МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО—МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

кафедра высшей геометрии и топологии

Расслоения над окружностью трехмерных гиперболических многообразий, соответствующих прямоугольным многогранникам

Курсовая работа
студентки 5–го курса
Чепаковой Д.В.

Научный руководитель:
доктор физ.–мат. наук,
профессор
Панов Т. Е.

Москва 2022 г.

Содержание

Введение

В 1979 году Т. Джогерсен предоставил первые примеры гиперболических 3-многообразий над окружностью. В 2012 Агол, базируясь на работах Вайза, положительно ответил на вопрос Терстона, доказав, что каждое гиперболическое многообразие накрывается с конечным индексом неким гиперболическим многообразием, расслаивающимся над окружностью. В этой работе в качестве таких замкнутых гиперболических многообразий рассматриваются пространства Эйленберга – Маклейна типа $K(RC'_P, 1)$, где RC'_P — коммутант группы Кокстера, порожденной отражениями в гипергранях прямоугольного многогранника P. Так как из теоремы Гаусса-Бонне следует, что расслоение над окружностью существует для замкнутых гиперболических многообразий только нечетной размерности, а ограниченные прямоугольные многогранники существуют только в пространствах размерности меньше 5, то можно рассмотреть только трехмерные прямоугольные многогранники.

1. Основные определения

Определение 1.1. *Группа RC_Γ вида*

$$RC_\Gamma = \langle g_1, ..., g_m | {g_i}^2 = e, (g_i g_j)^2 = e \text{ для некоторых пар } (i,j) \rangle$$

называется прямоугольной группой Кокстера.

Группа RC_Γ однозначно определяется графом Γ без петель и кратных ребер, таким, что

$$\begin{aligned} &V(\Gamma) = \{v_1, ..., v_m, \text{ где } v_i \text{ вершина соответствует } g_i \text{ порождающей группы } \} \\ &E(\Gamma) = \left\{ (v_i, v_j), \text{если } (g_i g_j)^2 = e \right\} \end{aligned}$$

Важным частным случаем прямоугольных групп Кокстера являются дискретные группы отражений в пространстве Лобачевского $\mathbb{L}^n$. В этом случае группа порождается отражениями в гипергранях многогранника, восстанавливаемого из группы однозначно с точностью до изометрии. Такие группы будут обозначаться как RC_P, где P - фундаментальный многогранник, а граф Γ будет представлять собой граф смежности граней многогранника P, или, что тоже самое, реберный остов двойственного к P многогранника P^*.

Конструкция 1.2. *Пусть $\mathscr{K}$ — симплициальный комлекс на множестве $[m]$ и*

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\} \tag{1}$$

- набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $\mathrm{pt} \in A_i \subset X_i$, для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{k=1}^{m} X_k : x_k \in A_k \text{при } k \notin I \right\}$$

и определим *полиэдральное произведение* набора $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ соответствующее комплексу $\mathscr{K}$, как

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \in I} A_i \right)$$

В случае, когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, т.е. $X_i = X$ и $A_i = A$ при $i = 1, \ldots, m$, мы используем обозначение $(X, A)^{\mathscr{K}}$ вместо $(\mathbf{X}, \mathbf{A})^{\mathscr{K}}$.

Пусть $(X, A) = (D^1, S^0)$, где D^1 — отрезок (удобно рассматривать отрезок $[-1, 1]$), а S^0 — его граница, состоящая из двух точек. Полиэдральное произведение $(D^1, S^0)^{\mathscr{K}}$ известно как *вещественный момент* *угол комплекс* (см. [2]) и обозначается через $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$.

В случае, когда $|\mathscr{K}|$ гомеоморфно сфере, $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является топологическим многообразием. Более того, многообразие $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ имеет каноническую гладкую структуру в случае, когда $|\mathscr{K}|$ является границей выпуклого многогранника. В этом случае $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является универсальным абелевым накрытием над двойственным многогранником P.

Предложение 1.3. *[2] Пусть $\mathscr{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на m вершинах, являющийся флагизацией Γ; $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ — полиэдральное произведение, а RC_Γ — соответствующая группа Кокстера. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ является асферическим;

2) группа $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ изоморфна коммутанту RC'_Γ.

Соответствующее многограннику P универсальное абелево накрытие будем обозначать как $\mathscr{R}_P$. Таким образом, в случае, когда P — простой многогранник, $\mathscr{R}_P$ —- многообразие, представимое как кубический подкомплекс куба, являющееся пространством Эйленберга-Маклейна $(RC'_P, 1)$. Универсальное накрытие над $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ также наследует структуру кубического комплекса и известно из [5] как комплекс Дэвиса $\tilde{X}_\Gamma$. Заметим, что его 1-остов совпадает с графом Кэли группы RC_Γ.

