Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Гомологии петель момент-угол комплексов, соответствующих флаговым комплексам

Курсовая работа
студента 3 курса 303 группы
Граумана Владислава Александровича

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2021 г.

1. Введение

В данной работе рассматривается задача вычисления алгебр Понтрягина для некоторых момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — пространств с действием алгебраического тора, каждое из которых строится по симплициальному комплексу $\mathcal{K}$. Они играют ключевую роль в торической топологии, сравнительно новой области математики. Здесь мы рассматриваем лишь алгебро-топологические аспекты теории момент-угол комплексов, однако они могут иметь и богатые геометрические и дифференциальные структуры.

Здесь ставится задача вычисления для флаговых комплексов, соответствующих графам препятствий, то есть графам, наличие которых в 1-остове симплициального комплекса обеспечивает существование нетривиальных произведений Масси в когомологиях момент-угол комплекса. Это, в свою очередь, означает наличие кубических соотношений в алгебре Понтрягина. В некоторых случаях подобные соотношения найдены явно, а также установлена граница размерностей, в которых они существуют.

2. Предварительные определения и результаты

Подмножество $\mathcal{K} \subseteq 2^{[m]}$, $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ называется *симплициальным комплексом* на множестве $[m]$, если из того, что $I \in \mathcal{K}$, следует, что всякое $L \subseteq I$ также лежит в $\mathcal{K}$. Элементы $I \in \mathcal{K}$ называются *симплексами* $\mathcal{K}$, *размерность* симплекса I есть количество его элементов минус единица, симплексы размерности ноль называются *вершинами* $\mathcal{K}$, которые мы отождествляем с $1, 2, \ldots, m$. Размерность комплекса $\mathcal{K}$ есть максимум среди размерностей его симплексов. Для каждого симплекса I определён *полный подкомплекс* $\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} : J \subseteq I\}$.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если любое множество его вершин, попарно соединённых рёбрами, образует симплекс. Подмножество $I \subseteq [m]$ называют *пропущенной гранью* $\mathcal{K}$, если $I \notin \mathcal{K}$, но всякое $L \subseteq I$ лежит в $\mathcal{K}$. Комплекс флаговый тогда и только тогда, когда всякая его пропущенная грань имеет ровно две вершины.

Для каждого $I \subseteq [m]$ и топологической пары (X, A) определено подмножество X^m

$$(X, A)^I = \prod_{I \in \mathcal{K}} X \times \prod_{I \notin \mathcal{K}} A.$$

Объединение этих множеств по всем симплексам $I \in \mathcal{K}$ даёт *полиэдральное произведение*, соответствующее $\mathcal{K}$:

$$(X, A)^\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I \subseteq X^m.$$

Произведение $(X, pt)^\mathcal{K}$ обозначают как $X^\mathcal{K}$. Мы будем работать лишь с частным случаем полиэдральных произведений. Рассмотрим единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^m$:

$$(D^2)^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leqslant 1,\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Тогда *момент-угол комплексом*, соответствующему симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называют

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = (D^2, S^1)^\mathcal{K} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subseteq (D^2)^m.$$

Также мы будем рассматривать множество $(BS^1)^\mathcal{K} = (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$.

Сформулируем ряд важных результатов, используемых в работе. Здесь и далее $\mathbf{k}$ — поле или кольцо $\mathbb{Z}$.

Теорема 1 ([BP]). *Гомотопический слой вложения $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ есть $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.*

Теорема 2 ([BP]). *Имеется точная последовательность гомотопических алгебр Ли*

$$0 \longrightarrow \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow CL(u_1, \ldots, u_m) \longrightarrow 0,$$

где $CL(u_1, \ldots, u_m)$ — свободная коммутативная алгебра Ли, $\deg u_i = 1$, и точная последовательность алгебр Понтрягина (гомологий петель)

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}; \mathbf{k}) \longrightarrow \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \longrightarrow 0,$$

где $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ — внешняя алгебра на u_i, $\deg u_i = 1$.

