Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Дифференциалы в спектральной последовательности Квиллена и высшие произведения Уайтхеда в торической топологии

Курсовая работа
студента 5 курса 503 группы
Граумана Владислава Александровича

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2023 г.

1. Введение

Одной из наиболее важных операций в нестабильной теории гомотопий являются *высшие произведения Уайтхеда.* Особая ясность при изучении высших произведений Уайтхеда вносится рассмотрением случая рациональной теории гомотопий, где имеются классические инструменты в виде явных алгебраических моделей типа Салливана и Квиллена. Последний в своей ключевой работе [3] построил функтор λ из категории рациональных гомотопических типов односвязных пространств в категорию редуцированных рациональных DG-алгебр Ли. Всякая лиевская модель для λX содержит полную информацию о рациональной гомотопической алгебре X. Если эта модель кофибрантна и имеет разложимый дифференциал, то мы называем её (минимальной) моделью Квиллена. Высшие произведения в этом контексте выступают просто как лиевский аналог произведений Масси, и модели предоставляют явный инструмент для их вычисления.

Важность работы Квиллена состоит также и в том, что в ней рассматривается вопрос построения коалгебраических моделей. Существует функтор $\mathcal{C}$ из категории редуцированных рациональных DG-алгебр Ли в категорию 2-редуцированных рациональных DG-коалгебр. Всякая коалгебраическая модель для $\mathcal{C}(L_X)$, где L_X есть модель Квиллена X, имеет гомологии, изоморфные рациональным сингулярным гомологиям X. Если эта модель фибрантна и имеет коразложимый дифференциал (т.е. нулевой на примитивных элементах), её называют минимальной коалгебраической моделью X. Рассматривая примитивную фильтрацию на $\mathcal{C}(L_X)$, Квиллен получил спектральную последовательность коалгебр, связывающую гомологии пространства с рациональными гомотопическими группами. Эта последовательность была изучена главным образом в работах C. Allday [1, 2], где доказана связь между дифференциалами этой последовательности и высшими произведениями Уайтхеда. Важен тот факт, что в общем случае значения дифференциалов не исчерпываются линейными комбинациями итерированных высших произведений от элементов рациональных гомотопических групп. Если для какого-либо пространства или класса пространств всё же такое исчерпание имеет место, это бы означало порождаемость рациональных гомотопических алгебр этих пространств относительно операции взятия комбинаций всевозможных итерированных высших произведений теми элементами, которые выживают до примитивных элементов рациональных сингулярных гомологий. Мы в этой работе используем этот факт для исследования вопроса такой порождаемости в случае класса пространств Дэвиса-Янушкевича $(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}}$ для всевозможных конечных симплициальных комплексов $\mathcal{K}$. В этой работе мы исследуем более общий случай произвольной свободной алгебры Ли, а, следовательно, согласно подходу Квиллена, и любого односвязного пространства с гомологиями конечного типа. Оказывается, что некоторая модификация конструкции произведений Уайтхеда обеспечивает порождаемость, упомянутую выше. Априори исключить наличие модифицированных произведений Уайтхеда в рациональных гомотопических группах $(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}}$ нельзя. Идеи, полученные при вычислениях в лиевских моделях, применяются также для исследования вопроса реализуемости высшего произведения, который был разрешён в [5] для случая вложенности глубины два.

Структура работы такова.

В разделе 2.1 излагаются предварительные определения и утверждения, связанные с рациональными высшими произведениями Уайтхеда, следуя [2].

В разделе 2.2 даются основные сведения о конструкции спектральной последовательности, следуя [1], а также обосновывается связь первого её дифференциала со стандартным бинарным произведением Уайтхеда.

В разделе 2.3 мы определим конструкцию полиэдрального произведения, а также основной класс интересующих нас топологических пространств $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$. Для них определяются канонические высшие произведения Уайтхеда.

В разделе 3.1 исследуется возможность применения лестничного метода к вычислению дифференциалов спектральной последовательности Квиллена.

В разделе 3.2 исследованы дифференциалы спектральной последовательности применительно к свободным рациональным алгебрам Ли, в частности, это применительно к минимальным моделям Квиллена. Основным результатом является теорема 2.

В разделе 3.3 доказываются критерии определённости и тривиальности канонически выбранных высших рациональных произведений Уайтхеда в $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$.

Автор желает выразить благодарность своему научному руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за ценное обсуждение настоящей работы.

2. Предварительные сведения

2.1. **Рациональные высшие произведения Уайтхеда.** Для категории алгебраических объектов $\mathcal{A}$, мы будем обозначать как $(G\mathcal{A})_r$ и $(DG\mathcal{A})_r$ категории r-редуцированных градуированных объектов и дифференциальных градуированных объектов над $\mathcal{A}$. Здесь в качестве $\mathcal{A}$ будет выступать L — категория алгебр ли над $\mathbb{Q}$ или C — категория коалгебр над $\mathbb{Q}$. Также под $\mathcal{T}_2$ будет пониматься категория односвязных $\mathbb{Q}$-локализованных CW-комплексов с отмеченной точкой.

Мы начнём введение в высшие произведения с универсального примера, а именно с модели Квиллена, описывающей толстый букет $T = T(S^{n_1}, \ldots, S^{n_k})$ сфер указанных размерностей $n_i \geqslant 2$. Пусть $P = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ есть произведение этих сфер, оно отличается от T наличием ещё одной клетки максимальной размерности. Порождающие модели Квиллена L_T находятся во взаимно-однозначном соответствии с клетками T, имея степени на единицу меньше, чем размерности этих клеток. Таким образом, каждому собственному подмножеству μ в $\{1, \ldots, k\}$ соответствует $\beta_\mu \in L_T$. Дифференциал можно получить из структуры коалгебры на $H_*(T; \mathbb{Q})$, наследуемой из $H_*(P; \mathbb{Q})$, которая в свою очередь есть произведение коалгебр гомологий для каждой из сфер. Исходя из этих соображений, в [2] была получена требуемая формула.

Предложение 1 ([2]). *Дифференциал d на L_T можно выбрать так, чтобы он удовлетворял формуле*

$$d\beta_\mu = \sum (-1)^{\mu_{\rho(1)} + \cdots + \mu_{\rho(n)} + \varepsilon(\pi)} [\beta_{\mu\rho}, \beta_{\mu\sigma}], \tag{1}$$

где $\mu = \{\mu_1, \ldots, \mu_p\}$, $1 \leqslant \mu_1 < \cdots < \mu_p \leqslant k$, сумма берётся по всем тасующим подстановкам $\pi = (\rho, \sigma)$ таким, что $\pi(1) = 1$ (т.е. подстановкам типа II относительно 1), $\mu\rho = \{\mu_{\rho(1)}, \ldots, \mu_{\rho(n)}\}$, если $\rho \in S_n$ и аналогично для $\mu\sigma$, а также $\varepsilon(\pi)$ есть знак Кошуля, определяемый из соотношения $z_1 \ldots z_p =$

$(-1)^{\varepsilon(\pi)} z_{\pi(1)} \dots z_{\pi(p)}$ в симметрической алгебре на порождающих z_i степеней n_{μ_i}.

