Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

# $A_\infty$-структуры, формальность алгебр и описание гомотопических инвариантов пространств

Курсовая работа
студента 4 курса 403 группы
Граумана Владислава Александровича

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2022 г.

# 1. Введение

Понятие *формальности* для DG-алгебр — явления, когда гомотопический тип алгебры есть формальное следствие её когомологий — уже давно показало в математике свою высокую значимость. Формальность алгебр, связанных с топологическим пространством может быть использовано для получения более полной информации о его гомотопических свойствах. Установление факта формальности алгебры или пространства в общем случае является высоко нетривиальной задачей. Известно, к примеру, наличие ряда препятствий к формальности алгебры — наличие нетривиальных когомологических операций, называемых *произведениями Масси*. К сожалению, эти операции не являются единственными препятствиями и существуют неформальные алгебры с тривиальными произведениями Масси. В такой ситуации интерес представляют результаты, представляющие собой критерии. Связь (ко-)формальности пространства и свойств его различных алгебраических инвариантов также непроста и во многих случаях оказывается источником открытых вопросов. Эта работа посвящена результатам в этих двух направлениях.

Формальность DG-алгебры тесно связана (и может быть альтернативно сформулирована) в терминах $A_\infty$-структур на её когомологиях, однако в общем случае вычисление этой структуры сопряжено со сложностями. Один из критериев формальности DG и $A_\infty$-алгебр был предложен Дмитрием Калединым (см. изложение В.А. Лунца [5]), и сводил задачу к занулению определенного класса в когомологиях Хохшильда некоторой $A_\infty$-алгебры особого вида, ассоциированной с исходной алгеброй. Мы даём альтернативную формулировку критерия Каледина в терминах алгебр, не включающих присоединение формальной переменной, и, отправляясь от этого, доказываем критерии формальности в терминах некоторой спектральной последовательности. Аналогичные результаты получены также и для $L_\infty$-случая. Мы используем эти результаты для доказательства некоторых следствий о формальности сумм и тензорных произведений.

Как установлено в работе Найзендорфера и Миллера [1], формальность пространства эквивалентна занулению пертурбации дифференциала на модели Квиллена, а коформальность — на минимальной модели пространства. Таким образом, наличие, например, кубических, четверных и т.д. соотношений в рациональной гомотопической алгебре пространства свидетельствует о его неформальности, а таких соотношений в его когомологиях — об отсутствии коформальности. Мы продолжаем эту связь дальше: доказывается, что существуют $A_\infty$ и $L_\infty$-структуры на когомологиях и рациональной гомотопической алгебре Ли пространства соответственно. Это позволяет нам судить о наличии или отсутствии высших соотношений в этих инвариантах, и уточняет их роль как препятствий к (ко-)формальности. Полученные результаты дают инструмент для полного подсчёта рациональных гомотопических алгебр (или же алгебр Понтрягина) для некоторых пространств.

Структура работы такова.

В разделах 2.1–2.3 излагаются предварительные определения и утверждения, связанные с $A_\infty$-структурами, включая свойства и объекты, необходимые для дальнейшей работы с формальностью.

В разделе 2.4 определяется когомологический критерий формальности, установленный Калединым.

В разделе 2.5 определены $L_\infty$-алгебры, а также приведены нужные для работы с ними сведения о симметрических алгебрах и коалгебрах.

В разделе 3.1 доказан результат о связи соотношений в рациональной гомотопической алгебре и $A_\infty$-структур на приведённых рациональных гомологиях (следствие 2), и аналогичный результат для соотношений в рациональных гомологиях и $L_\infty$-структуры на гомотопической алгебре (следствие 3). Они получаются применением соответственно теорем 3 и 4 к модели Квиллена и минимальной коалгебраической модели пространства.

В разделе 3.2 доказывается критерий формальности, основанный на спектральной последовательности, ассоциированной с комплексом особого вида (теорема 5) и предложение 4 о трансфере формальности.

Автор желает выразить благодарность своему научному руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за очень ценные замечания и вопросы по содержанию работы, без которых она не приняла бы настоящий вид.

## 2. Предварительные сведения

2.1. **$A_\infty$-структуры.** Здесь мы кратко изложим основные определения и результаты, связанные с $A_\infty$-(ко-)алгебрами. Одним из стандартных введений является работа Келлера [8].

Зафиксируем коммутативное кольцо с единицей $R$. Здесь и далее непомеченные тензорные произведения $\otimes$ понимаются над $R$.

**Определение 1.** *$A_\infty$-алгеброй* над $R$ называют $\mathbb{Z}$-градуированный $R$-модуль $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, снабжённый совокупностью однородных $R$-линейных отображений

$$m_n : A^{\otimes n} \to A,\ n \in \mathbb{N}$$

степени $2-n$, удовлетворяющим *тождествам Сташеффа*

$$(SI_n) \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) = 0$$

В частности, $m_2$ можно интерпретировать как умножение в алгебре, а $m_1$ — дифференциал, удовлетворяющий тождеству Лейбница относительно $m_2$.

Двойственным образом под *$A_\infty$-коалгеброй* понимается $\mathbb{Z}$-градуированный $R$-модуль $C = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} C_p$ с заданной совокупностью однородных $R$-линейных отображений

$$\Delta_n : C \to C^{\otimes n},\ n \in \mathbb{N}$$

степени $n-2$, удовлетворяющим тождествам Сташеффа

$$(SI_n^*) \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes \Delta_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t})\Delta_{r+1+t} = 0.$$

При применении этих тождеств к элементам модуля употребляется известное соглашение о знаках Кошуля. Далее для удобства мы формулируем свойства для $A_\infty$-алгебр, случай коалгебр определятся по двойственности. $A_\infty$-(ко-)алгебры образуют категорию при задании морфизмов следующим образом.

**Определение 2.** *Морфизм $A_\infty$-алгебр* или *$A_\infty$-морфизм* $f : A \to B$ это совокупность однородных $R$-линейных отображений

$$f_n : A^{\otimes n} \to B,\ n \in \mathbb{N}$$

степени $1 - n$, удовлетворяющих тождествам

$$(MI_n) \quad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) = \sum (-1)^s m_r(f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}),$$

где суммирование в правой части производится по всем $1 \leqslant r \leqslant n$ и разложениям $n = i_1 + \cdots + i_r$ в сумму натуральных чисел; знак определён как

$$s = (r-1)(i_1 - 1) + (r-2)(i_2 - 1) + \cdots + 2(i_{r-2} - 1) + (i_{r-1} - 1).$$

Морфизм $f$ есть *квазиизоморфизм*, если $f_1$ является квазиизоморфизмом. Морфизм $f$ строгий, если $f_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Композиция $f : B \to C$ и $g : A \to B$ задаётся как

$$(f \circ g)_n = \sum (-1)^s f_r(g_{i_1} \otimes g_{i_2} \otimes \cdots \otimes g_{i_r}),$$

где знак и суммирование такие же, как в тождествах, определяющих морфизмы.

Мы говорим, $A_\infty$-алгебры $A$ и $B$ *квазиизоморфны*, если существуют $A_\infty$-алгебры $A_1, \ldots, A_k$ и квазиизоморфизмы

$$A \leftarrow A_1 \to \cdots \leftarrow A_k \to B.$$

**Определение 3.** $A_\infty$-алгебра $A$ называется *формальной*, если она квазиизоморфна $A_\infty$-алгебре $(H(A), (0, m_2, 0, \ldots))$, где $m_2$ индуцировано умножением на $A$.

Мы говорим, что $A_\infty$-алгебра $A$ *строго унитальна*, если в ней есть элемент $1_A$ степени ноль такой, что $m_1(1_A) = 0$, $m_2(1_A, a) = a = m_2(a, 1_A)$ для всех $a \in A$ и что для всех $i \geqslant 3$ и всех $a_1, \ldots, a_i \in A$ произведение $m_i(a_1, \ldots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из $a_j$ равен $1_A$. Если $A$ и $B$ — строго унитальные $A_\infty$-алгебры, то $A_\infty$-морфизм $f : A \to B$ *строго унитален*, если $f_1(1_A) = 1_B$ и для всех $i \geqslant 2$ и всех $a_1, \ldots, a_i \in A$ элемент $f_i(a_1, \ldots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из $a_j$ равен $1_A$. Каждая строго унитальная $A_\infty$-алгебра $A$ имеет строгий морфизм $\eta : R \to A$, переводящий $1_R$ в $1_A$. Она *аугментирована*, если задан строго унитальный морфизм $\varepsilon : A \to k$ такой, что $\varepsilon \circ \eta = \mathrm{id}_R$. Морфизм аугментированных $A_\infty$-алгебр это строго унитальный морфизм $f : A \to B$ такой, что $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. Функтор $A \mapsto \ker \varepsilon_A$ определяет эквивалентность из категории аугментированных $A_\infty$-алгебр в категорию $A_\infty$-алгебр.

2.2. **Бар-конструкция для $A_\infty$-алгебр.** Понятия $A_\infty$-алгебр и $A_\infty$-морфизмов могут быть естественным образом описаны на языке бар-конструкций. Пусть $A$ — когомологически $\mathbb{Z}$-градуированный $R$-модуль, и $sA$ — его надстройка, определяемая равенством $(sA)^n = A^{n+1}$. Положим

$$\overline{T}sA = \bigoplus_{i\geqslant 1} (sA)^{\otimes i},$$

иными словами, это усечённая тензорная коалгебра на $sA$ со стандартным коумножением $\Delta : \overline{T}sA \to \overline{T}sA \otimes \overline{T}sA$, задаваемым деконкатенацией

$$\Delta(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n), \tag{1}$$

и $\Delta(a) = 0$ для всех $a$ из $A$. Обозначим за $\mathrm{Coder}(\overline{T}sA)$ градуированный $R$-модуль однородных $R$-линейных кодериваций коалгебры $\overline{T}sA$. Композиция кодеривации с проекцией $\overline{T}sA \to sA$ определяет изоморфизм градуированных $R$-модулей

$$\mathrm{Coder}(\overline{T}sA) \cong \mathrm{Hom}^*_R(\overline{T}sA, sA),$$

то есть каждая кодеривация $d$ степени $p$ имеет каноническое разложение $d = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$, где $d_i : (sA)^{\otimes i} \to sA$ — однородное $R$-линейное отображение степени $p$.