Таким образом, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}; \mathbf{k})$ вкладывается в $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}; \mathbf{k})$ в качестве коммутаторной подалгебры.

Группа $\pi_*(X)$ имеет стандартную структуру алгебры, задаваемую произведением Уайтхеда $[\cdot,\cdot]_w$. Сопряжённым к нему в $\pi_*(\Omega X)$ является произведение Самельсона $[\cdot,\cdot]_s$. $H_*(\Omega X)$ имеет в качестве умножения произведение $\star$, определённое Л.С. Понтрягиным. Все эти три умножения связаны классическим результатом Самельсона.

Теорема 3. *Существует выбор изоморфизма сопряжения*

$$t : \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$$

такой, что

$$t[\alpha, \beta]_w = (-1)^{k-1}[t\alpha, t\beta]_s,$$

где $\alpha \in \pi_k(X), \beta \in \pi_l(X)$. Если $h : \pi_n(\Omega X) \to H_n(\Omega X)$ есть гомоморфизм Гуревича, то

$$h[\varphi, \psi]_s = h(\varphi) \star h(\psi) - (-1)^{pq} h(\psi) \star h(\varphi),$$

при $\varphi \in \pi_p(\Omega X)$, $\psi \in \pi_q(\Omega X)$.

Тогда из результата Милнора—Мура следует, что $H_*(\Omega X, \mathbb{Q})$ есть универсальная обёртывающая градуированной алгебры Ли $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, и последняя есть подалгебра примитивных элементов в биалгебре $H_*(\Omega X)$.

Во флаговом случае гомотопическая алгебра Ли и алгебра Понтрягина $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускает полное описание мультипликативных образующих, а в случае $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$ имеет описание и соотношений.

Теорема 4 ([BP]). *Для каждого флагового комплекса $\mathcal{K}$ имеются изоморфизмы*

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \cong T(u_1, \ldots, u_m)/\langle u_i^2, u_i u_j + u_j u_i \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\rangle,$$
$$\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q} \cong FL(u_1, \ldots, u_m)/\langle [u_i, u_i], [u_i, u_j] \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\rangle,$$

где $FL(\cdot)$ — свободная алгебра Ли, $\deg u_i = 1$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс. Тогда алгебра Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ мультипликативно порождена образующими вида*

$$[u_j, u_i], [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \ldots, [u_{k_1}, [u_{k_2}, \ldots, [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \ldots]],$$

где $k_1 < \cdots < k_p < j > i$, и $k_s \neq i$ для каждого s, причём i — наименьшая вершина в связной компоненте комплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}}$, не содержащей j.

3. Основные вычисления

Как показано в статье [GL], момент-угол комплекс содержит в когомологиях нетривиальное произведение Масси тогда и только тогда, когда его одномерный остов содержит подграф, изоморфный одному из восьми графов препятствий, представленных на рисунке 2. Для алгебр Понтрягина, как уже было отмечено, это влечёт существование кубического соотношения, то есть соотношения, в котором имеется дважды итерированный коммутатор. Здесь мы находим алгебры для флаговых комплексов этих графов. Вычисления будут производиться поэтапно, сначала для всевозможных полных подкомплексов на пяти вершинах, затем для графов в целом. Для вычислений привлекался компьютерный пакет SuperLie ([SL]) для Wolfram Mathematica. Так как образующие алгебры известны, требуется описать соотношения.

Для начала отметим, что любой гомотопически тривиальный полный подкомплекс на пяти вершинах любого из восьми комплексов не даст вклада в соотношения алгебры. Действительно, каждый такой подкомплекс можно получить последовательным приклеиванием 1- и 2-симплексов, каждый раз ровно по одной общей грани. Так как $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ можно разложить в терминах двух комплексов, соответствующим склеиваемым симплициальным подкомплексам ([BP]), нетрудно видеть, что в каждом случае момент-угол комплекс будет иметь тип букета сфер, каждая из которых будет соответствовать образущей из теоремы 5, попавшей в наш подкомплекс.