Модель Квиллена L_P может быть построена как $L_T \sqcup L(\beta)$, где $d\beta$ есть выражение в правой части (1) при $\mu = \{1, \dots, k\}$, ограничение дифференциала на L_T совпадает с дифференциалом в L_T, причём $d\beta$ есть представитель приклеивающего отображения клетки максимальной размерности в P.

Так как дифференциалы модели Квиллена L_P есть, согласно предложению, рациональные представители приклеивающих отображений клеток, мы называем выражение для $d\beta$ *универсальным (высшим) произведением Уайтхеда* $[a_1, \dots, a_k]$, где a_i — рациональный представитель вложения $S^{n_i} \to P$.

После универсального примера нетрудно определить общее высшее произведение в любом пространстве X из $\mathcal{T}_2$. Пусть $x_i \in \pi_{n_i-1}(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $n_i \geqslant 2$. Подмножество $[x_1, \dots, x_k] \subseteq \pi_{n_1+\dots n_k-2}(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ определяется следующим образом. Выберем циклы-представители $\xi_i \in (L_X)_{n_i-1}$ для x_i. Предположим, что для всех собственных подмножеств $\mu \subset \{1, \dots, k\}$ существуют элементы $\xi_\mu \in L_X$ степени $n_1 + \dots + n_k - 1$ такие, что

$$d\xi_\mu = \sum (-1)^{\mu_{\rho(1)} + \dots + \mu_{\rho(n)} + \varepsilon(\pi)} [\xi_{\mu\rho}, \xi_{\mu\sigma}],$$

где $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$, $1 \leqslant \mu_1 < \dots < \mu_p \leqslant k$, сумма пробегает все тасующие перестановки $\{1, \dots, p\}$ типа II относительно 1. Положим

$$\zeta = \sum (-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_p + \varepsilon(\pi)} [\xi_\mu, \xi_\nu],$$

где суммирование производится по всем тасующим перестановкам $\pi = (\mu, \nu)$ множества $\{1, \dots, k\}$ типа II относительно 1. Элемент ζ является циклом, как можно убедиться вычислением.

Определение 1. Мы будем считать по определению *высшим рациональным произведением Уайтхеда* $[x_1, \dots, x_k]$ равным множеству всех таких классов в $\pi_{n_1+\dots+n_k-2}(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, которые представимы всевозможными элементами ζ, получаемыми посредством описанной выше процедуры. Класс, задаваемый ζ, зависит от выбора элементов ξ_μ. Совокупность всех ξ_μ, участвующих в определении (кроме изначальных ξ_i) поэтому называют *определяющей системой* произведения Уайтхеда.

Высшие произведения Уайтхеда являются лиевым аналогом произведений Масси в ассоциативных алгебрах, поэтому их ещё можно называть скобками Ли-Масси (см. [8]) в моделях Квиллена.

Ясно, что $[x_1, \dots, x_k] \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $0 \in [x_{\mu_1}, \dots, x_{\mu_p}]$ для всех μ таких, что $1 \leqslant \mu_1 < \dots < \mu_p \leqslant k$ и $1 < p < k$. Мы говорим, что произведение Уайтхеда тривиально, если оно содержит нулевой класс. Так что необходимое и достаточное условие существования произведения Уайтхеда это тривиальность всех произведений от меньшего числа элементов.

2.2. **Спектральная последовательность Квиллена.** Здесь мы изложим основные определения из [3] и конструкцию спектральной последовательности, а также основные её свойства, полученные в [1, 2].

В [3] Квиллен построил функтор $\lambda : \mathcal{T}_2 \to (DGL)_1$ такой, что $H\lambda X \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ со скобкой Ли, задаваемой произведением Самельсона, сопряжённым к произведению Уайтхеда. Как известно, λ индуцирует эквивалентность

$\mathrm{Ho}(\lambda) : \mathrm{Ho}(\mathcal{T}_2) \to \mathrm{Ho}((DGL)_1)$ гомотопических категорий. Также Квиллен конструирует функтор $\mathcal{C} : (DGL)_1 \to (DGC)_2$ с тем свойством, что $H\mathcal{C}\lambda X \cong H_*(X;\mathbb{Q})$.

Для вычислений прежде всего необходимо указать конкретное построение функтора $\mathcal{C}$, здесь мы следуем оригинальной работе Квиллена. Мы будем обозначать как Σ функтор надстройки, повышающий степени элементов на единицу. Пусть L — объект из $(DGL)_1$, для него определим DG-алгебру Ли $\Sigma L\sharp L$. Как градуированное векторное пространство она будет совпадать с прямой суммой $\Sigma L \oplus L$. Обозначим стандартные вложения $L \to \Sigma L \to \Sigma L\sharp L$ и $L \to \Sigma L\sharp L$ как Σ и θ соответственно. Скобка Ли на $\Sigma L\sharp L$ определяется следующими требованиями для всех $x, y \in L$.

(1) $[\Sigma x, \Sigma y] = 0$;
(2) $[\Sigma x, \theta y] = \Sigma[x, y]$;
(3) $[\theta x, \theta y] = \theta[x, y]$.

Дифференциал на $sL\sharp L$ определяется требованием, чтобы для всех $x \in L$ выполнялось следующее:

(1) $d(\Sigma x) = \theta x - \Sigma dx$;
(2) $d(\theta x) = \theta dx$.

Здесь в правых частях понимается дифференциал d на L. Если U — функтор универсальной обёртывающей алгебры, то $U(\Sigma L\sharp L)$ имеет структуру правого $U(L)$-модуля посредством отображения θ. По определению $\mathcal{C}(L)$ это коалгебра $U(\Sigma L\sharp L)\otimes_{U(L)}\mathbb{Q}$, и дифференциал на $\mathcal{C}(L)$ задаётся требованием, что естественная сюрьекция $\pi : U(\Sigma L\sharp L) \to \mathcal{C}(L)$ есть морфизм DG-коалгебр. Пусть S обозначает функтор симметрической алгебры, тогда если $i : S(\Sigma L) \to U(\Sigma L\sharp L)$ есть морфизм алгебр Хопфа, индуцированный вложением $\Sigma L \to \Sigma L\sharp L$, то $\pi i : S(\Sigma L) \to \mathcal{C}(L)$ есть изоморфизм коалгебр.

Определив функтор $\mathcal{C}$, мы теперь перейдём к описанию структуры спектральной последовательности. Для этого нам понадобится понятие *примитивной фильтрации*, заданную для всякой симметрической коалгебры $C = S(V)$ на DG-векторном пространстве V следующим образом.