2. Расслоения над окружностью

Теорема 2.1. *(Д.Столлингс) Неприводимое компактное многообразие $\mathcal{M}$ расслаивается над окружностью S^1 тогда и только тогда, когда существует эпиморфизм $h : \pi_1(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, ядро которого конечно порождено.*

Определение 2.2. *Диагональным отображением $[0,1]^d \longrightarrow S^1$, определенным на d-мерном кубе, называется ограничение композиции $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, где первое отображение задается как $(x_1, ..., x_d) \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{d} \pm x_i$, а второе отображение — это стандартное накрытие. Диагональным отображением на кубическом комплексе $X \longrightarrow S^1$ является отображение, ограничение которого на каждый из кубов комплекса является диагональным отображением.*

Рассмотрим диагональное отображение $\psi : X \longrightarrow S^1$ из [1] известно, что оно поднимается до отображений универсальных накрытий $\widetilde{\psi} : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{R}$. $(d-1)$-симплекс $link(x)$ $(x \in \widetilde{X}^{(0)})$ назовем возрастающим (убывающим), если ограничение $\widetilde{\psi}$ на соответствующий куб имеет минимум (максимум) в x. *Возрастающим линком* $link_\uparrow(x)$ (убывающим $link_\downarrow(x)$) называется подкомплекс в $link(x)$, состоящий из всех возрастающих (убывающих) вершин и ребер.

Теорема 2.3. *[1] Если каждый возрастающий и убывающий линк не пуст и связен, то $\psi_* : \pi_1(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ эпиморфизм и $Ker\psi_*$ конечно порождено.*

Для определения диагонального отображения на кубическом комплексе X достаточно выбрать ориентацию на каждом из его ребер так, что если два ребра являются противоположными ребрами какого-то из квадратов комплекса, то направление на них выбрано одинаково (такая ориентация ребер называется когерентной). Тогда каждый l-куб можно отождествить с $[0,1]^l$, так что ориентация ребер совпадает с естественной ориентацией $[0,1]$. На каждом кубе определим диагональное отображение $[0,1]^l \longrightarrow S^1$ так, что первое отображение — это $(x_1, ..., x_l) \longmapsto x_1 + ... + x_l$. Все такие отображения склеиваются в кусочно-линейное диагональное отображение на комплексе X.

3. Комбинаторный критерий JNW

Пусть, как и раньше, Γ — граф, определяющий прямоугольную группу кокстера RC_Γ. Назовем $S \subset V(\Gamma)$ *правильным подмножеством*, если оба графа, индуцированные подмножествами S и $V(\Gamma) \setminus S$ не

а) б)

Рис. 1. Ориентация ребер грани : а) — когерентное направление ребер, б) — некогерентное направление ребер

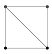
пусты и связны. Для каждой из вершин $v \in V(\Gamma)$ выберем подмножество $m_v \subseteq V(\Gamma)$ так, чтобы оно удовлетворяло двум свойствам:

1) $v \in m_v$;

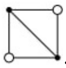
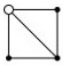
2) если v и w соединены ребром в Γ, то $w \notin m_v$.

Такие подмножества будем называть ***наборами***. Заметим, что разным вершинам может соответствовать один и тот же набор. Пусть $A = \mathbb{Z}_2^{|V(\Gamma)|}$ - абелинизация группы RC_Γ. Элементы этой группы можно (биективно) сопоставить с подмножествами $V(\Gamma)$, а групповую операцию — симметрической разности этих подмножеств. Таким образом, можно рассмотреть группу $M \leq A$, порожденную всеми наборами m_v. Рассмотрим действие группы M на множестве всех подмножеств $V(\Gamma)$, получающееся из действия M на A левыми сдвигами. Множество наборов $\{m_v : v \in V(\Gamma)\}$ назовем ***правильным***, если существует M-орбита, все элементы которой — правильные подмножества.

Пример 3.1. *Пример правильного множества наборов.*

Рассмотрим граф $\Gamma =$ . Для каждой из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 выберем набор следующим образом:

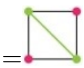
$$m_{v_1} = m_{v_3} = \{v_1, v_3\}, \; m_{v_2} = v_2, \; m_{v_4} = v_4$$

$m_1 =$ , $m_2 =$ , $m_3 =$ 

Это правильное множество наборов, поскольку существует орбита из правильных подмножеств:

$S =$ , $m_1 S =$ , $m_2 S =$ , $m_3 S =$ 

$m_2 m_3 S =$ , $m_1 m_2 S =$ , $m_1 m_3 S =$ , $m_1 m_2 m_3 S =$ 

Заметим, что орбита $S' =$  содержит неправильное подмножество $m_2 S' =$ 

Конструкция 3.2. *Гомоморфизм из коммутанта прямоугольной группы Кокстера в $\mathbb{Z}$.*

Пусть имеется правильное множество наборов $\{m_v : v \in V(\Gamma)\}$, M — порожденная им группа. А S — подмножество вершин, все элементы M-орбиты которого — правильные подмножества. Построим отображение, определенное на 0-кубах (вершинах) кубического комплекса $\widetilde{X}_\Gamma$ $h_0 : \widetilde{X}_\Gamma^{(0)} \longrightarrow \mathbb{Z}$ так, что вершина, соответствующая единице группы RC_Γ отображается в 0: $h_0(e) = 0$. Вершина, соответствующая порождающей группы g_i, отображается в 1, если $v_i \in S$ и в -1 в ином случае. На остальных вершинах комплекса