Пусть теперь $A$ снабжён структурой аугментированной $A_\infty$-алгебры $m_i : A^{\otimes i} \to A$, и пусть $I = \ker \varepsilon$ обозначает идеал аугментации. Будем рассматривать сдвиг градуировки как отображение степени $-1$ $s : I \to sI$, совпадающее с тождественным в категории $R$-модулей. Зададим отображения $b_i : (sI)^{\otimes i} \to sA$, исходя из коммутативности следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} I^{\otimes i} \arrow[r, "m_i"] \arrow[d, "s^{\otimes i}"'] & I \arrow[d, "s"] \\ (sI)^{\otimes i} \arrow[r, "b_i"'] & sI \end{tikzcd}$$

Факт того, что $m_i$ задают $A_\infty$-структуру, эквивалентен тому, что $b_i$ являются компонентами в разложении некоторой кодеривации $d$ степени 1, для которой $d \circ d = 0$. Символом $m$ мы будем обозначать $A_\infty$-структуру на $A$, воспринимаемую как кодеривацию степени 1 на $\overline{T}sI$.

**Определение 4.** Полученную DG-коалгебру $(\overline{T}sI, m)$ называют *бар-конструкцией* $A_\infty$-алгебры $A$. Обозначим её $\mathcal{B}A$.

Если $B$ — ещё одна $A_\infty$-алгебра, то существует естественная биекция между $A_\infty$-морфизмами $A \to B$ и морфизмами степени ноль коалгебр $\mathcal{B}A \to \mathcal{B}B$. Мы будем использовать одинаковые обозначения для морфизмов, соответствующих друг другу посредством этой биекции.

**Замечание.** Определение бар-конструкции вариативно в $A_\infty$-случае. Взятие ядра аугментации необходимо для обеспечения гомотопической нетривиальности функтора бар-конструкции, так как в случае строго унитальной $A_\infty$-алгебры если не брать идеал аугментации, то полученная применением функтора коалгебра будет гомотопически эквивалентна тривиальной, и бар-конструкция не будет резольвентой. Утверждения о формальности и минимальных моделях из следующего параграфа справеливы, впрочем, и если в определении $I$ заменить на $A$. Такое определение используется, например, в [5], [8], и в этом случае уже не будет совпадать с определением бар-конструкции в DG-случае.

2.3. **$A_\infty$-алгебры и минимальные модели.** Мы ограничимся рассмотрением класса $A_\infty$-алгебр, обладающих следующим свойством.

**Определение 5.** $A_\infty$-алгебра $A$ называется *плоской*[1], если каждый $R$-модуль когомологий $H^i(A)$ $R$-проективен.

Над полем всякая $A_\infty$-алгебра плоская. Напомним следующий известный результат Кадеишвили.

**Теорема 1** ([15]). *Пусть $A$ — плоская $A_\infty$-алгебра, и $g : H(A) \to A$ — квазиизоморфизм цепных комплексов $R$-модулей, где дифференциал на $H(A)$ тождественно нулевой. Тогда существует структура минимальной $A_\infty$-алгебры на $H(A)$, где $m_2$ индуцировано умножением на $A$, а также $A_\infty$-морфизм $f = (g_1, g_2, \dots) : H(A) \to A$, где $g_1 = g$.*

Мы называем так полученную $A_\infty$-алгебру *минимальной моделью* для $A$. Она единственна с точностью до $A_\infty$-квазиизоморфизма. Заметим, что для $A_\infty$-алгебр понятие квазиизоморфность совпадает с существованием квазиизоморфизма между ними. Квазиизоморфные плоские $A_\infty$-алгебры имеют изоморфные бар-конструкции.

Как следует из определения $A_\infty$-алгебры, DG-алгебра есть ни что иное, как $A_\infty$-алгебра, у которой $m_i = 0$ при $i \geqslant 3$. Под морфизмом DG-алгебр мы понимаем морфизм ассоциативных алгебр, коммутирующий с дифференциалами. Таким образом, категория DG-алгебр не является полной подкатегорией в категории $A_\infty$-алгебр. Для DG-алгебр (даже для плоских) в общем случае не верен тот факт, что квазиизоморфные DG-алгебры могут быть связаны одним квазиизоморфизмом. Для плоских DG-алгебр справедлив следующий важный результат.

**Предложение 1.** *Пусть $E$, $F$ — плоские DG-алгебры и $A$, $B$ — их минимальные модели соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

(1) *$E$, $F$ DG-квазиизоморфны;*
(2) *$E$, $F$ $A_\infty$-квазиизоморфны;*
(3) *$A$, $B$ $A_\infty$-квазиизоморфны;*
(4) *$\mathcal{B}A$, $\mathcal{B}B$ $A_\infty$-квазиизоморфны.*

Как и ранее, мы говорим, что DG-алгебра $E$ *формальна* (в DG-смысле), если она квазиизоморфна алгебре $H(E)$ с нулевым дифференциалом и индуцированным с $E$ умножением.

**Следствие 1.** *Пусть $E$ — минимальная плоская DG $R$-алгебра с минимальной моделью $A$. Тогда $E$ DG-формальна тогда и только тогда, когда $A$ формальна как $A_\infty$-алгебра.*

Таким образом, в плоском случае мы можем исследовать формальность DG-алгебр, используя лишь их минимальные модели. В дальнейшем мы подразумеваем, что все $A_\infty$ и DG-алгебры плоские.

2.4. **Класс Каледина.** Пусть $A$ — плоская минимальная $A_\infty$ $R$-алгебра. Рассмотрим градуированный модуль $\mathrm{Coder}(\overline{T}sA)$, и определим на нём отображение степени 1, заданное как $d \mapsto [m_A, d] = m_A \cdot d - (-1)^{\deg d} d \cdot m_A$, где $d$ — кодеривация на $\overline{T}sA$, $m_A$ — структура $A_\infty$-алгебры на $A$, воспринимаемая как кодеривация, и умножение кодериваций понимается как их композиция. Так как $m_A^2 = 0$, то $[m_A, \cdot]$ является дифференциалом на $\mathrm{Coder}(\overline{T}sA)$. Таким образом, мы получили

[1] Это определение *не* совпадает с обычным определением плоского модуля.

цепной комплекс $R$-модулей, называемый *комплексом Хохшильда.* Обозначим его $C_R^*(A)$. Его когомологии со сдвигом в индексе

$$HH_R^{i+1}(A) := H^i(C_R^*(A))$$

называются *когомологиями Хохшильда* $A$. Квазиизоморфные плоские $A_\infty$-алгебры имеют изоморфные бар-конструкции, так что их когомологии Хохшильда также изоморфны.

В терминах комплекса Хохшильда Дмитрий Каледин ([13]) сформулировал критерий формальности для $A_\infty$-алгебр. Этот критерий может быть также распространён на случай DG-алгебр Ли, как отмечено в [5].

Зафиксируем $k$ — поле характеристики ноль, и $R$ — коммутативную $k$-алгебру. Если $M$ является $R$-модулем, то можно определить модуль степенных рядов от формальной переменной $h$ как

$$M[[h]] = \lim_{\leftarrow} M[h]/h^n = \lim_{\leftarrow}(M \otimes R[h])/h^n,$$

где для $R[h]$-модуля $E$ мы обозначили $E/h^n := E/h^n \cdot E$. Мы воспринимаем $M[[h]]$ как $R[[h]]$-модуль. В общем случае мы говорим, что $R[[h]]$-модуль $P$ *$h$-свободный полный*, если он изоморфен $\overline{P}[[h]]$, где $\overline{P} = P/h$.

Заметим, что $M[[h]]$ канонически отождествляется с множеством формальных степенных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} m_i h^i$, $m_i \in M$. Аналогичное отождествление для произвольного $h$-свободного полного модуля возможно, когда задано отображение выбора представителей $\overline{P} \to P$.

Пусть $B$ — $h$-свободный полный $R[[h]]$-модуль со структурой $A_\infty$-алгебры $(B, m)$ (напомним, что все алгебры считаются плоскими). Выберем отображение выбора $\overline{B} \to B$ в категории $R$-модулей, где $\overline{B} = B/h$. Тогда можно записать

$$m = m^{(0)} + m^{(1)}h + m^{(2)}h^2 + \dots$$

для некоторых кодериваций $m^{(i)} \in C_R^1(\overline{B})$. Рассмотрим кодеривацию

$$\partial_h m = m^{(1)} + 2m^{(2)}h + 3m^{(3)}h^2 + \dots \in C^1_{R[[h]]}(B).$$

Тогда $\partial_h m$ является коциклом в комплекса Хохшильда и потому определяет класс $[\partial_h m] \in HH^2_{R[[h]]}(B)$.

**Определение 6.** Класс $[\partial_h m] \in HH^2_{R[[h]]}(B)$ называется *классом Каледина* $B$ и обозначается $K_B$. Он не зависит от отображения выбора представителей $\overline{B} \to B$. Определение класса Каледина справедливо и для минимальных (плоских) $A_\infty$ $R[h]/h^{n+1}$-алгебр. Мы рассматриваем класс $K_{B/h^{n+1}}$ для $A_\infty$ $R[h]/h^{n+1}$-алгебры $B/h^{n+1}$ как элемент в $HH^2_{R[h]/h^n}(B/h^n)$.