(1) $F_n(C) = 0$, $n < 0$;
(2) $F_0(C) = k$;
(3) $F_{n+1}(C) = \mathrm{Im}(i_n \oplus (\vee \circ (i_{PC} \otimes i_n)) : F_n(C) \oplus (PC \otimes F_n(C)) \to C)$, где i_{PC} — вложение $PC \subseteq C$, i_n — вложение $F_n(C) \subseteq C$, $\vee$ — симметрическое умножение, определённое на $S(V)$.

Для случая $V = \Sigma L$ получим фильтрацию $\mathcal{C}(L)$. Ассоциированная с ней спектральная последовательность коалгебр

$$E^1 = S(\Sigma(\pi(\Omega X) \otimes \mathbb{Q})) \Rightarrow H_*(X;\mathbb{Q}).$$

В случае, когда в качестве L выступает модель Квиллена L_X пространства X (т.е. минимальная кофибрантная модель для λX), мы получим так называемую *спектральную последовательность Квиллена*, следуя терминологии из [1]. Несложный подсчёт показывает, что дифференциал d^1 на первом листе непосредственно связан с обычным (двойным) произведением Уайтхеда, как указано в [1]. Для иллюстрации вычислений мы приведём его здесь.

Лемма 1 ([1]). *Пусть X — пространство из $\mathcal{T}_2$, и $a_i \in \pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ для $i = 1, 2$. Тогда в спектральной последовательности Квиллена для X справедливо*

$$d^1(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2) = (-1)^{n_1}\Sigma[a_1, a_2].$$

Доказательство. Пусть $\alpha_i \in (L_X)_{n_i}$ — циклы-представители классов a_i. Тогда в $U(\Sigma L_X \sharp L_X)$ имеем

$$d(\Sigma a_1\Sigma a_2) = \theta\alpha_1\Sigma\alpha_2 + (-1)^{n_1+1}\Sigma\alpha_1\theta\alpha_2.$$

Но также $\theta\alpha_1\Sigma\alpha_2 = [\theta\alpha_1, \Sigma\alpha_2] - (-1)^{n_1(n_2+1)}\Sigma\alpha_2\theta\alpha_1$. Поэтому в $\mathcal{C}(L_X)$ получим $\pi d(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2) = \pi[\theta\alpha_1, \Sigma\alpha_2] = (-1)^{n_1}\pi\Sigma[\alpha_1, \alpha_2]$. То есть, при отождествлении $\mathcal{C}(L_X)$ с $S(\Sigma L_X)$

$$d\pi i(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2) = (-1)^{n_1}\pi i\Sigma[\alpha_1, \alpha_2],$$

что и требовалось показать. □

Мы видим удобство определения $\mathcal{C}(L)$ через $\Sigma L\sharp L$, так как мы можем вычислять дифференциал d от симметрических мономов, пользуясь правилом Лейбница. Результат будет такой же, если бы мы вычислили дифференциал, пользуясь тем, что он является кодеривацией на симметрической коалгебре. Однако задание коалгебры $S(V)$ как симметрической алгебры, то есть как фактор-алгебры тензорной алгебры $T(V)$, на которую затем переносится коумножение стандартным образом через тасующие перестановки, упрощает не только вычисление дифференциала, но и вид элементов коалгебры, в качестве которых выступают симметрические мономы, в которых множители градуированно коммутируют, так как иначе вместо одного симетрического монома следовало бы писать сумму всевозможных симметризаций несимметрических мономов. Важно, однако, отметить, что спектральная последовательность не является последовательностью алгебр, и использование алгебраической структуры для вычислений возможно лишь по отдельности для каждого листа.

Мы далее в вычислениях дифференциалов в этой работе будем отождествлять $\mathcal{C}(L) \cong S(\Sigma L)$ и не будем писать отображения π, i перед элементами, как это мы делали в лемме выше.

2.3. **Полиэдральные произведения.** Здесь мы приводим основные сведения о полиэдральных произведениях и момент-угол комплексах. Полное изложение соответствующей теории можно найти в [7].

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$ — это совокупность подмножеств $I \subseteq [m]$, такая, что верна импликация $J \subseteq I \in \mathcal{K} \Rightarrow J \in \mathcal{K}$. Мы называем $I \in \mathcal{K}$ *симплексом* $\mathcal{K}$, и всегда предполагаем, что $\mathcal{K}$ содержит $\varnothing$ и все *вершины* $\{i\}$, $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через Δ^k или $\Delta(1, \dots, k)$ симплекс на множестве $[k]$. Также обозначим через $\Delta(I)$ симплекс с множеством вершин $I \subseteq [m]$ и обозначим его границу через $\partial\Delta(I)$. *Пропущенная грань* $\mathcal{K}$ — это подмножество $I \subseteq [m]$ такое, что $I \notin \mathcal{K}$, но $\partial\Delta(I) \subseteq \mathcal{K}$.

Пусть

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

является последовательностью CW-пар комплексов с отмеченными точками $pt \in A_i \subseteq X_i$. Для симплекса $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq [m]$ обозначим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = Y_1 \times \cdots \times Y_m, \quad Y_i = \begin{cases} X_i, & i \in I \\ A_i, & i \notin I \end{cases}$$

Тогда $\mathcal{K}$-*полиэдральным произведением* $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ называют пространство

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{i \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{i \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{j \notin I} A_j \right) \subseteq X_1 \times \cdots \times X_m.$$

Обозначения: $(X, A)^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$, когда все $(X_i, A_i) = (X, A)$; $\boldsymbol{X}^{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{X}, pt)^{\mathcal{K}}$, $X^{\mathcal{K}} = (X, pt)^{\mathcal{K}}$.

Важным примером полиэдральных произведений являются *момент-угол комплексы* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$, а также *пространства Дэвиса-Янушкевича* $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Теорема 1 ([7, Теорема 4.3.2])**.** *Существует гомотопическое расслоение*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m.$$

Оно расщепляется после взятия функтора пространства петель.

Здесь мы опишем произведения Уайтхеда в пространстве $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. В этом случае неопределённость высших произведений Уайтхеда можно устранить, рассматривая канонические способы выбора этих произведений.

Рассмотрим i-ую *каноническую порождающую*

$$\mu_i : (D^2, S^1) \to S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^{\vee m} \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}},$$

где второе отображение есть вложение $\mathbb{C}P^1$ в качестве i-ого пространства букета.