$\widetilde{X}_\Gamma$ доопределим h_0 следущим образом:

$$h_0\left(g_{i_1}...g_{i_k}g_{i_{k+1}}\right) = h_0\left(g_{i_1}...g_{i_k}\right) + 1, \text{если } v_{i_{k+1}} \in m_{v_{i_1}}...m_{v_{i_k}}S$$
$$h_0\left(g_{i_1}...g_{i_k}g_{i_{k+1}}\right) = h_0\left(g_{i_1}...g_{i_k}\right) - 1, \text{если } v_{i_{k+1}} \notin m_{v_{i_1}}...m_{v_{i_k}}S$$

Заметим, что $h_0(g_i^2) = 0$, так как если $v_i \in S$, то $v_i \notin m_v S$ (свойство 1 в определении набора) и наоборот. Также верно:

$$g_i g_j = g_j g_i \Rightarrow v_j \notin m_{v_i} \text{ (свойство 2 в определении набора)}$$
$$h_0\left(g g_i g_j\right) - h_0\left(g g_i\right) = h_0\left(g g_j\right) - h_0\left(g\right) \Rightarrow h_0\left(g g_i g_j\right) = h_0\left(g g_i g_j\right)$$

Таким образом мы однозначно определили h_0 на всех $\widetilde{X}_\Gamma^{(0)}$.

Рассмотрим RC'_Γ как подмножество $\widetilde{X}_\Gamma^{(0)}$. Так как в любом $g = g_{i_1}...g_{i_k} \in RC'_\Gamma$ каждая порождающая встречается четное количество раз, то $m_g = m_{v_{i_1}}...m_{v_{i_k}} = 0$. Следовательно, для любого $x \in RC_\Gamma$: $h_0\left(gx\right) = h_0\left(g\right) + h_0\left(x\right)$. h_0 ограничивается на RC'_Γ как гомоморфизм $h : RC'_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Теорема 3.3. *Пусть для Γ существует правильное множество наборов, тогда существует эпиморфизм $h : RC'_\Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ с конечно порожденным ядром.*

Доказательство. Опеделим h_0 как в конструкции выше. Ориентируем ребра $\widetilde{X}_\Gamma$ так, чтобы направление на каждом ребре было из вершины с меньшим значением h_0 к вершине с большим значением h_0. Заметим, что такая ориентация будет когерентной. Тогда для любой вершины комплекса g соответствующей элементу группы $g = g_{i_1}...g_{i_r}$ возрастающий $link_\uparrow(g)$ будет изоморфен подграфу Γ на вершинах $m_g S$, где $m_g = m_{v_{i_1}}...m_{v_{i_1}} \in M$, а убывающий $link_\downarrow(g)$ —подграфу на вершинах $V\left(\Gamma\right) \setminus m_g S$. Так как множество наборов $\{m_v : v \in V\left(\Gamma\right)\}$ — правильное, для каждой вершины убывающий и возрастающий линки связны. Из связности убывающих и возрастающих линков для каждой вершины $\widetilde{X}_\Gamma$ по теореме Бествина следует, что h-эпиморфизм с конечно порожденным ядром. □

Следовательно, заключаем, что в случае, когда граф смежности граней прямоугольного 3-многогранника P допускает правильное множество наборов, существует расслоение: $\mathscr{R}_P \longrightarrow S^1$.

Пример 3.4. *Пример правильного множества наборов для додекаэдра*

Пусть Γ - граф смежности граней додекаэдра (реберный остов икосаэдра), вершины которого раскрашены в цвета (рисунок). Каждая вершина $v \in V(\Gamma)$ не соединена ребром ни с одной вершиной ровно одного цвета c_i. Для каждой вершины v выберем набор, состоящий из 4-х вершин - v, вершина того же цвета, что и v и две вершины цвета c_i. Тогда для правильного подмножества S, состоящего из ровно одной вершины каждого цвета, такой набор будет правильным.

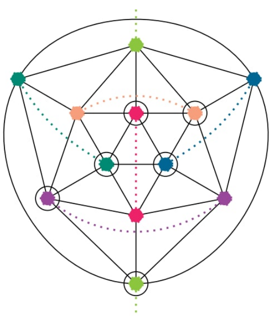


Рис. 2. Граф смежности граней додекаэдра

Важным классом комбинаторных многогранников, реализуемых как прямоугольные многогранники в пространстве $\mathbb{L}^3$, являются k-бочки (или многогранники Лебеля). Они устроены как две k-угольные грани, каждую из которых окружает k-пояс из пятиугольников.