Пусть $A = (A, m)$ — минимальная плоская $A_\infty$ $R$-алгебра. Рассмотрим $A_\infty$ $R[h]$-алгебру $\tilde{A} = (A[h], \tilde{m} = (m_2, m_3 h, m_4 h^2, \dots))$. Алгебру $\tilde{A}$ называют *деформацией к нормальному конусу* $A$. Если $A(2)$ обозначает алгебру $(A, (m_2, 0, 0, \dots))$, то $A$ и $A(2)$ квазиизоморфны тогда и только тогда, когда квазиизоморфны $\tilde{A}$ и $A(2)[h]$. Поэтому $A$ формальна тогда и только тогда, когда $\tilde{A}$ формальна. Более того, при помощи $\tilde{A}$ мы можем определить отклонение алгебры от формальности.

**Определение 7.** $A_\infty$ $R$-алгебра $A$ называется *$n$-формальной*, если существует квазиизоморфизм $A_\infty$ $R[h]/h^{n+1}$-алгебр $\gamma : \tilde{A}/h^{n+1} \to A(2)[h]/h^{n+1}$ такой, что $\gamma \equiv (\mathrm{id}, 0, 0, \dots)(\mathrm{mod} h)$.

Каледин [13] доказал, что классы $K_{\tilde{A}}, K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$ дают критерии формальности $A_\infty$-алгебр.

**Теорема 2** ([13],[5])**.** *Минимальная плоская $A_\infty$ $R$-алгебра $A$ формальна тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}} = 0$. Она $n$-формальна тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}/h^{n+1}} = 0$.*

2.5. **$L_\infty$-структуры.** Так как наши результаты будут иметь аналоги для $L_\infty$-структур, мы также дадим определение $L_\infty$-алгебры, но за более подробной информацией отсылаем читателя к стандартной литературе, например, [3].

**Определение 8.** *$L_\infty$-алгеброй* называют градуированное векторное пространство $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ над $R$, снабжённое совокупностью $R$-линейных однородных отображений

$$\ell_n : L^{\otimes n} \to L,\, n \in \mathbb{N}$$

степени $n-2$, удовлетворяющими для каждого $n \in \mathbb{N}$ следующим условиям. Во-первых, для каждой перестановки $\sigma$ на $n$ элементах

$$\ell_n(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)\ell_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n),$$

а во-вторых, справедливо обобщение тождества Якоби

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j(\ell_i(x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i)})\otimes x_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}) = 0,$$

где $\mathrm{Sh}(i, n-i)$ — множество $(i, n-i)$-тасующих перестановок, то есть таких $\sigma \in S_n$, что $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ и $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$, а $\varepsilon(\sigma)$ — знак, получаемый из применения правила Кошуля (для перестановки пары элементов $x, y$ появляется знак $(-1)^{\deg x \deg y}$).

Положим теперь, что $V$ — DG-векторное пространство. Далее нам также понадобятся определения следующих объектов.

Пусть $T(V) = \bigoplus_{i\geqslant 0} V^{\otimes i}$ — тензорная алгебра на $V$, а $I$ — идеал в ней, порождённый всеми элементами $x\otimes y - (-1)^{\deg x \deg y} y\otimes x$, где $x, y \in V$. Фактор-алгебра $S(V) := T(V)/I$ называется *симметрической алгеброй* на $V$, она коммутативна. Обозначим как $\pi : T(V) \to S(V)$ каноническую проекцию. Про элементы из $S^n(V) = \pi(V^{\otimes n})$ будем говорить, что их *длина* равна $n$. Мы также обозначим индуцированное умножение на $S(V)$ символом $\vee$, то есть $\pi(x \otimes y) = x \vee y$.

На $T(V)$ существует стандартное коумножение $\Delta$, заданное как $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, и для $x \in \overline{T}(V)$ $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \overline{\Delta}(x)$, где $\overline{\Delta}$ — деконкатенация (1). Отображение $N : S(V) \to T(V)$, действующее по правилу $N(1) = 1$, $N(v) = v$, $v \in V$, и

$$N(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad v_1, \ldots, v_n \in V,$$

является инъективным, причём $\pi \circ N = \mathrm{id}_{S(V)}$. Известно, что $\mathrm{Im}(N) \subset T(V)$ есть подкоалгебра $T(V)$, поэтому можно индуцировать коумножение $\Delta_S$ на $S(V) \cong \mathrm{Im}(N)$. В этом случае оно примет вид

$$(2)\quad \Delta_S(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)(v_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(i)}) \otimes (v_{\sigma(i+1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(n)}).$$

Это коумножение кокоммутативно и согласовано с умножением. Напомним, что свойство однородного линейного отображения $d : C \to C$ на коалгебре $C$ быть кодеривацией означает, что $\Delta_C \circ d = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) \circ \Delta_C$. Важным для нас будет следующее утверждение.

**Лемма 1** ([3]). *Пусть $C$ — кокоммутативная коалгебра, и $f : C \to S(V)$ — гомоморфизм коалгебр. Обозначим как $\mathrm{pr}_V : S(V) \to V$ каноническую проекцию. Линейное отображение*

$$\mathrm{Coder}(C, S(V)) \to \mathrm{Hom}(C, V), \quad d \mapsto \mathrm{pr}_V \circ d$$

*есть изоморфизм. Его обратный задаётся как*

$$\mathrm{Hom}(C, V) \to \mathrm{Coder}(C, S(V)), \quad \lambda \mapsto \vee \circ (\lambda \otimes f) \circ \Delta_C.$$

Для $L_\infty$-алгебр поэтому справедливы некоторые аналоги свойств $A_\infty$-алгебр. Мы далее также будем использовать следующий результат.

**Предложение 2** ([3]). *$L_\infty$-структура на градуированном векторном пространстве $L$ эквивалентна совокупности линейных отображений $\lambda_k : S^k(sL) \to sL$, $k \in \mathbb{N}$ таких, что*

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\sigma) \lambda_j(\lambda_i(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = 0$$

*для всех $n \in \mathbb{N}$.*

## 3. Результаты

3.1. **О связи (ко-)формальности, соотношений в алгебрах и $A_\infty$,$L_\infty$-структур.** Для формулировки и доказательства наших основных результатов сделаем краткое напоминание об алгебрах Ли и дифференциалах на них. Далее если модуль $A$ градуирован гомологически, то считаем, что оператор сдвига действует как $(sA)_n = A_{n-1}$, а если когомологически, то тогда $(sA)^n = A^{n+1}$.

Свободная алгебра Ли $F(V)$ на векторном пространстве $V$ вместе с каноническим линейным вложением $V \to F(V)$ характеризуются универсальным свойством: для всякого линейного отображения $f : V \to L$, где $L$ — алгебра Ли, существует единственный морфизм алгебр Ли $\overline{f} : F(V) \to L$ такой, что композиция $V \to F(V) \to L$ равна $f$.

Другое описание $F(V)$ таково. Зададим на алгебре $T(V)$ коумножение $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для $x \in V$, а на остальных элементах так, чтобы $T(V)$ стала алгеброй Хопфа. Тогда можно положить $F(V) = PT(V)$.

Пусть в пространстве $V$ выбран базис $(v_i)$. Напомним, что в векторном пространстве $F(V)$ свободной алгебры Ли существует базис, в котором все элементы будут правонормированными итерированными скобками

$$[v_{j_1}, [v_{j_2}, \ldots, [v_{j_{k-1}}, v_{j_k}] \ldots]] \tag{3}$$

от векторов $v_j$ (см., например, [14]). При этом, конечно, не все скобки вида (3) войдут в базис. Мы будем говорить, что вложенная скобка (3) имеет *длину* $k$.

Пусть $L$ — DG-алгебра Ли с дифференциалом $d$ степени $-1$, и $QL = L/[L, L]$ обозначает абелианизацию $L$. Выберем базис $(x_j)$ в $QL$ и расщепление $QL \to L$, так что мы можем рассматривать $(x_j)$ как минимальный набор порождающих элементов $L$. Действие дифференциала на $x_j$ в таком случае можно записать в виде конечной суммы

$$d(x_\alpha) = \sum_i x_i + \sum_{j,k}[x_j, x_k] + \sum_{l,m,n}[x_l, [x_m, x_n]] + \dots,$$

правая часть этого равенства представляет собой разложение по длинам вложенных скобок. Выделим линейное отображение, действующее по правилу

$$x_i \mapsto \sum_{j_1,\dots,j_k} [x_{j_1}, \dots, [x_{j_{k-1}}, x_{j_k}]\dots]$$

и продолжим его до деривации $d^k$ на $L$. В таком случае дифференциал $d$ на $L$ представляется в виде суммы $d = d^1 + d^2 + d^3 + \dots$ дериваций, где $d^k$ повышает длину скобок от неразложимых элементов $x_i$ на $k-1$.

**Теорема 3.** *Пусть $L$ — минимальная DG-алгебра Ли, без учёта дифференциала совпадающая со свободной алгеброй Ли $F(V)$ на DG-векторном пространстве $V$. Тогда на $sHQL$ существует структура минимальной $A_\infty$-коалгебры $\Delta = (\Delta_2, \Delta_3, \dots)$, обладающей следующим свойством. Если*

$$d^n(x) = \sum_j [x_1^{(j)}, [x_2^{(j)}, \dots, [x_{n-1}^{(j)}, x_n^{(j)}]\dots]],$$

*где $d^n$ — $n$-ая компонента дифференциала на $L$, $x \in V$, $x_i \in V$, то*

$$\Delta_n(s\bar{x}) = \sum_j [s\bar{x}_1^{(j)}, [s\bar{x}_2^{(j)}, \dots, [s\bar{x}_{n-1}^{(j)}, s\bar{x}_n^{(j)}]]\dots],$$

*где $\bar{y}$ обозначает цикл с представителем $y$, а в последнем равенстве обозначено $[sa, sb] = (-1)^{\deg a} sa \otimes sb - (-1)^{(\deg a+1)\deg b} sb \otimes sa$.*

*Доказательство.* Рассмотрим фильтрацию $L$, задаваемую длинами слов от неразложимых элементов: $F_0(L) = L$, $F_{-1}(L) = [L, L], \dots, F_{-n}(L) = [L, F^{-n+1}(L)]$. Иными словами, $F_{-n}(L)$ есть элементы $L$, представимые в виде суммы вложенных скобок от неразложимых элементов с длинами не меньше $n$. Эта фильтрация даёт спектральную последовательность алгебр Ли с $E^0(L) = F(V)$, $E^1(L) = F(HV) = F(HQL)$, $E^1_{0,n} = H_nQL$.