Канонические высшие произведения Уайтхеда определяются следующим образом. Пусть $\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}$ — различные канонические порождающие такие, что все произведения $[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]$ равны нулю. Тогда существует его каноническое продолжение $\overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]}$до отображения на D^{2n-2}, задаваемое композицией

$$\overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]} : D^2_{i_1} \times \cdots \times \widehat{D^2_{i_k}} \times \cdots \times D^2_{i_n} \hookrightarrow \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}.$$

Все эти продолжения совместимы на всевозможных произведениях длины не более $n-2$. Тогда n-кратное произведение определяется как гомотопический класс отображения

$$S^{2n-1} \cong \partial(D^2_{i_1} \times \cdots \times D^2_{i_n}) \cong \bigcup_{k=1}^{n} (D^2_{i_1} \times \cdots \times S^1_{i_k} \times \cdots \times D^2_{i_n}) \xrightarrow{[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}]} (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}},$$

задаваемого как

$$[\mu_{i_1}, \ldots, \mu_{i_n}](x_1, \ldots x_n) = \overline{[\mu_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu_{i_k}}, \ldots, \mu_{i_n}]}(x_1, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_n) \text{ при } x_k \in S^1_{i_k}.$$

Наряду с высшими произведениями Уайтхеда канонических порождащих мы рассматриваем также и итерированные высшие произведения Уайтхеда, то есть такие произведения, в которых аргументы могут сами быть высшими произведениями Уайтхеда.

3. Результаты

3.1. **Дальнейшая структура спектральной последовательности.** Прежде всего мы покажем, как из алгебраической структуры на $\mathcal{C}(L)$, то есть, из того факта, что дифференциал d на ней можно вычислять, исходя из правила Лейбница, можно получить общую формулу для d, и показать, то он является обобщением на случай DG-алгебр Ли дифференциала на комплексе Шевалле—Эйленберга. Здесь и далее $|\alpha|$ обозначает степень α.

Лемма 2. *На $\mathcal{C}(L)$ справедлива формула*

$$d(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n) = \sum_{i<j}(-1)^{\varepsilon_{ij}}\Sigma\alpha_1\dots\widehat{\Sigma\alpha_i}\dots\Sigma\alpha_{j-1}\Sigma[\alpha_i,\alpha_j]\Sigma\alpha_{j+1}\dots\Sigma\alpha_n+ \tag{2}$$

$$+\sum_i(-1)^{|\alpha_1|+\dots+|\alpha_{i-1}|+i}\Sigma\alpha_1\dots\Sigma d\alpha_i\dots\Sigma\alpha_n,$$

где $\widehat{\Sigma\alpha_i}$ означает, что соответствующий множитель пропущен, и

$$\varepsilon_{ij} = |\alpha_i|(|\alpha_{i+1}|+\dots+|\alpha_{j-1}|+j-i)+|\alpha_1|+\dots+|\alpha_{i-1}|+i+1.$$

Доказательство. Проверка утверждения сводится к простому вычислению. По правилу Лейбница

$$d(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n) = d(\Sigma\alpha_1)\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n + (-1)^{|\alpha_1|+1}\Sigma\alpha_1 d(\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n). \tag{3}$$

По определению $\mathcal{C}(L)$ имеем $d(\Sigma\alpha_1) = \theta\alpha_1 - \Sigma d\alpha_1$, а также

$$\Sigma[\alpha_i,\alpha_j] = [\Sigma\alpha_i,\theta\alpha_j] = \Sigma\alpha_i\theta\alpha_j - (-1)^{(|\alpha_i|+1)|\alpha_j|}\theta\alpha_j\Sigma\alpha_i.$$

Подставим выражение для $d(\Sigma\alpha_1)$ в (3) и вычислим слагаемое, содержащее $\theta\alpha_1$.

$$\theta\alpha_1\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n = (-1)^{|\alpha_1|(|\alpha_2|+1)}\Sigma\alpha_2\theta\alpha_1\dots\Sigma\alpha_n+$$
$$+(-1)^{|\alpha_1|(|\alpha_2|+1)+1}\Sigma[\alpha_2,\alpha_1]\Sigma\alpha_3\dots\Sigma\alpha_n =$$
$$(-1)^{|\alpha_1|(|\alpha_2|+1)}\Sigma\alpha_2\theta\alpha_1\dots\Sigma\alpha_n + (-1)^{|\alpha_1|}\Sigma[\alpha_1,\alpha_2]\Sigma\alpha_3\dots\Sigma\alpha_n.$$

Второе слагаемое последней строке останется неизменным, а первое содержит $\theta\alpha_1$, обменявшееся местами с $\Sigma\alpha_2$. К $\theta\alpha_1\Sigma\alpha_3\dots\Sigma\alpha_n$ теперь можно применить то же самое вычисление, пока последовательно обменивая $\theta\alpha_1$ с другими сомножителями, мы не поставим его на последнее место, после чего слагаемое $\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n\theta\alpha_1$ будет равно нулю, так как при тензорном умножении правого $U(L)$-модуля $U(\Sigma L\sharp L)$ на тривиальный $U(L)$-модуль $\mathbb{Q}$, элементы, содержащие справа множитель вида $\theta\alpha$, станут нулями. Таким образом, получим окончательный результат для $\theta\alpha_1\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n$:

$$\theta\alpha_1\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n = (-1)^{|\alpha_1|}\Sigma[\alpha_1,\alpha_2]\Sigma\alpha_3\dots\Sigma\alpha_n+$$
$$+(-1)^{|\alpha_1|(|\alpha_2|+2)}\Sigma\alpha_2\Sigma[\alpha_1,\alpha_3]\dots\Sigma\alpha_n+\dots+$$
$$+(-1)^{|\alpha_1|(|\alpha_2|+\dots+|\alpha_{n-1}|+n-1)}\Sigma\alpha_2\Sigma\alpha_3\dots\Sigma[\alpha_1,\alpha_n].$$

Подставим это в (3), после чего нам останется только вычислить дифференциал $d(\Sigma\alpha_2\dots\Sigma\alpha_n)$ от меньшего числа множителей. Таким образом, подставляя вместо него выражение, аналогичное только вычисленному для $d(\Sigma\alpha_1\dots\Sigma\alpha_n)$, мы последовательно сведём вычисление всё к меньшему числу сомножителей. Аккуратно пронаблюдая за слагаемыми и возникающими перед ними знаками, мы придём к формуле в утверждении леммы. $\square$

На $\mathcal{C}(L)$ имеется биградуировка, первая компонента которой есть число множителей в симметрическом мономе (число знаков Σ), а вторая есть суммарная степень всех сомножителей без учёта надстроек. В выражении (2) дифференциал распадается на две части: первую d_1, происходящую из скобки Ли и имеющую степень $(-1, 0)$, и вторую d_2, происходящую из дифференциала на L, имеющую степень $(0, -1)$. Они удовлетворяют тождествам $d_1^2 = 0, d_2^2 = 0, d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$, то есть превращают $\mathcal{C}(L)$ в бикомплекс.