Рассмотрим теперь всевозможные нестягиваемые подкомплексы на пяти вершинах во флаговых комплексах графов. Каждый из них будет изоморфен одному из пяти комплексов, указанных на рисунке 1. Степени элементов далее указываются относительно градуировки в $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, или, что равносильно, в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.

Для первого из них, пятиугольника, не имеется соотношений степеней $\leqslant 4$ в силу стягиваемости его собственных подкомплексов. Рассмотрим всевозможные коммутаторы степени пять, содержащие индекс каждой вершины по одному разу, так как коммутаторы с повторениями индексов будут лежать в алгебрах подкомплексов на $\leqslant 4$ вершинах, где нет соотношений. Таковых всего пять штук, распишем их в базисе гомотопической алгебры $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ при помощи SuperLie. Вычисления показывают, что в алгебре Ли, а, следовательно, и в алгебре Понтрягина, имеется одно соотношение

$$[a_{13}, b_{452}] - [a_{14}, b_{352}] - [a_{24}, b_{153}] + [a_{25}, b_{341}] - [a_{35}, b_{241}] = 0,$$

где $a_{ij} = [u_i, u_j], b_{ijk} = [u_i, [u_j, u_k]]$ — канонические образующие из теоремы 5. Это согласуется с результатом в [Ver], причём, как отмечено в [Ver], эти коммутаторы дают гомотопическую эквивалентность $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (S^3 \times S^4)^{\#5}$, откуда, как показывает модель Адамса—Хилтона ([AH]), следует отсутствие прочих соотношений.

Аналогичные вычисления для остальных четырёх комплексов дают соотношение

$$[a_{15}, a_{34}] = [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}] = 0$$

для второго комплекса на рис. 1,

$$[a_{12}, a_{45}] = [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}] = 0$$

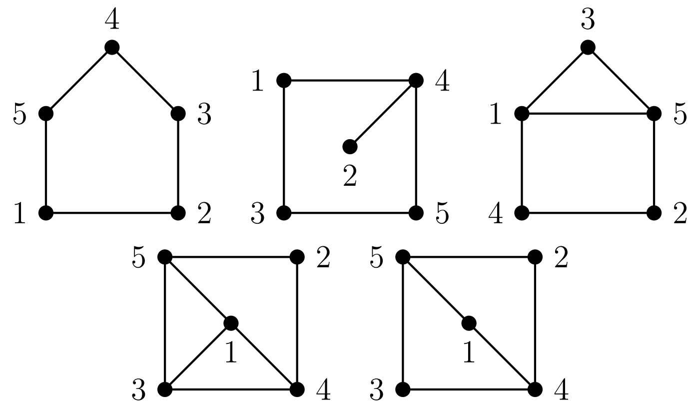

Рис. 1. Графы подкомплексов на пяти вершинах

для третьего комплекса,

$$[a_{23}, a_{45}] = [a_{12}, a_{45}] = [a_{45}, b_{132}] = 0$$

в алгебре четвёртого, а также

$$[a_{23}, a_{45}] = [a_{12}, a_{45}] = [a_{13}, a_{45}] = [a_{45}, b_{132}] = [a_{45}, b_{231}] = 0$$

у пятого комплекса. Так как не всегда удаётся определить гомотопический тип соответствующих $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, мы не можем исключить наличие других соотношений, однако, как показывают компьютерные вычисления с рассмотрением всевозможных коммутаторов (теперь, возможно, с повторением вершин), не существует соотношений степени $\leqslant 7$, за исключением указанных.

Опишем теперь соотношения в степени шесть. Для этого поступим схожим образом, что и в размерностях $\leqslant 5$. Выпишем всевозможные коммутаторы степени шесть через канонические образующие, используя при этом то, что достаточно рассмотрения коммутаторов, содержащих индекс каждой вершины ровно по одному разу, так как подкомплексы на пяти вершинах уже рассмотрены.