Прежде всего произведём вычисление дифференциалов $d_r$ в этой последовательности. Напомним определение модулей $E^r_{p,q}$, составляющие листы спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрованным объектом $L$:

(4)

$$E^r_{p,q} = \frac{\{x \in F_pL_{p+q} : dx \in F_{p-r}L_{p+q-1}\}}{\{x \in F_{p-1}L_{p+q} : dx \in F_{p-r}L_{p+q-1}\} + \{x \in F_pL_{p+q} : x = dy, y \in F_{p+r-1}L_{p+q+1}\}}.$$

Для наших целей нам достаточно определить дифференциалы $d_r$ на элементах из $E^r_{0,*}$, где $r \geqslant 1$. Образ $E^r_{0,n}$ под действием $d_r$ лежит в $E^r_{-r,n+r-1}$ для всех целых $n$. Обозначим как $d$ дифференциал на $L$. Согласно определению (4), имеем, во-первых,

$$E^r_{0,n} = \frac{\{x \in F_0L_n : dx \in F_{-r}L_{n-1}\}}{\{x \in F_{-1}L_n : dx \in F_{-r}L_{n-1}\} + \{x \in F_0L_n : x = dy, y \in F_{r-1}L_{n+1}\}} =$$

$$= \frac{\{x \in L_n : dx \in F_{-r}L_{n-1}\}}{\{x \in ([L,L])_n : dx \in F_{-r}L_{n-1}\} + \{x \in L_n : x = dy, y \in L_{n+1}\}}.$$

Таким образом, можно отождествить $E^r_{0,n}$ со множеством неразложимых элементов $L$, не являющихся циклами, и дифференциал каждого из которых лежит в $F_{-r}L$, то есть содержит суммы скобок от неразложимых элементов длины не менее $r+1$. Положим $L^{[n]} = F^{-n+1}L/F^{-n}L$, то есть это элементы, представимые в виде суммы вложенных скобок длины в точности $n$. Далее, из (4) определим $E^r_{-r,n+r-1}$:

$$E^r_{-r,n+r-1} = \frac{\{x \in F_{-r}L_{n-1} : dx \in F_{-2r}L_{n-2}\}}{\{x \in F_{-r-1}L_{n-1} : dx \in F_{-2r}L_{n-2}\} + \{x \in F_{-r}L_{n-1} : x = dy, y \in F_{-1}L_n\}} =$$
$$= \{x \in L^{[r+1]}_{n-1}, dx \in F_{-2r}L_{n-2}, x \neq dy, y \in ([L,L])_n\}.$$

Дифференциал $d_r$ есть отображение, индуцированное $d$ на листе $E^r$. Если $x$ — неразложимый элемент из $E^r_{0,n}$, то

$$dx = x_{r+1} + x_{r+2} + x_{r+3} + \ldots,$$

где $x_i$ есть сумма скобок от неразложимых элементов длины $i$. Элемент $dx$ будет лежать в $\{x \in F_{-r}L_{n-1} : dx \in F_{-2r}L_{n-2}\}$, но после взятия фактора в определении $E^r_{-r,n+r-1}$ компоненты $x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots$ обратятся в ноль. Таким образом, $dx$ есть образ компоненты $x_{r+1}$ в $E^r_{-r,n+r-1}$, то есть сумма всех скобок длины ровно $r+1$ от неразложимых элементов, входящих в $dx$. Иными словами, это в точности $d^{r+1}(x)$.

Теперь определим следующие отображения. Для каждого $r \geqslant 1$ рассмотрим композицию $\eta^r_{p,q}$ канонических проекций (напомним, что мы работаем над полем)

$$Z^1_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^0_{p,q}) \to Z^r_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^0_{p,q}) \to Z^r_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^{r-1}_{p,q}) = E^r_{p,q}.$$

Мы определим сначала $d'_r$, а затем $\overline{d}_r$ так, чтобы замкнуть по коммутативности диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E^1_{0,n} \arrow[r, "\overline{d}_r"] & E^1_{-r,n+r-1} \\
\dfrac{Z^1_{0,n}}{Z^{r-1}_{-1,n+1} + B^0_{0,n}} \arrow[u] \arrow[r, "d'_r"] \arrow[d, "\eta^r_{0,n}"'] & \dfrac{Z^1_{-r,n+r-1}}{Z^{r-1}_{-r-1,n+r} + B^0_{-r,n+r-1}} \arrow[u] \arrow[d, "\eta^r_{-r,n+r-1}"] \\
E^r_{0,n} \arrow[r, "d_r"'] & E^r_{-r,n+r-1}
\end{tikzcd} \tag{5}$$

где стрелки наверх есть проекции. Представив $Z^1_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^0_{p,q})$ как прямую сумму $E^r_{p,q} \oplus \ker \eta^r_{p,q}$, мы можем определить $d'_r$ как $d'_r(e+m) = d_r(e)$, где $e \in E^r_{p,q}$, $m \in \ker \eta^r_{p,q}$. Отображение $d'_r$ опускается до отображения факторпространств $\overline{d}_r$. Ядро отображения $Z^1_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1} + B^0_{p,q}) \to E^1_{p,q}$ содержится полностью в слагаемом $\ker \eta^r_{p,q}$, так что $\overline{d}_r$ действует по правилу $\overline{d}_r(e+m) = d_r(e)$, где $e \in E^r_{p,q}$, а $m$ лежит в факторпространстве от $\ker \eta^r_{p,q}$ (в нашем случае $(p,q) = (0,n)$; всякий представитель класса $m$ из $L$ после взятия от него $d$ будет иметь нулевую компоненту $d^r$), то есть $\overline{d}_r(\bar{x})$ есть сумма всех вложенных скобок длины ровно $r+1$, входящих в $dx$, где $x$ есть представитель цикла $\bar{x}$.

Отображение $\overline{\Delta}_{r+1}$ задаётся на элементах степени $n$ композицией

$$H_nQL \xrightarrow{=} E^1_{0,n} \xrightarrow{\overline{d}_r} E^1_{-r,n+r-1} \longrightarrow F(HQL) \longrightarrow T(HQL) \to (HQL)^{\otimes r+1}$$

где $F(HQL)$ вкладывается в $T(HQL)$ как подалгебра примитивных элементов. В тензорной алгебре скобка Ли становится градуированным коммутатором. Итоговые отображения $\Delta_r$ определяются из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} HQL \arrow[r, "\overline{\Delta}_r"] \arrow[d, "s"'] & (HQL)^{\otimes r} \arrow[d, "s^{\otimes r}"] \\ sHQL \arrow[r, "\Delta_r"'] & (sHQL)^{\otimes r} \end{tikzcd}$$

откуда мы получаем формулу для $\Delta_r$, заявленную в теореме, причём формула для $[sa, sb]$ получается из формулы для обычного градуированного коммутатора $a\otimes b - (-1)^{\deg a \deg b} b\otimes a$ после применения правила знаков Кошуля.

Осталось проверить выполнение тождеств $A_\infty$-коалгебры. Продолжим каждую компоненту $d^r$ как деривацию на всю алгебру $L$ (до этого мы воспринимали $d^r$ как лишь определённые на неразложимых элементах). В таком случае тождество Сташеффа, переписанное для отображений $\overline{\Delta}_s$ как

$$\sum_{r+s+t=n} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes \overline{\Delta}_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t})\overline{\Delta}_{r+1+t} = 0$$

будет следовать из того, что $(n-1)$-ая компонента отображения $d\circ d = 0$ равна нулю, в чём можно убедиться непосредственным, но громоздким вычислением. К примеру, приведём вычисление для компоненты $d\circ d$, повышающей длину скобок на два. Зафиксируем произвольный неразложимый элемент $x$, из соображений линейности достаточно считать, что $d^2(x)$ содержит лишь одно слагаемое, которое обозначим $[a,b]$. Компонента $d\circ d$, повышающая длину скобок на два, есть композиция $d^2\circ d^2$. Также в силу линейности нашего вычисления мы для простоты будем считать, что $d^2(a) = [a_1, a_2]$, $d^2(b) = [b_1, b_2]$. Для краткости обозначим в вычислении степень элемента $y$ как $|y|$. Тогда имеем

$$\begin{gathered} d^2(d^2(x)) = d^2([a,b]) = [d^2(a), b] + (-1)^{|a|}[a, d^2(b)] = [[a_1,a_2],b] + (-1)^{|a|}[a,[b_1,b_2]] = \\ = [a_1\otimes a_2 - (-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1, b] + (-1)^{|a|}[a, b_1\otimes b_2 - (-1)^{|b_1||b_2|}b_2\otimes b_1] = \\ = a_1\otimes a_2\otimes b - (-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1\otimes b - (-1)^{(|a_1|+|a_2|)|b|}b\otimes a_1\otimes a_2 + \\ +(-1)^{|a|}a\otimes b_1\otimes b_2 - (-1)^{|a|+|b_1||b_2|}a\otimes b_2\otimes b_1 - (-1)^{|a|(|b_1|+|b_2|+1)}b_1\otimes b_2\otimes a + \\ +(-1)^{|a|(|b_1|+|b_2|+1)+|b_1||b_2|}b_2\otimes b_1\otimes a. \end{gathered}$$

С другой стороны, вычислим соответствующее тождество Сташеффа (для отображений $\overline{\Delta}_k$, там, где нет знаков). Для удобства опустим черты над элементами (означающие, что они являются классами гомологий).