После прояснения структуры $\mathcal{C}(L)$ мы желаем объяснить соображения, на которых будет опираться доказательство основного результата. Нас интересуют значения дифференциалов d^r на листах E^r на элементах из $E^r_{r+1,*}$, то есть

$$d^r\left(\sum_j \lambda_j \Sigma\alpha_1^{(j)} \dots \Sigma\alpha_{r+1}^{(j)}\right) = \Sigma\alpha.$$

Мы хотим показать, что для всевозможных значений $\Sigma\alpha$ дифференциалов d^r (для всех $r \geqslant 1$) с $|\alpha| \geqslant 2$ элемент α представим в виде линейной комбинации некоторых модификаций (высших) произведений Уайтхеда. Если в качестве аргументов этих произведений имеются неканонические порождающие a_i, то есть элементы степени не менее два, то такие элементы не могут быть перманентными циклами спектральной последовательности, ибо они примитивны в $\mathcal{C}(L)$, а потому они бы выжили до примитивных элементов в $\mathbb{Q}\langle\mathcal{K}\rangle$, однако примитивными элементами коалгебры граней являются лишь a_i. Итак, элементы степени не менее два не выживают до E^∞, а потому они являются линейными комбинациями модифицированных произведений Уайтхеда элементов меньших степеней. Воспользовавшись линейностью этих произведений, мы за конечное число шагов придём к комбинации модифицированных высших итерированных произведений от элементов степени 1, то есть от канонических образующих. Таким образом, если бы существовал элемент $\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}$, не представимый в виде подобной комбинации, он не мог быть убит никакими дифференциалами, а потому он выжил бы в качестве примитивного элемента в $\mathbb{Q}\langle\mathcal{K}\rangle$, что невозможно.

Задача, как можно заключить, сведена к вычислению указанных выше значений дифференциалов спектральной последовательности. Вычисление мы будем производить стандартным «лестничным методом», используя тот факт, что $\mathcal{C}(L)$ есть бикомплекс. В рассуждениях ниже L может быть любой редуцированной алгеброй Ли над $\mathbb{Q}$. Напомним суть этого метода. Пусть требуется вычислить значение $(n-1)$-ого дифференциала d^{n-1} на линейной комбинации симметрических мономов вида $\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n$, где α_i можно считать циклами в силу того, что $E^1 = S(HL)$. Обозначим эту линейную комбинацию a_1 и заметим, что $d_2(a_1) = 0$, где d_2 есть вторая компонента дифференциала d на $\mathcal{C}(L)$. Пусть существуют элементы $a_2, \dots, a_{n-1} \in L$ такие, что $d_1(a_i) = d_2(a_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-2$, причём a_i есть линейная комбинация симметрических мономов от (надстроек) $n - i + 1$ элементов, которые уже не обязательно будут циклами. В таком случае $d^{n-1}(a_1)$ будет равен классу в E^{n-1} с представителем $(-1)^{n-1} d_1(a_{n-1})$. За подробностями метода в для общего случая произвольного бикомплекса отсылаем читателя к [4], однако доказательство несложно следует из рассмотрения знакопеременной суммы a_i и явного определения листов спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрованным объектом.

Таким образом, при вычислении $d(a_1)$, если мы нашли элемент a_2 такой, что $d_1(a_1) = d_2(a_2)$, то значение $d(a_1) = d_1(a_1)$ определяет на листе E^{n-1} тот же класс, что и $d(a_1-a_2)$. При этом в $\mathcal{C}(L)$ $d(a_1)$ есть линейная комбинация мономов от $n-1$ элементов, а $d(a_1-a_2)$ есть комбинация мономов от $n-2$ элементов. На соответствующем листе спектральной последовательности эти линейные комбинации представляют один и тот же класс.

Определение 2. Мы видим, что существование a_2 позволяет «спуститься» значению $d(a_1)$ в фильтрацию на единицу меньше, поэтому мы называем это явление *спуском* $d(a_1)$ до $d(a_1 - a_2)$.

Мы будем применять понятие спуска даже к тем элементам a_1, которые не определяют никакого класса в E^{n-1}. Собственно, существование всех $a_2, \dots, a_{n-1}$ из лестничного метода есть необходимое и достаточное условие выживания a_1 до E^{n-1}. в этом случае $d(a_1)$ последовательно спускается до элемента вида $\Sigma\alpha$, который и есть значение дифференциала d^{n-1} на классе с представителем a_1.

Определение 3. Мы в последнем случае говорим также о *полном спуске* $d(a_1)$ до $\Sigma\alpha$.

Проиллюстрируем типичный вид полного спуска на простом примере. Пусть L — редуцированная рациональная алгебра Ли, и $x_i \in HL$, $i = 1, 2, 3$, а α_i есть циклы, представляющие x_i. Считаем в этом примере, что $[x_1, x_2] = [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0$. Рассмотрим задачу вычисления $d^2(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\Sigma\alpha_3)$. По формуле (2) имеем следующее:

$$\begin{gathered} d(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\Sigma\alpha_3) = (-1)^{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}\Sigma\alpha_1\Sigma[\alpha_2, \alpha_3]+ \\ +(-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|}\Sigma\alpha_2\Sigma[\alpha_1, \alpha_3] + (-1)^{|\alpha_1|}\Sigma[\alpha_1, \alpha_2]\Sigma\alpha_3. \end{gathered} \tag{4}$$

Из условия, что попарные произведения $[x_i, x_j]$ равны нулю следует существование β_{ij} таких, что $d\beta_{ij} = (-1)^{|\alpha_i|+1}[\alpha_i, \alpha_j]$, $i < j$. Правая часть (4) равна значению d_2 на элементе

$$-\Sigma\alpha_1\Sigma\beta_{23} + (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|+|\alpha_1|+|\alpha_2|}\Sigma\alpha_2\Sigma\beta_{13} + \Sigma\beta_{12}\Sigma\alpha_3.$$

Значение компоненты дифференциала d_1 на нём равно

$$\begin{gathered} \Sigma((-1)^{|\alpha_1|+|\alpha_2|+1}[\beta_{12}, \alpha_3] + (-1)^{|\alpha_2||\alpha_3|+|\alpha_1|+|\alpha_2|}[\beta_{13}, \alpha_2]+ \\ +(-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|+|\alpha_1||\alpha_3|+|\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|}[\beta_{23}, \alpha_1]). \end{gathered}$$

Выражение в скобках есть не что иное, как представитель $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_{ij}]$ (со знаком минус) тройной скобки Ли—Масси $[x_1, x_2, x_3]$ с определяющей системой β_{ij}. Таким образом, мы получили следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть в гомологиях DG-алгебры Ли L из $(DGL)_1$ определена скобка Ли—Масси $[x_1, x_2, x_3]$, и α_i — цикл, представляющий класс x_i. Тогда на листе E^2 спектральной последовательности Квиллена для L $d^2(\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\Sigma\alpha_3)$ есть класс с представителем $-[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_{ij}]$ для любой определяющей системы β_{ij}, в частности, этот класс не зависит от выбора системы β_{ij}.*