Предложение 3.5. *Для любой k-бочки, граф смежности ее граней допускает множество правильных наборов.*

Доказательство. Случай, когда $k = 5$, был приведен выше. Пусть $k \geq 6$. Обозначим как Γ граф смежности граней k-бочки и рассмотрим следующую раскраску этого графа в $k+1$ цвет :

- Вершины $\{v_*, w_*\}$ двойственные к k-угольным граням раскрасим в цвет c_*.
- Пусть $v_1, ..., v_k$ и $w_1, ..., w_k$ — вершины, соединенные с v_* и w_* соответственно. Пронумеруем их таким образом, чтобы w_i была соединена с v_{i-2} и v_{i-1} для каждого $i \pmod k$. Каждую пару $\{v_i, w_i\}$ раскрасим в цвет c_i

Теперь выберем наборы для каждой из вершин. Пусть цвета c_*, c_i для $i \notin \left\{1, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ соответствуют наборам соответствующих вершин. Еще один набор пусть состоят из вершин $\left\{v_1, w_{\left[\frac{n}{2}\right]}, w_1, v_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$. Выберем правильное подмножество $S = \{v_*, w_1, v_2, ..., v_k\}$. Тогда любое множество вида mS или $V(\Gamma) \setminus mS$, где $m \in M$ будет содержать: ровно одну из вершин $\{v_*, w_*\}$, ровно одну вершин $\{v_i, w_i\}$ для каждого $i \notin \left\{1, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, и либо $\left\{v_1, w_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$ либо $\left\{w_1, v_{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\}$. Пусть $\overline{S}$ любое из таких подмножеств. Покажем, что граф, индуцированный $\overline{S}$ связен. Для этого обозначим как $V = \{v_1, ..., v_k\}$ и $W = \{w_1, ..., w_k\}$. Заметим, что так как одна из вершин $\{v_*, w_*\}$ лежит в множестве $\overline{S}$, достаточно показать, что каждая из вершин $V \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с некоторой вершиной из $W \cap \overline{S}$ и наоборот, каждая из вершин $W \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с некоторой вершиной из $V \cap \overline{S}$. Действительно, пусть $\{v_i, v_{i+1}, ..., v_k\} \subset V \cap \overline{S}$, так что $v_{i-1} \notin V \cap \overline{S}$. Так как хотя бы одной из вершин V (v_1 или $v_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ нет в $V \cap \overline{S}$, для любой из вершин $V \cap \overline{S}$ можно рассмотреть такую последовательность вершин). Так как $v_{i-1} \notin \overline{S}$,следовательно $w_{i-1} \in \overline{S}$. Следовательно, каждая из вершин $V \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с некоторой вершиной из $W \cap \overline{S}$. Аналогично, можно показать, что каждая из вершин $W \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с некоторой вершиной из $V \cap \overline{S}$. Следовательно, все такие графы на множествах вида mS, $V(\Gamma) \setminus mS$ связны. □

Определение 3.6. *Пусть P и Q два простых 3-многогранника, с k-угольными гранями G_1 и G_2. Назовем многогранник R - связной суммой многогранников P и Q ($R = P \sharp Q$), если R получается путем склейки P и Q вдоль граней G_1 и G_2 и последующего удаления этой грани вместе с принадлежащими ей ребрами.*

Из [2] известно, что если у P и Q существует прямоугольная реализация в $\mathbb{L}^3$, то и R тоже реализуем в этом пространстве как прямоугольный многогранник. Используя этот факт, можно применить критерий существования расслоения универсального накрытия над окружностью на еще один тип прямоугольных многогранников. А именно на связные суммы n ($n \geq 1$) одинаковых k-бочек ($k \geq 6$) вдоль их k-угольных граней. Такие многогранники будем обозначать R_k^n. Они состоят из двух k-угольных граней, двух k-поясов из 5-угольников, окружающих две эти грани и $n-1$ k-поясов из шестиугольников, находящихся между двух k-поясов из пятиугольников.

Предложение 3.7. *Для любого $k \geq 6$, любого $n \geq 1$ существует множество правильных наборов для графа смежностей многогранника R_k^n.*

Доказательство. Пусть Γ - граф смежности граней R_k^n. Обозначим как $\{v_*, w_*\}$ вершины двойственные к k-угольным граням. Занумеруем пояса B_i многогранника R_k^n так, что B_1 это пояс, окружающий грань двойственную к v_*, B_{n+1} это пояс, окружающий грань, двойственную к w_*, а B_i пояс лежит между B_{i-1} и B_{i+1}. Далее, множество вершин соответствующее поясу с нечетным номером B_{2i-1} ($i \geq 1$) обозначим как V_i, а множество вершин соответствующее поясу с четным номером B_{2i} ($i \geq 1$) обозначим как W_i. Занумеруем вершины в $V_1 = \left\{v_1^1, ..., v_k^1\right\}$, $W_1 = \left\{w_1^1, ..., w_k^1\right\}$ так, чтобы w_i^1 была соединена с v_{i-2}^1 и v_{i-1}^1 для каждого $i \pmod k$. В остальных $V_i = \left\{v_1^i, ..., v_k^i\right\}$, $W_i = \left\{w_1^i, ..., w_k^1\right\}$ вершины занумеруем аналогично: если вершина w_j^i ($i \neq \frac{n+1}{2}$) соединена с вершинами v_{j-2}^i, v_{j-1}^i, то она соединена и с v_{j-2}^{i+1}, v_{j-1}^{i+1}. И наоборот, если v_j^i ($i \neq \frac{n+2}{2}$) соединена с вершинами w_{j+2}^i, w_{j+1}^i, то она соединена и с w_{j+2}^{i+1}, w_{j+1}^{i+1}. Раскрасим все наши вершины в