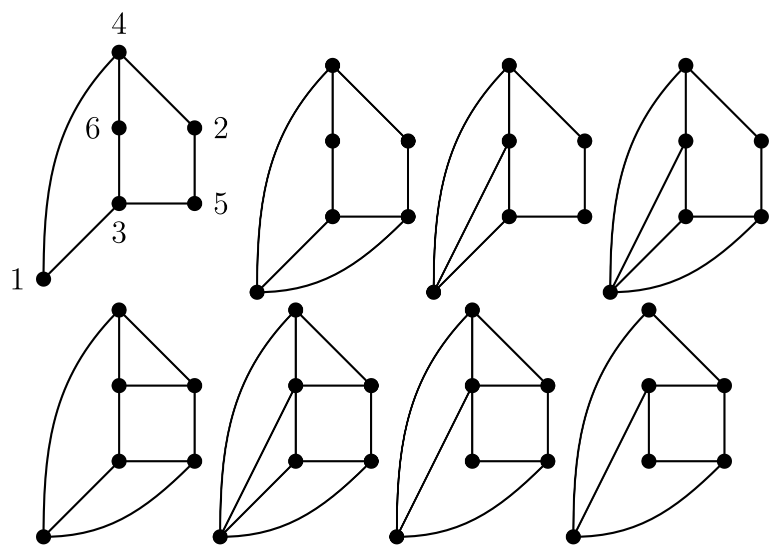

Рис. 2. Графы препятствий

Для, к примеру, первого графа $\mathcal{K}_6$ на рис. 2 мы имеем три возможных коммутатора такого вида с учётом соотношений коммутирования и тождества Якоби в алгебре Ли:

$$[a_{34},[a_{56},a_{12}]],[a_{12},[a_{34},a_{56}]],[b_{132},b_{465}],$$

среди которых первый равен нулю, что уже является следствием соотношения $[a_{56},a_{12}]=0$, а остальные два совпадают, как показывает разложение в базисе алгебры Ли.

Соотношения в размерности шесть имеются у всех графов на рис. 2. Они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}[a_{23},[a_{16},a_{45}]]+[a_{34},c_{2561}]+[a_{45},[a_{23},a_{16}]]-[b_{354},b_{261}]-[b_{243},b_{561}]=\\=[a_{23},c_{1465}]-[a_{26},[a_{15},a_{34}]]+[a_{34},c_{1562}]+[a_{56},[a_{12},a_{34}]]-[b_{132},b_{465}]+\\+[b_{362},b_{154}]-[b_{165},b_{243}]-[b_{162},b_{354}]-[a_{45},[a_{23},a_{16}]]=0\end{gathered}$$

для первого комплекса,

$$\begin{gathered}[a_{23},[a_{16},a_{45}]]+[a_{34},c_{2561}]+[a_{45},[a_{23},a_{16}]]-[b_{354},b_{261}]-[b_{243},b_{561}]=\\=[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{354},b_{261}]+[b_{162},b_{354}]+\\+[b_{132},b_{465}]+[a_{45},c_{1362}]-[a_{45},[a_{23},a_{16}]]=0\end{gathered}$$

для второго комплекса,

$$\begin{gathered}[a_{23},c_{1465}]+[a_{34},c_{1562}]-[a_{45},c_{1362}]-[a_{26},[a_{15},a_{34}]]+[a_{56},[a_{12},a_{34}]]-\\-[b_{132},b_{465}]+[b_{362},b_{154}]-[b_{162},b_{354}]-[b_{165},b_{243}]=0\end{gathered}$$

в случае третьего,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[a_{45},c_{1362}]+[b_{132},b_{465}]+[b_{162},b_{354}]=0$$