Обобщение этого примера на случай монома $\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n$ от произвольного числа циклов выглядит следующим образом. Значение дифференциала d на этом мономе равно

$$\sum_{i<j} \Sigma\alpha_i \dots \widehat{\Sigma\alpha_i} \dots \Sigma[\alpha_i, \alpha_j] \dots \Sigma\alpha_n. \tag{5}$$

Обозначим для удобства $\bar{x} = (-1)^{|x|+1}$. Пусть существуют β_{ij} $(i < j)$ такие, что $d\beta_{ij} = [\bar{\alpha_i}, \alpha_j]$. Тогда возможен спуск выражения (5) до суммы с некоторыми знаками слагаемых вида $\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma[\beta_{ij}, \alpha_k] \dots \alpha_n$ (где пропущены $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$) или же вида $\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\beta_{ij} \dots \Sigma[\alpha_k, \alpha_l] \dots \alpha_n$ (с нужными пропусками). Слагаемые второго вида допускают спуск уже в силу существования β_{ij}, а для спуска слагаемых первого вида потребуем, чтобы существовали β_{ijk} $(i < j < k)$ такие, что $d\beta_{ijk} = \sum \pm[\bar{\beta_{ij}}, \alpha_k]$, где сумма берётся так, чтобы получался представитель тройного произведения $[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k; \beta_{ls}]$. В таком случае мы при спуске получим суммы с коммутаторами вида $[\beta_{ijk}, \alpha_l], [\beta_{ij}, \beta_{kl}]$ и коммутаторами, встречавшимися ранее на предыдущем шаге. Тот факт, что на последующих шагах удастся привести подобные мономы в суммы, содержащие всевозможные представители высших произведений Уайтхеда $[\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}]$ и тем самым потребовать, чтобы эти представители были точными дифференциалами, можно показать из рассмотрения спектральной последовательности Квиллена для модели толстого букета сфер и её подходящего морфизма в спектральную последовательность для L. Это было проделано в [1, 2], мы не будем останавливаться на подробностях доказательства, но отметим, в конечном итоге произойдёт полный спуск до элемента вида $\Sigma\alpha$, где $\alpha \in -[\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_{i_1 \dots i_k}]$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2 ([1, 2]). *Пусть в гомологиях DG-алгебры Ли L из $(DGL)_1$ определена скобка Ли—Масси $[x_1, \dots, x_n]$, и α_i — цикл, представляющий класс x_i. Тогда на листе E^{n-1} спектральной последовательности Квиллена для L $d^{n-1}(\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n)$ есть класс с представителем $-[\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_{i_1 \dots i_k}]$ для любой определяющей системы $\beta_{i_1 \dots i_k}$, в частности, этот класс не зависит от выбора системы $\beta_{i_1 \dots i_k}$.*

Определение 4. Это наиболее типичный (но не единственный) пример полного спуска, который мы называем *полным спуском типа Уайтхеда.*

Исследуем теперь все возможности полного спуска наиболее общего аргумента $\sum_k(\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)})$ дифференциала на $(n-1)$-ом листе. Особенно удобным представляется для этой цели выбрать базис в L должным образом. Рассмотрим произвольное представление $L = B(L) \oplus H(L) \oplus C(L)$, где $B(L)$ — подалгебра границ в L, $H(L)$ есть прямое слагаемое, дополняющее $B(L)$ до подпространства циклов $Z(L)$ в L (напомним, что мы работаем на полем $\mathbb{Q}$), и потому аддитивно изоморфное гомологиям L, а $C(L)$ — пространство, дополняющее $Z(L)$ до L. Базис L тогда можно выбрать следующим образом. Выберем произвольный базис β_j пространства $B(L)$, базис γ_j в $C(L)$ определим условием $d(\gamma_j) = \beta_j$ (d отображает $C(L)$ аддитивно изоморфно на $B(L)$), и выберем некоторый базис α_i для $H(L)$. Мы можем предполагать, что все $\alpha_i^{(k)}$ лежат в $H(L)$, ибо симметрические мономы, в которых хотя бы один сомножитель из $B(L)$, определяют нулевые классы на листах спектральной последовательности, начиная с первого. Раскладывая $\alpha_i^{(k)}$ по базису в $H(L)$, можно считать $\alpha_i^{(k)}$ базисными элементами. Вводя тотальное упорядочивание на базисе α_i, можно также считать, что все базисные элементы упорядочены в мономе по неубыванию, причём равенство нескольких из них возможно только тогда, когда степень совпадающих сомножителей (без надстройки) нечётная. Такие мономы образуют аддитивный базис алгебры $S(H(L))$.

Общий вид значения дифференциала имеет вид

$$\sum_{\substack{k,i,j\\ i<j}}(\pm\lambda_k\Sigma\alpha_1^{(k)}\dots\widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}}\dots\Sigma[\alpha_i^{(k)},\alpha_j^{(k)}]\dots\Sigma\alpha_n^{(k)}). \tag{6}$$

Разложим каждый цикл $[\alpha_i^{(k)},\alpha_j^{(k)}]$ по базисам в $H(L)$ и $B(L)$: $[\alpha_i^{(k)},\alpha_j^{(k)}] = \sum_l \mu_l\alpha_{ij,l}^{(k)} + \sum_s \eta_s\beta_{ij,s}^{(k)}$. Пусть выражение (6) равно значению дифференциала d_2 от аргумента общего вида

$$\sum_t(\kappa_t\Sigma\gamma_1^{(t)}\dots\Sigma\gamma_{n-1}^{(t)}),$$

где $\gamma_s^{(t)}$ можно считать базисными элементами в L. Если вычислить значение d_2 на этом аргументе, мы получим сумму слагаемых вида

$$\pm\kappa_t\Sigma\gamma_1^{(t)}\dots\Sigma d\gamma_m^{(t)}\dots\Sigma\gamma_{n-1}^{(t)}.$$

Разложим все $d\gamma_m^{(t)}$ по базису в $B(L)$: $d\gamma_m^{(t)} = \sum_r \beta_{m,r}^{(t)}$. Приведя при необходимости подобные слагаемые и убрав нулевые, мы придём к сумме базисных симметрических мономов, в каждом из которых хотя бы один сомножитель является элементом $B(L)$, а именно каким-то $\beta_{m,r}^{(t)}$. Поэтому, приравняв эту сумму к выражению (6), где коммутаторы разложены по базису, мы получим равенства вида

$$C\Sigma\alpha_1^{(k)}\dots\widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}}\dots\Sigma\alpha\dots\Sigma\alpha_n^{(k)} = D\Sigma\gamma_1^{(t)}\dots\Sigma\beta_{m,r}^{(t)}\dots\Sigma\gamma_{n-1}^{(t)},$$