$k+1$ цвет: v_*, w_* в c_*, а вершины $v_i^1, ..., v_i^{[\frac{n+2}{2}]}, w_i^1, ..., w_i^{[\frac{n+1}{2}]}$ в цвет c_i. Теперь, по аналогии с доказательством предыдущей теоремы, выберем наборы так, что множества вершин цветов c_*, c_i $(i \notin 1, [\frac{k}{2}])$ совпадают с наборами, а еще один набор состоит из вершин $\left\{v_1^1, ..., v_1^{[\frac{n+2}{2}]}, w_{[\frac{k}{2}]}^1, ..., w_{[\frac{k}{2}]}^{[\frac{n+1}{2}]}, w_1^1, ..., w_1^{[\frac{n+1}{2}]}, v_{[\frac{k}{2}]}^1, ..., v_{[\frac{k}{2}]}^{[\frac{n+2}{2}]}\right\}$. Пусть M — группа, порожденная этими наборами. Правильное подмножество S выберем как $S = \left\{v_*, w_1^1, v_2^1, ..., v_k^1, w_1^2, v_2^2, ..., v_k^2, ..., w_1^{[\frac{n+1}{2}]}, v_2^{[\frac{n+2}{2}]}, ..., v_k^{[\frac{n+2}{2}]}\right\}$. Тогда, так как ровно одна из вершин v_*, w_* лежит в любом множестве $\overline{S}$ вида mS или $V(\Gamma) \setminus mS$, где $m \in M$, достаточно доказать, что любая вершина из $V_i \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с какой-нибудь вершиной из $W_i \cap \overline{S}$ и какой-нибудь вершиной из $W_{i-1} \cap \overline{S}$, а любая вершина из $W_i \cap \overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с какой-нибудь вершиной из $V_i \cap \overline{S}$ и какой-нибудь вершиной из $V_{i+1} \cap \overline{S}$. Из доказательства предыдущей теоремы и нашей нумерации вершин следует, что это условие выполнено. Следовательно, каждая вершина из $\overline{S}$ лежит в одной компоненте связности с $\{v_*, w_*\} \cap \overline{S}$, а значит граф, индуцированный множеством $\overline{S}$ связен. □

Заключение

В работе был рассмотрен достаточный критерий существования расслоения над окружностью гиперболических многообразий являющихся универсальными накрытиями над прямоугольными многогранниками, предложенный в работе [3]. Этот критерий дает утвердительный ответ для некоторых классов трехмерных прямоугольных многогранников, в частности для k-бочек. Вопрос применимости этого критерия для всех многогранников Погорелова на данный момент остается открытым. Однако, ряд результатов о комбинаторном строении прямоугольных многогранников, в частности, результат о том, что любой такой многогранник может быть получен с помощью операций над k-бочками, даёт простор для исследования расширения этого критерия на весь класс многогранников Погорелова.

Список литературы

[1] M. Bestvina, N. Brady, Morse theory and finiteness properties of groups, Inventiones mathematicae, (1997), 129, 445-470.

[2] В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, М. Масуда, Т.Е. Панов, С. Парк. Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками. Успехи математических наук, (2017), 72:2.

[3] K.Jankiewicz, S. Norin and D.T. Wise, Virtually fibering right-angled Coxeter groups, Journ. of the Inst. of Math. of Jussieu, (2021), 20, 3.

[4] Т.Е. Панов, Я.А. Веревкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Математический сборник. 207:11 (2016), 105–126.

[5] M. Davis. The Geometry and Topology of Coxeter Groups. Princeton University Press , (2008).

[6] V.M. Buchstaber, N.Yu. Erokhovets, Constructions of families of three-dimensional polytopes, characteristic patches of fullerenes, and Pogorelov polytopes, Izv. RAN. Ser. Mat., 81:5 (2017), 15–91.

[7] Е.Б. Винберг, Гиперболические группы отражений, Успехи математическихх наук, (1985), 40, 1(241).

Приложение

Пусть $\mathcal{M} = K(RC'_\Gamma, 1)$-замкнутое 3-многообразие, расслаивающееся над окружностью S^1 со слоем F. Тогда F-замкнутое 2-многообразие, то есть полностью определяется своим родом $g(F)$. Рассмотрим точную последовательность индуцированную этим расслоением.

$$0 \longrightarrow \pi_1 F \longrightarrow \pi_1 \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Теперь рассмотрим абелинизацию этой последовательности:

$$0 \longrightarrow H_1(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \tag{3}$$

Следовательно, $rankH_1(F) = rankH_1(\mathcal{M}) - 1$. Заметим, что $g(F)$ однозначно определяется из $rankH_1(F)$. Так как определяющее соотношение в группе $\pi_1(F)$ лежит в коммутанте свободной группы: $rankH_1(F) = 2g(F)$.