$$
\begin{gathered}
(\mathrm{id}\otimes\overline{\Delta}_2+\overline{\Delta}_2\otimes\mathrm{id})\overline{\Delta}_2(x)=(\mathrm{id}\otimes\overline{\Delta}_2+\overline{\Delta}_2\otimes\mathrm{id})([a,b])=\\
=(-1)^{|a|}a\otimes(b_1\otimes b_2-(-1)^{|b_1||b_2|}b_2\otimes b_1)-\\
-(-1)^{|a|(|b|+1)}b\otimes(a_1\otimes a_2-(-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1)+(a_1\otimes a_2-(-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1)\otimes b-\\
-(-1)^{|a||b|}(b_1\otimes b_2-(-1)^{|b_1||b_2|}b_1\otimes b_2)\otimes a=(-1)^{|a|}a\otimes b_1\otimes b_2-\\
-(-1)^{|a|+|b_1||b_2|}a\otimes b_2\otimes b_1-(-1)^{|a|(|b|+1)}b\otimes a_1\otimes a_2+\\
+(-1)^{|a_1||a_2|+|a||b|+|b|}b\otimes a_2\otimes a_1+a_1\otimes a_2\otimes b-(-1)^{|a_1||a_2|}a_2\otimes a_1\otimes b-\\
-(-1)^{|a||b|}b_1\otimes b_2\otimes a+(-1)^{|a||b|+|b_1||b_2|}b_2\otimes b_1\otimes a.
\end{gathered}
$$

Результаты двух вычислений совпадают, так как $|a|=|a_1|+|a_2|+1$, $|b|=|b_1|+|b_2|+1$.

Конструкция $A_\infty$-структуры тем самым завершена.

$\square$

Для нас наибольший интерес это предложение представляет в топологическом контексте. Предположим, что $X$—односвязное пространство конечного $\mathbb{Q}$-типа, и $L_X$ — его минимальная модель Квиллена. В таком случае, как известно, существует изоморфизм коалгебр $sQL_X \cong \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ (это можно доказать, исходя из рассмотрения спектральной последовательности для $\mathcal{C}(L_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]), причём стандартное коумножение на гомологиях совпадает с коумножением, построенным методом теоремы 3. Индуцируем посредством этого строгого изоморфизма $A_\infty$-коалгебраическую структуру на $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$, то есть дополним коумножение в когомологиях до $A_\infty$-структуры, пользуясь теоремой 3. Таким образом, мы можем доказать следующее утверждение.

**Следствие 2.** *Пусть $X$ — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ существует структура минимальной $A_\infty$-коалгебры $\Delta=(\Delta_2,\Delta_3,\dots)$, где $\Delta_2$ есть стандартное гомологическое коумножение, или, двойственным образом, структура минимальной $A_\infty$-алгебры на $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$, продолжающая его структуру кольца, причём $\Delta_n$ соответствует $n$-ой компоненте в разложении дифференциала $L_X$ в смысле теоремы 3. Наличие (отсутствие) соотношений длины $k$ в $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ (или в $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$) равносильно нетривиальности (соотв. тривиальности) соответствующей операции $m_k$ на $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$.*

*Доказательство.* Предположим, что в $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ имеется соотношение, содержащее слагаемые, являющиеся вложенными скобками от неразложимых элементов длины $n$, причём это соотношение не является следствием других соотношений (не входит в идеал, порождаемый другими соотношениями). Тогда задающий это соотношение элемент модели Квиллена $L_X$ является границей от неразложимого элемента $x$, а потому компонента $d^n$ дифференциала $d$ не равна нулю. По теореме это даёт нетривиальное $\Delta_n$.

Наоборот, если $\Delta_n$ не тождественно равно нулю, то $d^n$ не ноль на неком неразложимом элементе, поэтому в $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ имеется соотношение, содержащее скобки длины $n$. Так как это соотношение происходит из границы неразложимого элемента, оно не является следствием соотношений с меньшей максимальной длиной скобок. $\square$

**Пример.** Мы приведём здесь пример из торической топологии. Для натурального $m$ обозначим $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Подмножество $\mathcal{K}$ во множестве подмножеств $[m]$ называется *симплициальным комплексом*, если из того факта, что $I \in \mathcal{K}$, следует, что всякое $L \subseteq I$ также лежит в $\mathcal{K}$. Элементы $\mathcal{K}$ называются его *симплексами*, а элементы $1, 2, \ldots, m$, отождествляемые с одноэлементными симплексами, называют его *вершинами*. Пара вершин $i, j$ соединена ребром, если $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если для каждое множество вершин в $[m]$, попарно соединённых рёбрами, является симплексом в $\mathcal{K}$. Каждому симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ можно сопоставить его *флагизацию*, получаемую добавлением симплексов для каждого множества попарно соединённых вершин, если они уже не образовывали симплекс в $\mathcal{K}$.

Пусть $I \subseteq [m]$, а $(X, A)$ — топологическая пара. Обозначим

$$(X, A)^I = X_1 \times \cdots \times X_m,$$

где $X_k = X$, если $k \in I$, и $X_k = A$ иначе. В таком случае *момент-угол комплексом*, соответствующим симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называют топологическое пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I.$$

Объединение здесь берётся внутри $(D^2)^m$. Для основных определений, касающихся момент-угол комплексов и их гомотопических свойств мы отсылаем читателя к [6, Главы 4, 8].

В работах Денама–Сучю [7] и Грбич–Линтон [9] доказано, что момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеет в $H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ нетривиальное произведение Масси классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ содержит в качестве подграфа один из восьми «препятствующих» графов, указанных на рис. 1.

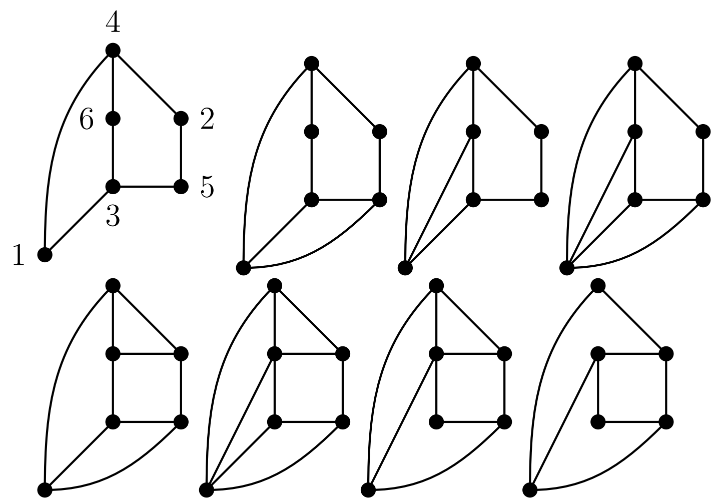


Рис. 1. Графы препятствий

В работе [16] был произведено вычисление соотношений в алгебрах Понтрягина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующим флагизациям всех восьми графов, найдены все соотношения в степенях $\leqslant 6$ (среди которых есть и кубические, что подтверждало неформальность пространств), однако вопрос об отсутствии других соотношений оставался открытым. При помощи результатов, описанных выше, этот вопрос можно разрешить следующим образом. Из формулы Хохстера для подсчёта когомологий [10], применённой к результату Бухштабера—Панова [6, Теорема 4.5.4] следует, что для всех восьми $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ ненулевые приведённые рациональные когомологии могут быть ненулевыми только в степенях $3 \leqslant k \leqslant 8$, поэтому для всякой $A_\infty$-структуры на $\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$ по причинам градуировки справедливо $m_i = 0$, $i \geqslant 4$, а $m_3$ может быть нетривиально только на тройке классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$ (где в образе оно имеет, с точностью до элементов из образа $m_2$, представитель нетривиального произведения Масси). По следствию 2, из тривиальности $m_i, i \geqslant 4$ следует, что соотношений длины больше, чем три, не существует. Так как $m_3$ может быть нетривиально только на тройке классов степеней 3, а соответствующие при изоморфизме элементы $QL_X$ будут иметь степени 2, то мы имеем, что соотношения длины три могут быть только в степени $2 \cdot 3 = 6$, а они уже посчитаны. Аналогично, чтобы имелись соотношения длины 2 в степенях больше, чем 6, должно быть нетривиальное произведение в когомологиях степени больше, чем $6+1+1 = 8$. Но когомологии этих комплексов, начиная со степени 9, тривиальны. Таким образом, полностью завершено вычисление алгебр Понтрягина этих пространств, к примеру, для флагизации $\mathcal{K}$ шестого по счёту графа на рис. 1 (того, где больше всего рёбер), мы получаем факторалгебру

$$\begin{gathered}H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{354}, b_{465})/\\ \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{12}, b_{465}], [a_{56}, b_{132}],\\ [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}]\rangle.\end{gathered}$$

Такой метод вычисления в принципе применим для всякого односвязного пространства, если известны его рациональные когомологии и имеющиеся соотношения в рациональной алгебре Понтрягина каким-либо образом удалось вычислить. Наши результаты позволяют доказывать лишь отсутствие или, когда удалось установить нетривиальность какого-либо $m_i$, наличие соотношений определённой степени, но не говорят ничего о виде такого соотношения.

Схожие результаты можно также получить в контексте минимальных моделей пространства, соотношений в гомологиях и коформальности. Для связного пространства $X$ существует минимальная алгебра $M_X$ над $\mathbb{Q}$ и квазиизоморфизм $M_X \to A_{PL}X$, где $A_{PL}X$ — PL формы де Рама на $X$. Если $X$ — нильпотентное пространство с рациональными гомологиями конечного типа, то $M_X$ имеет конечный тип, и определена минимальная коалгебраическая модель $C_X$ как двойственная коалгебра к $M_X$.