где $C, D \neq 0$ — константы, α есть или некоторый $\alpha_{ij,l}^{(k)}$, или $\beta_{ij,s}^{(k)}$. Отсюда мы заключаем, что $\beta_{m,r}^{(t)}$ равно либо какому-то $\alpha_i^{(k)}$, что невозможно, так как $\alpha_i^{(k)}$ не являются границами, либо $\alpha_{ij,l}^{(k)}$, чего не может быть по той же причине, или же элементу $\beta_{ij,s}^{(k)}$. Для всех мономов, содержащих $\beta_{ij,s}^{(k)} = d\gamma_{ij,s}^{(k)}$, спуск возможен. Таким образом, если спуск выражения (6) возможен, то сумма

$$\sum_{\substack{k,i,j,l\\ i<j}}(\pm\lambda_k\mu_l\Sigma\alpha_1^{(k)}\dots\widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}}\dots\Sigma\alpha_{ij,l}^{(k)}\dots\Sigma\alpha_n^{(k)})$$

равна нулю. Вспомним, что $d(\sum_s \eta_s\gamma_{ij,s}^{(k)}) = \sum_s \eta_s\beta_{ij,s}^{(k)} = [\alpha_i^{(k)},\alpha_j^{(k)}] - \sum_l \mu_l\alpha_{ij,l}^{(k)}$. Обозначив $\gamma_{ij}^{(k)} := \sum_s \eta_s\gamma_{ij,s}^{(k)}$, $\alpha_{ij}^{(k)} := \sum_l \mu_l\alpha_{ij,l}^{(k)}$, мы придём к общему условию спуска для выражения (6).

Лемма 4. *Спуск значения (6) дифференциала d коалгебры $\mathcal{C}(L)$ на аргументе общего вида $\sum_k \lambda_k\Sigma\alpha_1^{(k)}\dots\Sigma\alpha_n^{(k)}$ ($\alpha_i^{(k)}$ являются циклами) возможен тогда и только тогда, когда существуют элементы $\gamma_{ij}^{(k)}$ и циклы $\alpha_{ij}^{(k)}$ такие, что*

$$d(\gamma_{ij}^{(k)}) = [\alpha_i^{(k)},\alpha_j^{(k)}] - \alpha_{ij}^{(k)},$$

а также выполнено равенство

$$\sum_{\substack{k,i,j\\ i<j}}(\pm\lambda_k\Sigma\alpha_1^{(k)}\dots\widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}}\dots\Sigma\alpha_{ij}^{(k)}\dots\Sigma\alpha_n^{(k)}) = 0, \tag{7}$$

где знаки плюс или минус происходят из формулы для d и могут быть взяты из (6).

Перейдём теперь к изучению возможностей для полного спуска (6). После первого спуска из леммы 4 мы, согласно общему лестничному методу, получим сумму слагаемых вида

$$\pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \widehat{\Sigma\alpha_j^{(k)}} \dots \Sigma[\gamma_{ij}^{(k)}, \alpha_l^{(k)}] \dots \Sigma\alpha_n^{(k)}, \tag{8}$$

а также вида

$$\pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \Sigma[\alpha_l^{(k)}, \alpha_m^{(k)}] \dots \Sigma\gamma_{ij}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)}. \tag{9}$$

Отметим, что знаки плюс-минус отличаются от таковых в (6). Разложим коммутаторы $[\gamma_{ij}^{(k)}, \alpha_l^{(k)}]$ по базису

$$[\gamma_{ij}^{(k)}, \alpha_l^{(k)}] = \sum_s a_s \gamma_{ijl,s}^{(k)} + \sum_s b_s d\delta_{ijl,s}^{(k)} + \sum_s c_s \alpha_{ijl,s}^{(k)}.$$

После подстановки этого в (8) слагаемые, содержащие $d\delta_{ijl,s}^{(k)}$, имеют возможность спуска. При подстановке в (9) уже имеющихся с предыдущего шага равенств $[\alpha_i^{(k)}, \alpha_j^{(k)}] = d(\gamma_{ij}^{(k)}) + \alpha_{ij}^{(k)}$, для суммы слагаемых, содержащих $d(\gamma_{ij}^{(k)})$, возможен спуск ровно в том же виде, что и при обычном спуске типа Уайтхеда. Таким образом, для того, чтобы был возможен спуск сумм мономов (8), (9), необходимо и достаточно выполнение равенств

$$\sum \pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \widehat{\Sigma\alpha_j^{(k)}} \dots \Sigma\alpha_{ijl}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)} = 0,$$

$$\begin{gathered} \sum \pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \widehat{\Sigma\alpha_j^{(k)}} \dots \Sigma\gamma_{ijl}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)} + \\ + \sum \pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \Sigma\alpha_{lm}^{(k)} \dots \Sigma\gamma_{ij}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)} = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь мы обозначили $\alpha_{ijl}^{(k)} = \sum_s c_s \alpha_{ijl,s}^{(k)}$, $\gamma_{ijl}^{(k)} = \sum_s a_s \gamma_{ijl,s}^{(k)}$. Итак, было получено условие осуществимости второго шага полного спуска. В случае произвольного шага условие спуска будет принимать вид пары условий, одного типа

$$\sum \pm\lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \Sigma\alpha_{i_1 \dots i_m}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)} = 0,$$

где в мономе с циклом $\alpha_{i_1 \dots i_m}^{(k)}$ пропущены $\alpha_{i_1}^{(k)}, \dots, \alpha_{i_m}^{(k)}$, а вторым условием будет равенство нулю суммы сложного вида, содержащей элементы $\alpha_{i_1 \dots i_r}^{(k)}$ с прошлых шагов, а также $\gamma_{i_1 \dots i_r}^{(k)}, \delta_{i_1 \dots i_r}^{(k)}$ с прошлого и текущего шагов. Естественно, само существование таких элементов есть необходимая часть условий.