Из [4] известно, что $H_1(\mathfrak{R}_K) = \oplus_{J\subseteq[m]}\widetilde{H_0}(K_J)$, где $\mathfrak{R}_K = K(RC'_\Gamma, 1)$, K — флагизация графа Γ, а K_J — подкомлекс на множестве J. Следовательно, $rankH_1(\mathcal{M}) = \sum_{i=2}^{N}(i-1)Q_i$, где N— максимальное количество компонент в подграфе Γ, Q_i — количество подграфов Γ с i компонентами связности. Попробуем посчитать это число для случая, когда Γ — граф смежности k-бочки, или, что тоже самое, вычислить род слоя для расслоения над окружностью универсального накрытия над k-бочкой.
Посчитаем количество подграфов с m компонентами связности ($m \geq 2$).
Разобьем множество $\mathcal{A}$ всех подграфов графа Γ на три непересекающихся множества: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \coprod \mathcal{A}_1 \coprod \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_i$ — это множество подграфов Γ содержащих ровно i k-валентных вершин.

Множество $\mathcal{A}_0$

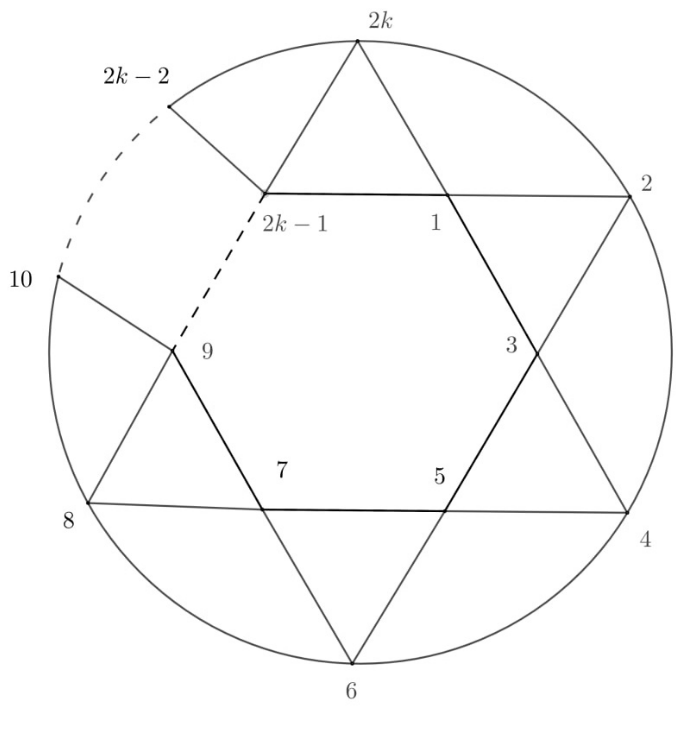


Рис. 3. Нумерация вершин в графе смежности k-бочки без обеих k-валентных вершин

Рассмотрим сначала множество $\mathcal{A}_0$. Это множество совпадает с множеством подграфов графа смежности двух k-поясов. Занумеруем вершины этого графа так, как показано на рисунке. Рассмотрим произвольный подграф с m компонентами связности. Пусть $[\alpha_1,\beta_1]$,...,$[\alpha_m,\beta_m]$ -границы этих компонент. То есть, все вершины с номером $j : j \notin [\alpha_i,\beta_i]$ (ни для какого i) не включены в подграф, и если $(j,j+1) \subseteq [\alpha_i,\beta_i]$ для какого-то i, то хотя бы одна из вершин с номерами $j, j+1$ включена в подграф. Вершины с номерами α_i,β_i мы предполагаем включенными в подграф. Так как нам необязательно нумеровать компоненты связности, будем считать что α_1 - наименьшее из α_i. Введем обозначения:

$$p_i = \beta_i - \alpha_i$$
$$q_i = \alpha_{i+1} - \beta_i$$

причем $\sum_{i=1}^m (p_i+1) + \sum_{i=1}^m (q_i-1) = 2k$, $p_i \geq 0$, $q_i \geq 3$. Таким образом, для задания подграфа с m-компонентами связности, достаточно задать α_1, $\overline{p} = (p_1,...,p_m)$, $\overline{q} = (q_1,...,q_m)$, связные компоненты с границами (α_i,β_i). Так как единственное условие на связность компоненты с заданными границами- отсутствие подряд идущих вершин не включенных в подграф, нетрудно заметить, что количество различных связных компонент с фиксированными границами (α_i,β_i) равно $F(p_i+1)$, где $F(n)$ — n-член последовательности Фибоначчи ($F(1) = 1$, $F(2) = 1$). То есть, при фиксированных α_1, $\overline{p}$, $\overline{q}$ число различных подграфов с m-компонентами связности равно $F(p_1+1)...F(p_m+1)$ Временно зафиксируем $\alpha_1 = 1$. Для удобства переобозначим $q_i := q_i - 3$. Тогда равенство выше перепишется как $\sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m q_i = 2k - 3m$ и количество различных подграфов с m компонентами связности будет равно

$$\sum_{r=0}^{2k-3m} \sum_{\overline{q}\in\mathbb{Z}^m_{\geq}:\sum q_i = 2k-3m-r} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}^m_{\geq}:\sum p_i = r} F(p_1+1)...F(p_m+1) = \sum_{r=0}^{2k-3m} C^{m-1}_{2k-2m-r-1} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}^m_{\geq}:\sum p_i = r} F(p_1+1)...F(p_m+1)$$