Заметим, что в случае симметрической коалгебры $S(V)$ всякий дифференциал $d$ на ней также допускает разложение $\mathrm{pr}_V \circ d$ в сумму $d^i$, где компонента с номером $i$ действует как $\mathrm{pr}_V \circ d$ на симметрических произведениях ровно $i$ примитивных элементов, и равна нулю на всех прочих элементах. Здесь $\mathrm{pr}_V$ есть проекция $S(V) \to V$.

В этом новом контексте аналогом теоремы 3 служит следующее утверждение.

**Теорема 4.** *Пусть $C$ — минимальная DG-коалгебра, без учёта дифференциала совпадающая с симметрической коалгеброй $S(V)$ на DG-векторном пространстве $V$. Тогда на $s^{-1}HPC$ существует структура минимальной $L_\infty$-алгебры $\ell = (\ell_2, \ell_3, \dots)$, со следующим свойством. Если*

$$d^n\left(\sum_j v_1^{(j)} \vee \dots \vee v_n^{(j)}\right) = v,$$

*то для $\overline{\ell}_n = s \circ \ell_n$ справедливо*

$$\overline{\ell}_n\left(\sum_j \bar{v}_1^{(j)} \vee \dots \vee \bar{v}_n^{(j)}\right) = \bar{v},$$

*где $\bar{x}$ есть цикл с представителем $x$.*

*Доказательство.* Рассмотрим примитивную фильтрацию на $C$, определяемую индуктивно следующим образом:

(1) $F_n(C) = 0$, $n < 0$;
(2) $F_0(C) = k$;
(3) $F_{n+1}(C) = \operatorname{Im}(i_n \oplus (\vee \circ (i_{PC} \otimes i_n)) : F_n(C) \oplus (PC \otimes F_n(C)) \to C)$, где $i_{PC}$ — вложение $PC \subseteq C$, $i_n$ — вложение $F_n(C) \subseteq C$, $\vee$ — симметрическое умножение, определённое на $S(V)$.

Иными словами, элементы $F^n(C)$ — это элементы $C$, представимые в виде суммы произведений не более $n$ примитивных элементов. Она порождает спектральную последовательность коалгебр с $E^0(C) = S(V)$, $E^1(C) = S(HV) = S(HPC)$, $E^1_{1,n} = H_{n+1}PC$.

Как и в теореме 3, мы вычислим сначала дифференциалы $d_r$ спектральной последовательности. В данном случае фильтрация возрастающая, так что

$$E^r_{p,q} = \frac{\{x \in F_pC_{p+q} : dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}}{\{x \in F_{p-1}C_{p+q} : dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\} + \{x \in F_pC_{p+q} : x = dy, y \in F_{p+r-1}C_{p+q+1}\}}.$$

В аналогии с 3, вычислим $E^r_{1,n+r-1}$ и $E^r_{r+1,n}$ для всех $r \geqslant 1, n \geqslant 0$. Из определения $E^r_{p,q}$ следует, что

$$E^r_{1,n+r-1} = \frac{\{x \in F_1C_{n+r} : dx \in F_{1-r}C_{n+r-1}\}}{\{x \in F_0C_{n+r} : dx \in F_{1-r}C_{n+r-1}\} + \{x \in F_1C_{n+r} : x = dy, y \in F_rC_{n+r+1}\}} = \\ \{x \in PC_{n+r} : dx \in F_{1-r}C_{n+r-1}, x \neq dy, y \in F_rC_{n+r+1}\}$$

а также, обозначая $C^{[n]} = F_nC/F_{n-1}C$ — элементы $C$, представимые в виде произведения $n$ примитивных элементов, но не $n-1$ примитивных элементов, получим

$$E^r_{r+1,n} = \frac{\{x \in F_{r+1}C_{n+r+1} : dx \in F_1C_{n+r}\}}{\{x \in F_rC_{n+r+1} : dx \in F_1C_{n+r}\} + \{x \in F_{r+1}C_{n+r+1} : x = dy, y \in F_{2r}C_{n+r+2}\}} = \\ \{x \in C^{[r+1]}_{n+r+1} : dx \in PC_{n+r}, x \neq dy, y \in F_{2r}C_{n+r+2}\}.$$

Дифференциал спектральной последовательности отображает $E^r_{r+1,n}$ в $E^r_{1,n+r-1}$. Он индуцирован на листе $E^r$ дифференциалом $d$ на $C$. Если $x$ — элемент из $E^r_{r+1,n}$ (которое посредством вычисления выше отождествлено с некоторым множеством элементов $C$), то $dx$ есть примитивный элемент, лежащий в $E^r_{1,n+r-1}$ (во множестве, с ним отождествляемом).

Определим теперь отображения на первом листе. Для каждого $r \geqslant 1$ зададим, как и ранее, композицию проекций $\eta^r_{p,q}$

$$Z^1_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1}+B^0_{p,q}) \to Z^r_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1}+B^0_{p,q}) \to Z^r_{p,q}/(Z^{r-1}_{p-1,q+1}+B^{r-1}_{p,q}) = E^r_{p,q}.$$

и отображения $d'_{r+1}, \overline{d}_{r+1}$ в точности так же, как в диаграмме 5 (с заменой $E^1_{0,n}$ на $E^1_{r+1,n}$, $E^1_{-r,n+r-1}$ на $E^r_{1,n+r-1}$ и т.д.). Как пояснено в доказательстве теоремы 3, в таком случае $\overline{d}_r$ задаётся как $\overline{d}_{r+1}(e+m) = d_{r+1}(e)$, где $e$ лежит в $E^r_{r+1,n}$, а $m$ — в факторе пространства $\ker \eta^r_{r+1,n}$ (всякий представитель класса $m$ после взятия от него $d$ будет иметь нулевую компоненту $d^{r+1}$), иными словами, $\overline{d}_r(\bar{x})$ есть образ компоненты $d^r(x)$ в $E^1$, где $x$ есть представитель цикла $\bar{x}$.

Отображение $\overline{\ell}_r$ задаётся композицией

$$(HPC)^{\otimes(r+1)}_{n+r+1} \xrightarrow{\pi} S(HPC) \longrightarrow E^1_{r+1,n} \xrightarrow{\overline{d}_r} E^1_{1,n+r-1} \xrightarrow{=} H_{n+r}PC$$

Под $(HPC)^{\otimes(r+1)}_{n+r+1}$ понимаются все элементы степени $n+r+1$ в $(HPC)^{\otimes(r+1)}$, $\pi$ есть проекция $T(V) \to S(V)$, стрелка $S(HPC) \to E^1_{r+1,n}$ есть каноническая проекция. Отображения $\overline{d}_r$ уже вычислены, поэтому для $\overline{\ell}_i$ справедлива формула для $\overline{d}_i$

$$\overline{\ell}_n\left(\sum_j \bar{v}^{(j)}_1 \vee \cdots \vee \bar{v}^{(j)}_n\right) = \bar{v},$$

если $d$ отображает сумму $\sum_j \bar{v}^{(j)} \vee \cdots \vee v^{(j)}_n$ в $v$. Для удобства черты над элементами, означающие, что они есть классы гомологий, далее будем опускать.

Так как $\pi$ симметрична, то $\overline{\ell}_i$ также удовлетворяют свойству симметрии

$$\overline{\ell}_i(v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}) = \varepsilon(\tau)\overline{\ell}_i(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).$$

Для доказательства обобщённых тождеств Якоби воспользуемся леммой 1. Положив в ней $f = \mathbf{id} : C \to C = S(V)$, мы заключим следующее. Если понимать дифференциал $d$ на $C$ как продолжение его ограничения $d|_V$ как кодеривации на всю $C$, то по этой же лемме $\mathrm{pr}_{V^{\vee n}} \circ d$ можно также задать отображением $\vee \circ (\sum_{i+j=n} (\mathrm{pr}_V \circ d^i|_V) \otimes \mathrm{id}^{\otimes j}) \circ \Delta_C|_{V^{\vee n}}$, где $\mathrm{pr}_V$ — проекция $S(V) \to V$. Так как $d \circ d = 0$, то

$$0 = d^n \circ (\mathrm{pr}_{V^{\vee n}} \circ d) = d \circ \vee \circ \left(\sum_{i+j=n} (\mathrm{pr}_V \circ d^i|_V) \otimes \mathrm{id}^{\otimes j}\right) \circ \Delta_C|_{V^{\vee n}}.$$

Применим отображение в правой части к элементу $v_1 \vee \cdots \vee v_n$, где $v_i \in V$. Воспользуемся формулой для коумножения (2), а также тем, что $\overline{\ell}_i$ действуют, как компоненты $d^i$, как обсуждалось выше. Получим равенство

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\tau \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\tau)\overline{\ell}_j(\overline{\ell}_i(v_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(i)}) \otimes v_{\tau(i+1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau(n)}) = 0.$$

Таким образом, отображения $\ell_n = (s^{-1})^{\otimes n} \circ \overline{\ell}_n \circ s$ удовлетворяют тождествам Якоби по предложению 2, а потому задают $L_\infty$-структуру.

$\square$

Пусть $C_X$ — минимальная коалгебраическая модель односвязного пространства с рациональными гомологиями конечного типа. Известный результат говорит, что имеется изоморфизм алгебр Ли $s^{-1}PC \cong \pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ (это доказывается рассмотрением спектральной последовательности для $\mathcal{L}(C_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]). Так же, как и в случае с теоремой 3 аналог следствия 2 для $L_\infty$-структуры.