у четвёртого комплекса,

$$\begin{gathered}[a_{23},[a_{16},a_{45}]]-[a_{56},[a_{12},a_{34}]]+[b_{132},b_{465}]-[b_{243},b_{561}]=\\=[a_{16},[a_{23},a_{45}]]-[a_{34},[a_{56},a_{12}]]-[b_{243},b_{561}]-[b_{354},b_{261}]=0\end{gathered}$$

у пятого,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{132},b_{465}]=0$$

у шестого,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{231},b_{465}]+[a_{56},c_{1243}]=[a_{56},c_{1243}]-[b_{132},b_{465}]=0$$

в алгебре седьмого, и, наконец,

$$\begin{gathered}[a_{12},c_{3564}]+[b_{132},b_{564}]+[b_{231},b_{564}]=[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{132},b_{465}]+[b_{231},b_{465}]=\\=[a_{56},c_{1243}]-[b_{132},b_{465}]=0\end{gathered}$$

для восьмого комплекса. Порядок вершин для каждого комплекса аналогичен указанному на рис. 2.

Теперь, пользуясь полученными результатами, определим все вхождения комплексов на пяти вершинах, указанных ранее, во флаговые комплексы графов препятствий в качестве изоморфных подкомплексов. Выпишем соотношения с необходимыми изменениями индексов и добавим соотношения в размерности шесть. Имеем следующий результат.

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}) \cong T(a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{154}, b_{162}, b_{165}, b_{243}, b_{251},$$
$$b_{261}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{561}, b_{562}, c_{1362}, c_{1465}, c_{1562}, c_{2561})/I_1$$
$$I_1 \supseteq \langle [a_{16}, a_{34}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{15}, b_{243}] - [a_{23}, b_{154}] - [a_{34}, b_{251}] + [a_{45}, b_{132}],$$
$$[a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}], [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}], [a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] + [a_{34}, c_{2561}]+$$
$$+[a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] - [b_{354}, b_{261}] - [b_{243}, b_{561}], [a_{23}, c_{1465}] - [a_{26}, [a_{15}, a_{34}]]+$$
$$+[a_{34}, c_{1562}] + [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] - [b_{132}, b_{465}] + [b_{362}, b_{154}]-$$
$$-[b_{165}, b_{243}] - [b_{162}, b_{354}] - [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}) \cong T(a_{12}, a_{16}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{162}, b_{243},$$
$$b_{261}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{561}, b_{562}, c_{1362})/I_2$$
$$I_2 \supseteq \langle [a_{16}, a_{34}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}], [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}],$$
$$[a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] + [a_{34}, c_{2561}] + [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] - [b_{354}, b_{261}] - [b_{243}, b_{561}],$$
$$[a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{354}, b_{261}] + [b_{162}, b_{354}] + [b_{132}, b_{465}] + [a_{45}, c_{1362}] - [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_3}) \cong T(a_{12}, a_{15}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{154}, b_{162}, b_{165}, b_{243},$$
$$b_{251}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{562}, c_{1362}, c_{1465}, c_{1562})/I_3$$
$$I_3 \supseteq \langle [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{15}, b_{243}] - [a_{23}, b_{154}] - [a_{34}, b_{251}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{23}, c_{1465}] + [a_{34}, c_{1562}]-$$
$$-[a_{45}, c_{1362}] - [a_{26}, [a_{15}, a_{34}]] + [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] - [b_{132}, b_{465}]+$$
$$+[b_{362}, b_{154}] - [b_{162}, b_{354}] - [b_{165}, b_{243}]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_4}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{162}, b_{243}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{562}, c_{1362})/I_4$$
$$I_4 \supseteq \langle [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, b_{465}] - [a_{45}, b_{162}],$$
$$[a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [a_{45}, c_{1362}] + [b_{132}, b_{465}] + [b_{162}, b_{354}]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_5}) \cong T(a_{12}, a_{16}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{261}, b_{354}, b_{465}, b_{561})/I_5$$
$$I_5 \supseteq \langle [a_{12}, a_{45}], [a_{16}, a_{34}], [a_{23}, a_{56}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}],$$
$$[a_{12}, b_{465}] - [a_{45}, b_{261}], [a_{23}, b_{561}] + [a_{56}, b_{132}], [a_{34}, b_{261}] - [a_{16}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] - [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] + [b_{132}, b_{465}] - [b_{243}, b_{561}],$$
$$[a_{16}, [a_{23}, a_{45}]] - [a_{34}, [a_{56}, a_{12}]] - [b_{243}, b_{561}] - [b_{354}, b_{261}]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_6}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{354}, b_{465})/I_6$$
$$I_6 \supseteq \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{12}, b_{465}], [a_{56}, b_{132}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}]\rangle$$
$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_7}) \cong T(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{143}, b_{231}, b_{243}, b_{354}, b_{465}, c_{1243})/I_7$$
$$I_7 \supseteq \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{13}, a_{56}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{13}, b_{465}] + [a_{56}, b_{143}], [a_{12}, b_{465}], [a_{56}, b_{132}], [a_{56}, b_{231}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}]+$$
$$+[a_{45}, b_{231}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{231}, b_{465}] + [a_{56}, c_{1243}], [a_{56}, c_{1243}] - [b_{132}, b_{465}]\rangle$$