Пусть теперь $\alpha_1 = i$. Так как α_1-наименьшее, следовательно $\alpha_m \leq 2k$. Тогда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m q_i = 2k-3m \\ \sum_{i=1}^{m-1} p_i + \sum_{i=1}^{m-1} q_i \leq 2k-3m-i+3 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m q_i = 2k-3m \\ p_m + q_m \geq i-3 \end{cases}$$

Тогда при фиксированном $\overline{p} : \sum_{i=1}^m p_i = r$, имеются следующие варианты:

1) если $p_m \geq i-3$, то подходят все неотрицательные решения $\sum_{i=1}^m q_i = 2k-3m-r$, их количество равно $C^{m-1}_{2k-2m-r-1}$;

2) если $p_m < i-3$, то перебор q_m от $i-p_m-3$ до $2k-3m-r$ дает $C^{m-1}_{2k-3m-r-i+p_m+4}$ вариантов.

Тем самым, при $\alpha_1 = i$ количество подграфов с m-компонентами связности равно:

$$\sum_{r=0}^{2k-3m} C^{m-1}_{2k-2m-r-1} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}^m_{\geq}:\sum p_i = r, p_m \geq i-3} F(p_1+1)...F(p_m+1) +$$
$$+ \sum_{r=0}^{2k-3m} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}^m_{\geq}:\sum p_i = r, p_m < i-3} F(p_1+1)...F(p_m+1) C^{m-1}_{2k-3m-r-i+p_m+4}$$

(где последнее слагаемое включено в сумму только при $i \geq 4$) Суммирование по i от 1 до $2k-4m+1$ дает полное количество подграфов с m-компонентами связности в $\mathcal{A}_0$.

Множество $\mathcal{A}_1$

Рассмотрим теперь множество подграфов с одной k-валентной вершиной $\mathfrak{v}_1$. Так как выбор такой вершины из двух произволен, сначала зафиксируем одну такую вершину, а потом умножим на два. Пронумеруем вершины как показано на рисунке. Тогда количество компонент связности любого такого подграфа

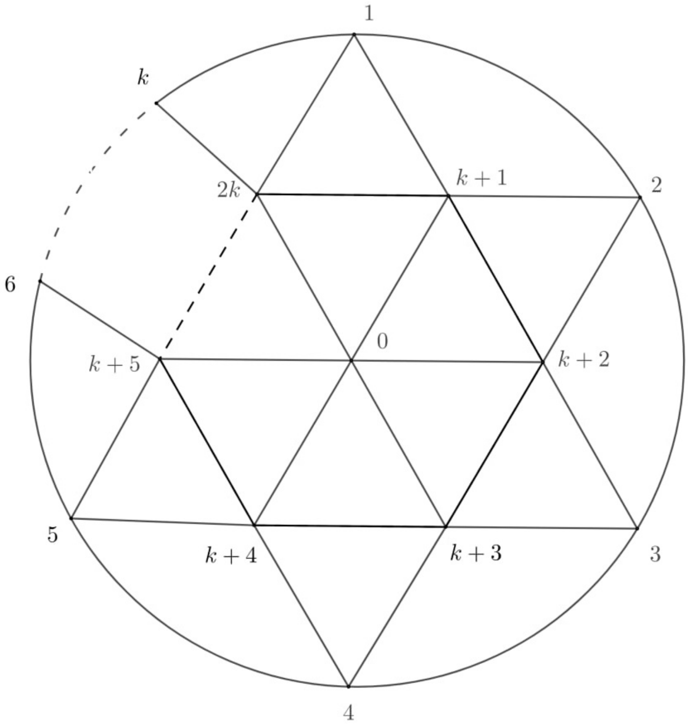


Рис. 4. Нумерация вершин в графе смежности k-бочки без одной k-валентной вершины

равно количеству компонент связности целиком лежащих в $\{1, ..., k\} + 1$. Следовательно, для исследования количества подграфов с m компонентами связности необходимо посчитать сколькими способами можно выбрать $m - 1$ компоненту связности в цикле $\{1, ..., k\}$. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$,...,$[\alpha_{m-1}, \beta_{m-1}]$ — границы этих компонент связности (любая вершина с номером $j \in [\alpha_i, \beta_i]$ включается в подграф), α_1—наименьшая из α_i. Введем обозначения:

$$p_i = \beta_i - \alpha_i$$
$$q_i = \alpha_{i+1} - \beta_i$$

причем $\sum_{i=1}^{m-1}(p_i + 1) + \sum_{i=1}^{m-1}(q_i - 1) = k$, $p_i \geq 0$, $q_i \geq 2$.
Временно зафиксируем $\alpha_1 = 1$. Тогда для любых фиксированных $\overline{p}$, $\overline{q}$ количество способов выбрать подграф с m компонентами связности равно количеству способов выбрать любые из $k - \sum_{i=1}^{m-1}(p_i + 2)$ вершин, соединенных с k-валентной (кроме тех, что соединены с выбранными компонентами связности), умноженному на количество способов выбрать любые из $k - \sum_{i=1}^{m-1}(p_i + 3)$ (не включенные в компоненты связности и несоседние с ними). Для удобства переобозначим $q_i := q_i - 2$. Тогда количество m-связных подграфов с фиксированным $\alpha_1 = 1$ равно:

