально планарен. Из теоремы Штейница следует, что он 3-связен. Так как Q — погореловский многогранник, то в нем отсутствуют 4-пояса, что эквивалентно отсутствию бесхордовых 4-циклов. Количество граней F, ребер E и вершин V в симплициальном многограннике связаны между собой следующими соотношениями

$$3F = 2E$$
$$F - E + V = 2$$

Остается заметить, что так как в Q нет 3-поясов, грани в P однозначно соответствуют 3-циклам в Γ. Таким образом получаем

$$l = 2m - 4$$

Достаточность. Пусть граф Γ обладает свойствами 1)—4). Для доказательства достаточно построить погореловский многогранник Q, такой, что Γ — граф смежности его граней (или, что эквивалентно, реберный граф двойственного к нему многогранника). Так как граф удовлетворяет условиям 1) и 2), из теоремы Штейница и теоремы 2.9 следует, что существует симплициальный многогранник P, реберный граф которого изоморфен Γ. Докажем, что двойственнный к нему простой многогранник Q— погореловский. Действительно, грани P соответствуют некоторым из 3-циклов Γ, а количество 3-циклов удовлетворяет условию 4), поэтому в P нет реберного 3-цикла, которому бы не соответствовала грань. Следовательно, в Q нет 3-поясов. Заметим, что из условия 3) вытекает, что в Q нет и 4-поясов. Таким образом получаем, что многогранник Q — погореловский, что и требовалось доказать. □

Теперь опишем графы соответствующие почти погореловским многогранникам. Это будут графы, отличные от реберных графов куба I^3 и 5-угольной призмы $M_5 \times I$, удовлетворяющие условиям 1), 2) и 4), а условие 3) заменено следующим: для каждого 4-цикла без хорд найдется вершина в $\Gamma(G)$, соединенная со всеми вершинами цикла. Обозначим множество таких графов $\mathfrak{A}$. Для любого графа $\Gamma(V, E) \in \mathfrak{A}$ обозначим как $V_\Gamma \subset V$ множество вершин соединенных, как было описано выше, с каждой вершиной 4-циклов без хорд. Тогда из теоремы 2.5 следует

Теорема 2.11. *Прямоугольная группа Кокстера RC_Γ реализуется как группа отражений компактного прямоугольного многогранника в $\mathbb{L}^3$ тогда и только тогда, когда Γ изоморфен графу $\tilde{\Gamma} \setminus V_{\tilde{\Gamma}}$, где $\tilde{\Gamma} \in \mathfrak{A}$.*

Удалению вершин из $V_{\tilde{\Gamma}}$ при этом соответствует “обратная срезка” идеальных вершин в многограннике P.

3. Выводы

В работе были найдены критерии, позволяющие ответить на сформулированный вопрос в некоторых частных случаях, а именно, когда X — это плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$, когда X — это пространство Лобачевского $\mathbb{L}^3$, а фундаментальный многогранник P компактен или имеет конечный объем. Однако, ответить на него в общем случае на данный момент представляется довольно затруднительным. В частности, до сих пор ничего не известно о строении прямоугольных многогранников в гиперболическом пространстве размерности большей трех. В некоторых случаях, компьютерными алгоритмами возможно узнать существуют ли в области определения неопределенные параметры, для которых матрица $G(P)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Для этого необходимо рассмотреть систему из равенств и неравенств, вытекающую из сравнения с нулем миноров матрицы. Однако, даже с таким подходом, пока что невозможно сказать что либо про группы, фундаментальный многогранник которых имеет неконечный объем.

Приложение

Известно, что компактный прямоугольный m-угольник однозначно задается $m-3$ параметрами. Докажем следующее

Предложение 3.1. *Длины ребер l_i компактного прямоугольного многогранника удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$(\cosh l_i^2 - 1)(\cosh l_{i+1}^2 - 1) > 1, \ \forall i \tag{1}$$

где $i, i+1$ берутся по модулю m

Доказательство. Сначала проиллюстрируем это геометрически. Для этого воспользуемся моделью Пуанкаре в круге (с радиусом равным единице). Изометрией поместим вершину при i и $i+1$ ребрах в точку $(0,0)$, конец i-го ребра в $(x_0, 0)$,а конец $i+1$-го ребра в $(0, y_0)$. Тогда для того, чтобы эти ребра являлись ребрами прямоугольного многоугольника необходимо, чтобы окружности, перпендикулярные ребрам и к граничной окружности не пересекались. Обозначим как r_1 и r_2 радиусы этих окружностей, а как O_1 и O_2 их центры. Тогда