$$
\begin{gathered}
H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_8}) \cong T(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{46}, a_{56}, b_{132}, b_{143}, b_{231},\\
b_{243}, b_{354}, b_{364}, b_{465}, b_{564}, c_{1243}, c_{3564})/I_8\\
I_8 \supseteq \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{13}, a_{56}], [a_{12}, a_{46}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}],\\
[a_{13}, b_{465}] + [a_{56}, b_{143}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}] + [a_{45}, b_{231}], [a_{12}, b_{465}], [a_{12}, b_{564}],\\
[a_{56}, b_{132}], [a_{56}, b_{231}], [a_{12}, b_{364}] + [a_{46}, b_{132}] + [a_{46}, b_{231}], [a_{56}, c_{1243}] - [b_{132}, b_{465}],\\
[a_{12}, c_{3564}] + [b_{132}, b_{564}] + [b_{231}, b_{564}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}] + [b_{231}, b_{465}] \rangle
\end{gathered}
$$

Здесь комплексы пронумерованы $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_8$ в порядке появления на рис. 2, образующие взяты из теоремы 5. Заметим, что найденные соотношения в размерности шесть кубические, то есть содержат дважды итерированные коммутаторы, в согласии с неформальностью соответствующих $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. В силу затруднительности задачи указания явных гомотопических видов нельзя утверждать, что и в других четырёх случаях описания алгебр полны. Компьютерные вычисления показывают, что эти описания полны в степенях $\leqslant 7$, к примеру, для $\mathcal{K}_1$ для свыше ста возможных коммутаторов степени семь имеется только двенадцать соотношений, каждое из которых оказывается следствием наличия соотношения меньшей степени.

Благодарности

Автор желает выразить благодарность своему руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за постановку задачи и ценное руководство, а также Фёдору Вылегжанину за информацию о пакете SuperLie и плодотворные обсуждения.

Список литературы

[Ver] Я. А. Верёвкин. *Гомотопический тип и гомологии пространств петель некоторых момент-угол комплексов.* Препринт (2014). Доступен на `http://higeom.math.msu.su/course_papers/ver5.pdf`

[AH] J. F. Adams, P. J. Hilton. *On the chain algebra of a loop space.* Comm. Math. Helv., 1956.

[BP] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[GL] J. Grbić, A. Linton. *Lowest-degree triple Massey products in moment-angle complexes.* Preprint (2019), arXiv: 1908.02222.

[SL] SuperLie, a Mathematica package for calculations in Lie algebras and superalgebras. Available at `http://www.equaonline.com/math/SuperLie/`.