**Следствие 3.** *Пусть $X$ — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ существует структура минимальной $L_\infty$-алгебры $\ell = (\ell_2, \ell_3, \dots)$, где $\ell_2$ соответствует произведению Самельсона. Отображения $\ell_n$ связаны с компонентами $d^n$ разложения дифференциала на $C_X$, как в теореме 4. Наличие (отсутствие) соотношений определённой длины в $H_*(X;\mathbb{Q})$ равносильно нетривиальности (соотв. тривиальности) соответствующей операции $\ell_n$ на $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$.*

**Замечание.** Результаты этого раздела можно также распространить на неодносвязный случай. Пусть $X$ — нильпотентное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Как обсуждалось, для такого $X$ существует модель $C_X$, однако нет гарантии существования модели Квиллена $L_X$. В таком случае $PC_X$ изоморфна

$$\mathfrak{l}(\pi_1(X)\otimes\mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{i\geqslant 2}(\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q})\,, \tag{6}$$

где $\mathfrak{l}(\pi_1(X)\otimes\mathbb{Q})$ — алгебра Ли пополнения Мальцева ([4, Приложение A3]). В случае существования $L_X$ это совпадает с $sHL_X$. Теоремы 3 и 4 дают $A_\infty$-структуру на $\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ (когда существует $L_X$) и $L_\infty$-структуру на (6) соответственно.

3.2. **Критерии формальности.** Как продолжение идей Каледина, мы найдём полезным формулировку результатов, не включающую присоединение формальной переменной.

Комплекс $\operatorname{Coder}(\overline{T}sA))$ снабжён фильтрацией, где $F^k\operatorname{Coder}(\overline{T}sA))$ есть все кодеривации, равные нулю вне $\bigoplus_{j\geqslant k}(sA)^{\otimes j}$.

Пусть $(A, m_A)$ — минимальная плоская $A_\infty$ $R$-алгебра, и $m_A = m_2 + m_3 + \dots$ — разложение $m_A$ как кодеривации, и пусть

$$\tilde{m}_A = m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots .$$

Кодеривация $\tilde{m}_A$ является коциклом относительно дифференциала $[m_A, \cdot]$, а, значит, определяет класс в $H^1(F^1\operatorname{Coder}(\overline{T}sA))$, который мы обозначим $\tilde{K}_A$. Аналогично мы определим усечённый класс $\tilde{K}_{A,n}$ в $H^1(F^1\operatorname{Coder}(\overline{T}s\tilde{A})/F^{n+1})$, задаваемый представителем

$$\tilde{m}_{A,n} = m_3 + 2m_4 + \dots + (n-1)m_{n+1},$$

Следующее утверждение показывает, что $\tilde{K}_A$ и $\tilde{K}_{A,n}$ непосредственно связаны с классическими классами Каледина $K_{\tilde{A}}$, $K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$.

**Лемма 2.** *В указанных выше условиях класс $\tilde{K}_A$ ($\tilde{K}_{A,n}$) обращается в ноль тогда и только тогда, когда $K_{\tilde{A}}$ (соотв. $K_{\tilde{A}/h^{n+1}}$) обращается в ноль.*

*Доказательство.* Условие обращения в ноль класса Каледина эквивалентно существованию элемента $t$ степени 0 в комплексе Хохшильда $\tilde{A}$ такого, что $[m_A, t] = \partial_h m$. Запишем $t$ в разложении по степеням $h$:

$$t = t_1 + t_2 h + t_3 h^2 + \dots$$

Тогда условие на $t$ преобразуется как

$$\sum_{j\geqslant 1}\sum_{i\geqslant 2}[m_i, t_j]h^{i+j-3} = \sum_{j\geqslant 3}(j-2)m_j h^{j-3}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 2}[m_i, t_{n+3-i}]h^n = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)m_{n+3}h^n,$$

откуда приравниванием слагаемых при равных степенях $h$ и сдвигом индекса $n$ получим

$$\sum_{i\geqslant 2}[m_i, t_{n-i}] = (n-2)m_n, \quad n \geqslant 3, \tag{7}$$

где можно считать, что $t_j$ имеет арность $j$ (т.е. равно нулю вне $\tilde{A}^{\otimes j}$). С другой стороны, условие обращения в ноль класса $\tilde{K}_A$ означает существование кодеривации $t = t_1 + t_2 + \dots$ степени 0 такой, что $[m_A, t] = \tilde{m}_A$, где $t_j$ — компонента арности $j$. Расписывая это условие, получаем равенство, идентичное (7). Утверждение про усечённые классы доказывается совершенно аналогично. □

Заметим, что $\tilde{K}_A$ рассматривается как класс когомологий в $F^1 \operatorname{Coder}(\overline{T}sA)$. Его представитель $\tilde{m}_A$, конечно, задаёт класс в $H^1(\operatorname{Coder}(\overline{T}sA))$, но он всегда равен нулю, как мы увидим далее.

**Определение 9.** Пусть заданы $A_\infty$ $R$-алгебры $(A, m_A)$, $(B, m_B)$ и $A_\infty$-морфизм $f : A \to B$. Определим $\alpha_f$ равенством

$$\alpha_f(a) = (\deg a + 1) f_1(a),$$

где $f_1$ есть первая компонента морфизма $f$. Символом $\alpha_A$ будем обозначать $\alpha_{\mathrm{id}_A}$.

Если алгебры минимальны, то это также обеспечит согласие $\alpha_f$ со структурами цепных комплексов на $A$ и $B$. Важным свойством $\alpha_A$ является следующее утверждение.

**Лемма 3.** *Пусть $\beta$ - кодеривация на $\overline{T}sA$, имеющая только компоненту арности $p$. Тогда справедливо*

$$[\beta, \alpha_A] = (p - \deg\beta - 1)\beta,$$

*где $\deg\beta$ — степень $\beta$ как однородного отображения. Причём в $\operatorname{Coder}(\overline{T}sA)$ выполнено $[m_A, \alpha_A] = \tilde{m}_A$.*

*Доказательство.* Первое следует непосредственно из определения градуированного коммутатора $[\cdot,\cdot]$. Второе следует из первого и того, что

$$[m_A, \alpha_A] = \sum_{i\geqslant 2}[m_i, \alpha_A] = \sum_{i\geqslant 2}(i-2)m_i = \tilde{m}_A.$$

□

Как следствие, класс $[\tilde{m}_A]$ равен нулю в $H^1(\mathrm{Coder}(\overline{T}sA))$. С $A_\infty$-морфизмом $f : A \to B$ мы свяжем комплекс

$$\mathrm{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}_R^*(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) : \Delta\alpha = (\alpha \otimes f + f \otimes \alpha)\Delta\}$$

с дифференциалом $d\alpha = m_B\alpha - (-1)^{\deg \alpha}\alpha m_A$. Он как и комплекс Хохшильда снабжён фильтрацией, где $F^p \,\mathrm{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$ есть морфизмы с нулевыми компонентами арности $\leqslant p$. Нетрудно понять, что если $f : A \to B$, $g : B \to C$ — $A_\infty$-морфизмы, то они индуцируют морфизмы фильтрованных комплексов

$$f^* : \mathrm{Coder}_f(\mathcal{B}B, \mathcal{B}C) \to \mathrm{Coder}_{gf}(\mathcal{B}A, \mathcal{B}C) \leftarrow \mathrm{Coder}_g(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B) : g_*.$$

С комплексом $\mathrm{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$ мы свяжем спектральную последовательность $E_r^{*,*}(A, B, f)$.

Далее мы будем считать, что $R = k$ — поле характеристики ноль.

**Лемма 4.** *Если $f : A \to B$, $g : B \to C$ — квазиизоморфизмы $A_\infty$-алгебр, то индуцированные морфизмы $g_*$, $f^*$ спектральных последовательностей являются изоморфизмами, начиная с первых их листов.*

*Доказательство.* По теореме Кюннета

$$E_1^{p,q}(A, B, f) \cong \mathrm{Hom}_k^{p+q}(\mathcal{B}HA, \mathcal{B}HB)$$

и аналогично

$$E_1^{p,q}(A, C, gf) \cong \mathrm{Hom}_k^{p+q}(\mathcal{B}HA, \mathcal{B}HC),$$

откуда сразу следует утверждение леммы. □

Для минимальных алгебр мы можем рассматривать $\alpha_f$ как элемент $E_1^{1,-1}(A, B, f) \cong \mathrm{Hom}_k^0(A, B)$.

**Лемма 5.** *Обозначим $d_1$ — дифференциал на $E_1^{*,*}(A, B, f)$. Справедливо, что $d_1(\alpha_f) = 0$.*

*Доказательство.* Значение $d_1(\alpha_f)$ есть не что иное, как компонента арности 2 элемента $m_B\alpha_f - \alpha_f m_A$, где $\alpha_f$ воспринимается как кодеривация. Соответствующая компонента отображения $\alpha_f m_A$ имеет вид

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto (\deg a_1 + \deg a_2 + 2) f_1((m_A)_2(a_1 \otimes a_2)),$$

а компонента отображения $m_B\alpha_f$ имеет вид

$$a_1 \otimes a_2 \mapsto (m_B)_2((\deg a_1 + 1) f_1(a_1) \otimes a_2) + (m_B)_2(a_1 \otimes (\deg a_2 + 1) f_1(a_2)),$$

что есть то же самое. □

В частности, $\alpha_f$ определяет элемент в $E_2^{1,-1}(A, B, f)$. Важность класса $\alpha_f$ объясняется следующим утверждением.

**Предложение 3.** *Усечённый класс $\tilde{K}_{A,n}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $d_r(\alpha_A) = 0$ при $r = 2, \ldots, n$. Аналогично $\tilde{K}_A = 0 \Leftrightarrow \alpha_f$ — перманентный коцикл в спектральной последовательности.*

Для доказательства предложения нам понадобится следующая техническая лемма, употребляемая в [5, Предл. 4.5] без дополнительного обоснования.