$$\sum_{r=0}^{k-3(m-1)} \sum_{\overline{q} \in \mathbb{Z}_{\geq}^{m-1} : \sum q_i = k-2(m-1)-r} \sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}_{\geq}^{m-1} : \sum p_i = r} 2^{2k-5(m-1)-2r} +$$
$$+ \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} \sum_{\overline{q} \in \mathbb{Z}_{\geq}^{m-1} : \sum q_i = k-2(m-1)-r} \sum_{\overline{p} \in \mathbb{Z}_{\geq}^{m-1} : \sum p_i = r} 2^{k-2(m-1)-r} =$$
$$= \sum_{r=0}^{k-3(m-1)} 2^{2k-5(m-1)-2r} C_{r+m-2}^{m-2} C_{k-m-r}^{m-2} + \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} 2^{k-2(m-1)-r} C_{r+m-2}^{m-2} C_{k-m-r}^{m-2}$$

Пусть теперь $\alpha_1 = i$ $(i \geq 2)$. Так как α_1-наименьшее, следовательно $\alpha_{m-1} \leq k$. Тогда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m-1} p_i + \sum_{i=1}^{m-1} q_i = k - 2(m-1) \\ \sum_{i=1}^{m-2} p_i + \sum_{i=1}^{m-2} q_i \leq k - 2(m-2) - i \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^{m-1} p_i + \sum_{i=1}^{m-1} q_i = k - 2(m-1) \\ p_{m-1} + q_{m-1} \geq i - 2 \end{cases}$$

Тогда при фиксированном $\overline{p} : \sum_{i=1}^{m-1} p_i = r$, имеются следующие варианты:

1) если $p_{m-1} \geq i - 2$, то подходят все неотрицательные решения $\sum_{i=1}^{m-1} q_i = k - 2(m-1) - r$, их количество равно C_{k-m-r}^{m-2};

2) если $p_{m-1} < i-2$, то перебор q_{m-1} от $i-p_{m-1}-2$ до $k-2(m-1)-r$ дает $C_{k-m-r-i+p_{m-1}-1}^{m-1}$ вариантов.

Тем самым, при $\alpha_1 = i$ количество подграфов с m-компонентами связности равно:

$$\sum_{r=i-2}^{k-3(m-1)} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}_{\geq}^{m-1}: \sum p_i = r,\ p_{m-1}\geq i-2} C_{k-m-r}^{m-2} 2^{2k-5(m-1)-2r} +$$
$$+ \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}_{\geq}^{m-1}: \sum p_i = r,\ p_{m-1}\geq i-2} C_{k-m-r}^{m-2} 2^{k-2(m-1)-r} +$$
$$+ \sum_{r=0}^{k-3(m-1)} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}_{\geq}^{m-1}: \sum p_i = r, p_{m-1}< i-2} C_{k-m-r-i+p_{m-1}-1}^{m-1} 2^{2k-5(m-1)-2r} +$$
$$+ \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} \sum_{\overline{p}\in\mathbb{Z}_{\geq}^{m-1}: \sum p_i = r, p_{m-1}< i-2} C_{k-m-r-i+p_{m-1}-1}^{m-1} 2^{k-2(m-1)-r} =$$
$$= \sum_{r=i-2}^{k-3(m-1)} C_{k-m-r}^{m-2} 2^{2k-5(m-1)-2r} C_{r+m-i}^{m-2} + \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} C_{k-m-r}^{m-2} 2^{k-2(m-1)-r} C_{r+m-i}^{m-2} +$$
$$+ \sum_{r=0}^{k-3(m-1)} 2^{2k-5(m-1)-2r} \sum_{l=0}^{i-3} C_{r-l+m-3}^{m-3} C_{k-m-r-i+l-1}^{m-1} + \sum_{r=k-3(m-1)+1}^{k-2(m-1)} 2^{k-2(m-1)-r} \sum_{l=0}^{i-3} C_{r-l+m-3}^{m-3} C_{k-m-r-i+l-1}^{m-1}$$

(последние два слагаемых включены в сумму при $i \geq 3$).

Суммируя эти выражения по i от 1 до $k - 3(m-1) + 1$, а после умножив на два, можно найти полное количество подграфов с m-компонентами связности в $\mathcal{A}_1$.

Множество $\mathcal{A}_2$

Рассмотрим оставшееся множество графов $\mathcal{A}_2$. Так как каждая из вершин лежит в одной компоненте связности с какой-то из k-валентных вершин, максимальное число компонент в таком графе равно двум. Посчитаем все такие графы несвязные графы. Занумеруем вершины циклов двойственных к поясам как в случае множества $\mathcal{A}_0$. Если вершина с номером i включена в несвязный подграф, то вершина с номером $i+1$ не включена, а если вершина с номером i не включена в несвязный подграф, то вершина с номером $i+1$ может быть как включена, так и не включена в подграф. Используя это простое соображение, нетрудно посчитать, что количество несвязных графов равно $F(2k+2) - F(2k-2)$.

Таким образом, было подсчитано общее количество графов с m компонентами связности. Общая формула по причине громоздкости здесь не приводится .