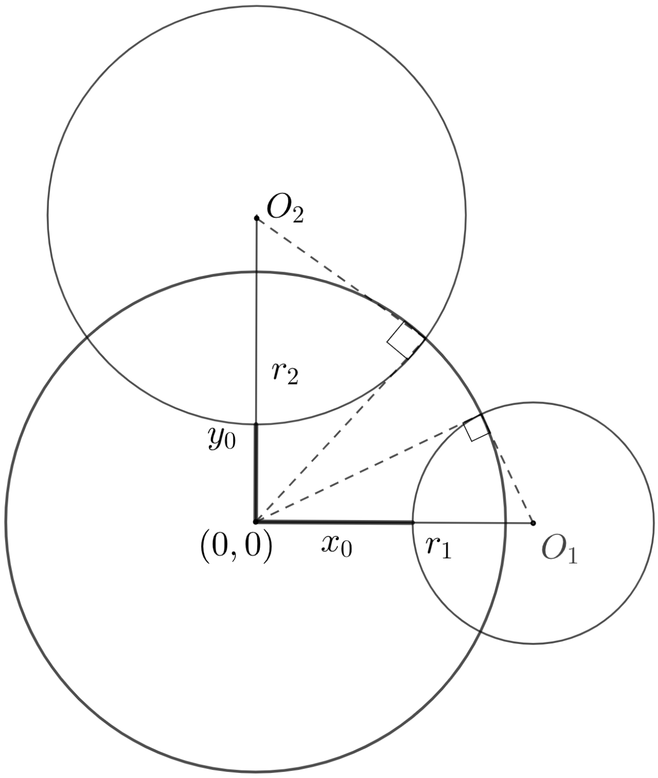

Рис. 3. К выводу соотношения (1)

$$|O_1O_2| > r_1 + r_2 \tag{2}$$

А из перпендикулярности этих окружностей с граничной следует, что

$$(x_0 + r_1)^2 = r_1^2 + 1$$
$$(y_0 + r_2)^2 = r_2^2 + 1$$

Из последних двух равенств однознозначно выражаются r_1 и r_2

$$r_1 = \frac{1 - x_0^2}{2x_0}$$
$$r_2 = \frac{1 - y_0^2}{2y_0}$$

Используя это вместе с (2), получаем следующее условие на x_0, y_0

$$\frac{(x_0^2 - 1)(y_0^2 - 1)}{4x_0 y_0} < 1$$

Гиперболические длины l_i и l_{i+1} выражаются через координаты как

$$l_{i+1} = |\ln \frac{(0-i)(y_0 i + i)}{(0+i)(y_0 i - i)}| = -\ln(\frac{1 - y_0}{1 + y_0})$$
$$l_i = |\ln \frac{(0-1)(x_0 + 1)}{(0+1)(x_0 - 1)}| = -\ln(\frac{1 - x_0}{1 + x_0})$$

То есть

$$x_0 = \tanh \frac{l_i}{2}$$
$$y_0 = \tanh \frac{l_{i+1}}{2}$$

А условие (2) запишется как

$$\frac{(1 - \tanh^2 \frac{l_i}{2})(1 - \tanh^2 \frac{l_{i+1}}{2})}{4 \tanh \frac{l_i}{2} \tanh \frac{l_{i+1}}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{4 \sinh l_i \sinh l_{i+1}} < 1$$

что эквивалентно условию (1)

Доказать выполнение условия (1) можно также из теоремы Э.Б. Винберга, сформулированной раннее. Для этого запишем матрицу $G(P) = (g_{ij})$, где P — m-угольник.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cosh l_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -\cosh l_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\cosh l_1 & g_{3m} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ii} = 1,\ g_{ii+1} = 0,\ g_{ii+2} = -\cosh l_{i+1}$$

где i берутся по модулю m. Так как $rankG(P) = 3$, следовательно все миноры 4-го порядка вырождены. В частности миноры вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\cosh l_i & g_{i-1i+2} \\ 0 & 1 & 0 & -\cosh l_{i+1} \\ -\cosh l_i & 0 & 1 & 0 \\ g_{i-1i+2} & -\cosh l_{i+1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что эквивалентно

$$(\cosh^2 l_i - 1)(\cosh^2 l_{i+1} - 1) = g_{i-1i+2}^2 > 1$$

□

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг, Гиперболические группы отражений, Успехи математических наук, 1985, том 40, выпуск 1(241), с. 29

[2] Э. Б. Винберг, Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского, Математический сборник, 1967, том 72(114), номер 3, с. 435

[3] Н. Ю. Ероховец, Комбинаторика выпуклых многогранников и приложение к фуллеренам. Итоговый отчет за 2018 год, https://ium.mccme.ru/rym/2015/reports/Erokhovets_otchet2018.pdf

[4] В. В. Прасолов, Графы рёбер многогранников, Матем. обр., 2000, выпуск 1(12), 2–12

[5] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич, Лекции по теории графов, Наука, 1990, с.158