**Лемма 6.** *Для минимальной $A_\infty$ $R$-алгебры $\tilde{K}_{A,n} = 0$ тогда и только тогда, когда существует $A_\infty$-изоморфизм $(A, m_A) \to (A, m'_A)$, где $m'_2 = m_2$, и $m'_i = 0$ при $3 \leqslant i \leqslant n + 1$.*

*Доказательство.* То, что первое утверждение есть следствие второго, следует из инвариантности класса $\tilde{K}_A$. Доказательство обратной импликации проводим индукцией по $n$. База $n = 1$ тривиальна. Если $\tilde{K}_{A,n} = 0$, то и $\tilde{K}_{A,n-1} = 0$, и по предположению индукции мы можем положить, что $m_A = m_2 + m_{n+1} + m_{n+2} + \ldots$, и потому $\tilde{m}_A = (n-1)m_{n+1} + nm_{n+2} + \ldots$. Так как $\tilde{m}_A$ должно обращаться в ноль в арностях $\leqslant n+1$, то существует $t = t_2 + t_3 + \cdots \in F^1 \operatorname{Coder}(\mathcal{B}A)$ такая, что $[m_A, t] = \tilde{m}_A$ в арностях $\leqslant n+1$. В арности $n+1$ это означает, что $[m_2, t_n] = (n-1)m_{n+1}$. Тогда $m'_A = \exp(-\frac{t_n}{n-1}) m_A \exp(\frac{t_n}{n-1})$ задаёт $A_\infty$-структуру на $A$ и $\exp(\frac{t_n}{n-1})$ есть $A_\infty$-изоморфизм $(A, m'_A) \to (A, m_A)$. Как нетрудно проверить, $m'_i = m_i$ при $i \leqslant n$, и $m'_{n+1} = m_{n+1} - [m_2, \frac{t_n}{n-1}] = 0$. □

*Доказательство предложения.* Если $\tilde{K}_{A,n} = 0$, то по лемме мы можем положить $m_3 = \cdots = m_{n+1} = 0$, и $m_A = m_2 + m'$, где $m' \in F^{n+2} \operatorname{Coder}(\mathcal{B}A)$. Пусть $2 \leqslant r \leqslant n$, а $x$ — кодеривация, сосредоточенная в арности $p$ такая, что $[m_A, x] \in F^{p+r} \operatorname{Coder}(\mathcal{B}A)$. Мы имеем $[m_2, x] = 0$ и $[m_A, x] = [m', x]$, что лежит в $F^{p+r+1} \operatorname{Coder}(\mathcal{B}A)$, откуда $d_r = 0$.

Докажем обратную импликацию. Из определения дифференциала $d_r$ следует и нашего предположения $d_r(\alpha_A) = 0$, что существуют кодеривации $t_i = t_{i,2} + \cdots + t_{i,i+1}$ такие, что

$$\sum_{j=2}^{p} [m_j, t_{i,p+1-j}] = \begin{cases} 0, & 2 \leqslant p \leqslant i, \\ im_{i+2}, & p = i+1. \end{cases}$$

Полагая $m'_A = m'_2 + \cdots + m'_n$, где $m'_i = \sum_{j=1}^{i} t_{j,i}$, получим, что $[m_A, m'_A]$ совпадает с $\tilde{m}_A$ по модулю $F^{n+2}$, что показывает, что $\tilde{K}_{A,n} = 0$. □

Таким образом, мы доказали следующее.

**Теорема 5.** *Положим, что $(A, m_A)$ — минимальная $A_\infty$-алгебра. Следующие условия эквивалентны.*

(1) *$A$ формальна ($n$-формальна);*
(2) *$\tilde{K}_A = 0$ ($\tilde{K}_{A,n} = 0$);*
(3) *$E_r^{*,*}(A, A)$ коллапсирует на $E_2$ ($E_2 = \cdots = E_n$);*
(4) *$d_r(\alpha_A) = 0$ для всех $r$ (для $2 \leqslant r \leqslant n$).*

Мы теперь исследуем спектральные последовательности, связанные с не тождественными $A_\infty$-морфизмами.

**Лемма 7.** *Пусть $f : (A, m_A) \to (B, m_B)$ — морфизм минимальных $A_\infty$-алгебр и $(m_A)_i = (m_B)_i = 0$ для $3 \leqslant i \leqslant n+1$. Тогда для спектральной последовательности $E_r^{*,*}(A, B, f)$ справедливо $d_r = 0$ для $r = 2, \ldots, n$.*

*Доказательство.* Доказательство производится по индукции. Предполагаем, что $d_2 = \cdots = d_{n-1} = 0$ и покажем, что $d_n = 0$. Элемент $x \in E_n^{p,*}$ представляется линейным отображением $g$ арности $p$ таким, что при продолжении его как кодеривации выполнено $m_B g - (-1)^{\deg g} g m_A \in F^{p+n} \operatorname{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$. Запишем $m_A = (m_A)_2 + \bar{m}_A$, где $\bar{m}_A$ есть сумма $\sum_{i \geqslant n+2} (m_A)_i$, и аналогично для $B$. Тогда $(m_B)_2 g - (-1)^{\deg g} g (m_A)_2 = 0$, поэтому $m_B g - (-1)^{\deg g} g m_A = \bar{m}_B g - (-1)^{\deg g} g \bar{m}_A \in F^{p+n+1} \operatorname{Coder}_f(\mathcal{B}A, \mathcal{B}B)$, откуда $d_n(x) = 0$. □

Эту лемму можно рассматривать как аналог леммы 6 для более общего класса морфизмов. Как следствие критерия формальности, мы получим следующий результат.

**Предложение 4.** *Пусть $f : (A, m_A) \to (B, m_B)$ — морфизм минимальных $A_\infty$-алгебр, причём $f_* : E_2^{p,1-p}(A, A) \to E_2^{p,1-p}(A, B, f)$ инъективно для всех $p \geqslant 3$ и $B$ формальна. Тогда $A$ формальна.*

*Доказательство.* Мы сразу можем считать, что $m_B = (m_B)_2$. Пусть $n \geqslant 3$ — наименьший номер такой, что $(m_A)_n \neq 0$. По лемме 7 $E_2^{*,*}(A, A) = E_{n-1}^{*,*}(A, A)$ и $E_2^{*,*}(A, B, f) = E_{n-1}^{*,*}(A, B, f)$, поэтому инъективность распространяется на $(n-1)$-ые листы. Тогда для каждого $2 \leqslant k \leqslant n-1$ справедливо

$$f_*(d_k\alpha_A) = d_k f_*(\alpha_A) = d_k f^*(\alpha_B) = f^*(d_k\alpha_B) = 0,$$

откуда $d_k\alpha_A = 0$ при $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Поэтому $A$ $(n-1)$-формальна и тогда с точностью до $A_\infty$-автоморфизма можно считать, что $(m_A)_n = 0$. Повторяя это рассуждение счётное число раз, мы приходим к утверждению предложения. □

Данные результаты обобщаются совершенно аналогичным образом на случай $L_\infty$-алгебр. Для них также определяется комплекс $\mathrm{Coder}_f$ (*комплекс Шевалле—Эйленберга*), классы $\tilde{K}_A$ и $\alpha_f$. Полученные результаты дают результаты, применимые к формальности DG-алгебр и алгебр Ли при подстановке в утверждения соответствующих минимальных моделей. Мы продемонстрируем применимость результатов формальности, доказав следующие следствия.

**Следствие 4.** *Пусть $A$, $B$ — DG-алгебры. Тогда $A \oplus B$ формальна $\Leftrightarrow$ $A$ и $B$ формальны. Аналогичное утверждение справедливо для DG-алгебр Ли.*

*Доказательство.* Следствие предложения 4, так как $A$ (или $B$) есть прямое слагаемое $A$-модуля (соотв. $B$-модуля) $A \oplus B$. □

**Следствие 5.** *Если $A$, $B$ — DG-алгебры, $H^*(B) \neq 0$, $A \otimes B$ формальна, тогда $A$ формальна.*

*Доказательство.* В алгебре $B$ 1 не является кограницей, иначе если $1 = da$, то для любого коцикла $b \in B$ $d(ab) = b$. Поэтому есть разложение $B = k \oplus C$, где $dC \subseteq C$. Утверждение следует из следствия 4, так как $A$ есть прямое слагаемое в $A \otimes B = A \oplus (A \otimes C)$. □

## Список литературы


[1] J. Neisendorfer, T. Miller. *Formal and coformal spaces.* Illinois Journal of Mathematics, vol. 22, no. 4. (1978), 565–580.

[2] J. Neisendorfer. *Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory of nilpotent spaces.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 74, no. 2 (1978), 429–460.

[3] B. Reinhold. *$L_\infty$-algebras and their cohomology.* Emergent Scientist, vol. 3, no. 4 (2019).

[4] D. Quillen. *Rational homotopy theory.* Annals of Mathematics, Second Series, vol. 90, no. 2 (1969), 205–295.

[5] V. A. Lunts. *On formality of DG algebras (after Kaledin).* arXiv:0712.0996.

[6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[7] G. Denham, A. I. Suciu. *Moment-angle complexes, monomial ideals and Massey products.* Pure and Applied Mathematics Quarterly, vol. 3, no. 1 (2007), 25–60.

[8] B. Keller. *Introduction to A-infinity algebras and modules.* arXiv:math/9910179

[9] J. Grbić, A. Linton. *Lowest-degree triple Massey products in moment-angle complexes.* arXiv:1908.02222v2

[10] Melvin Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes.* Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference). Dekker, New York (1977), 171–223.

[11] F. Belchi, U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *Higher order Whitehead products and L-infinity structures on the homology of a DGL.* Linear Algebra and Its Applications, vol. 520 (2017), 16–31.

[12] U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *$A_\infty$-structures and Massey products.* arXiv:1801.03408

[13] D. Kaledin. *Some remarks on formality in families.* Mosc. Math. J. 7 (2007), no. 4, 643–652.

[14] E. S. Chibrikov. *A right normed basis for free Lie algebras and Lyndon—Shirshov words.* Journal of Algebra, vol. 302, no. 2 (2006), 593–612.

[15] Т. В. Кадеишвили. *Алгебраическая структура на гомологиях $A_\infty$-алгебры.* Сообщ. Акад. наук Груз. ССР., т. 108, 249–252.

[16] В. А. Грауман. *Гомологии петель момент-угол комплексов, соответствующих флаговым комплексам.* Курсовая работа. URL: `http://higeom.math.msu.su/course_papers/Grauman3.pdf`.