3.2. **Случай свободных рациональных алгебр Ли.** Мы зафиксируем свободную алгебру Ли L над $\mathbb{Q}$. В начале мы будем рассматривать более простой случай полного спуска дифференциала одного монома от базисных элементов вида $\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n$, где, как и ранее, задано разложение $L = B(L) \oplus H(L) \oplus C(L)$, и $\alpha \in H(L)$. В силу того, что алгебра в данном случае свободная, всякий цикл разбивается в сумму циклов, каждый из которых содержит итерированные скобки с одинаковым количеством порождающих алгебры Ли, или, как говорят, скобки одинаковой длины. Поэтому мы ещё можем предполагать, что все базисные элементы выбраны так, что в каждом базисном элементе имеются только скобки одинаковой длины, которую можно назвать длиной базисного элемента. Воспользуемся критерием (7) первого шага спуска, где индекс k будет отсутствовать в силу того, что рассматривается один моном. Равенство суммы (7) нулю означает, что для каждого $\alpha_{ij,s}$ в базисном разложении $[\alpha_i, \alpha_j]$ реализуется одна из двух возможностей. Во-первых, может случиться так, что

$$\pm\Sigma\alpha_1 \dots \widehat{\Sigma\alpha_i} \dots \Sigma\alpha_{ij,s} \dots \Sigma\alpha_n \tag{11}$$

сокращается с некоторым

$$\pm\Sigma\alpha_1 \dots \widehat{\Sigma\alpha_l} \dots \Sigma\alpha_{lm,r} \dots \Sigma\alpha_n. \tag{12}$$

В таком случае $n-4$ сомножителя в (11) (а именно, все $\Sigma\alpha_k$, кроме $\Sigma\alpha_l, \Sigma\alpha_m$ и $\Sigma\alpha_{ij,s}$) совпадают с точностью до порядка с какими-то $n-4$ множителями в (12) (а именно, с $\Sigma\alpha_k$, отличными от $\Sigma\alpha_i, \Sigma\alpha_j$ и $\Sigma\alpha_{lm,r}$). Так что можно переставить эти множители, скажем, в конец мономов по коммутативности, и рассматривать только оставшиеся три. Имеем, что справедливо (с неким коэффициентом пропорциональности λ)

$$\Sigma\alpha_i\Sigma\alpha_j\Sigma\alpha_{lm,r} - \lambda\Sigma\alpha_l\Sigma\alpha_m\alpha_{ij,s} = 0.$$

Хотя бы один из α_i, α_j должен совпадать с каким-то из α_l, α_m. Пусть, скажем $\alpha_j = \alpha_m$. Если верно, что $\alpha_i = \alpha_l$, то тогда $\alpha_{ij,s} = \alpha_{lm,r}$, $(i,j) = (l,m)$, и оба цикла $\alpha_{ij,s}$, $\alpha_{lm,r}$ происходят из базисного разложения одного и того же элемента $[\alpha_i, \alpha_j]$. Но тогда можно было бы просто удалить эти сокращающиеся циклы в разложении $[\alpha_i, \alpha_j]$, так что такая ситуация невозможна. Если же верно, что $\alpha_i = \alpha_{ij,s}$ и тогда $\alpha_l = \alpha_{lm,r}$, то такая ситуация тоже невозможна в $L_{\mathcal{K}}$, и вообще во всякой свободной алгебре Ли, так как длина $\alpha_{ij,s}$ превосходит длину α_i.

Итак, первая возможность (сокращение пары мономов) не реализуется. Вторая возможность — каждый из $\alpha_{ij,s}$ равен какому-то α_s $(s \neq i,j)$, причём степень его нечётная. Тогда будет выполняться

$$\Sigma\alpha_1 \dots \widehat{\Sigma\alpha_i} \dots \Sigma[\alpha_i, \alpha_j] \dots \Sigma\alpha_n = 0, \tag{13}$$

так как $\Sigma\alpha_s\Sigma\alpha_s = 0$.

Определение 5. Это случай так называемого *частичного произведения Уайтхеда*, ибо для каждой пары (i,j) будет выполнено или (13), или же в разложении $[\alpha_i, \alpha_j]$ не будет элементов из $H(L_{\mathcal{K}})$, а только из $B(L_{\mathcal{K}})$, то есть $[\alpha_i, \alpha_j]$ является границей. Здесь от коммутаторов $[\alpha_i, \alpha_j]$, для которых верно (13), не требуется обычного условия равенства их границам от чего-либо, так как это не требуется для спуска.

Рассмотрим далее возможность второго шага спуска. Во второй сумме в (10) возможность равенства нулю монома

$$\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_{lm} \dots \Sigma\gamma_{ij} \dots \Sigma\alpha_n$$

или же его сокращения с какими-то другими мономами в (10) возможна только тогда, когда α_{lm} в разложении на базисные циклы содержит какие-то α_k. Если же это не так, то первый шаг полного спуска имеет тип Уайтхеда, а потому также суммы вида

$$[\gamma_{ij}, \alpha_l] \pm [\gamma_{il}, \alpha_j] \pm [\gamma_{jl}, \alpha_i]$$

с некоторыми знаками будут циклами (тройными произведениями Уайтхеда $[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k]$), поэтому мы можем собрать подобные слагаемые вида (8) в суммы по три для одной и той же тройки i, j, k, мы получим сумму мономов вида

$$\pm\Sigma\alpha_1 \dots \widehat{\Sigma\alpha_i} \dots \widehat{\Sigma\alpha_j} \dots \Sigma\tilde{\alpha}_{ijk} \dots \Sigma\alpha_n,$$

где $\tilde{\alpha}_{ijk} \in [\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k]$. Тот факт, что при подобных слагаемых будут подходящие знаки, объясняется тем, что первый спуск имел тип Уайтхеда. Опять же, если $\tilde{\alpha}_{ijk}$ не имеют в разложении по базису алгебры Ли слагаемых вида α_s, то опять же $\tilde{\alpha}_{ijk}$ по той же причине, что и $[\alpha_i, \alpha_j]$, будут точными границами, и осуществляется второй шаг обычного спуска типа Уайтхеда. Тот случай, когда $[\alpha_i, \alpha_j]$, $\tilde{\alpha}_{ijk}$ имеют в базисном представлении какие-то α_s, означает, что, хоть они и не точные границы, спуск, вообще говоря, может быть возможен.

То же самое и с использованием того же рассуждения можно сказать и о возможности спуска на любом шаге. Если представители высших произведений Уайтхеда $[\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}]$ не имеют в базисном разложении слагаемых вида α_s, то спуск имеет тип Уайтхеда, в противном случае — эти представители не обязаны являться границами.

Определение 6. Последний случай (когда спуск возможен, хотя циклы-представители $[\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}]$ не являются границами) мы называем *спуском модифицированного типа Уайтхеда*. Он включает в себя спуск, дающий частичное произведение Уайтхеда как частный случай.

Пример 1. Наиболее простой пример подобного спуска реализуется при рассмотрении монома вида $\Sigma\alpha_1\Sigma\alpha_2\Sigma[\alpha_1, \alpha_2]$, где $|\alpha_1|$ нечётна, а $|\alpha_2|$ чётна. Значение дифференциала на этом мономе будет равно $\pm\Sigma\alpha_1\Sigma[[\alpha_1, \alpha_2], \alpha_2]$, и потому если $[[\alpha_1, \alpha_2], \alpha_2]$ есть граница β, то спуск возможен, причём до цикла $\pm\Sigma[\alpha_1, \beta]$, хотя сам β не есть цикл, и не требуется равенство границам никаких других коммутаторов.

Имея в виду рассуждение, изложенное выше для случая одного монома, не представляется теперь сложным разобрать общий случая спуска элемента вида (6). Так же, как и ранее, пользуемся критерием (7). Если

$$\pm\Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \widehat{\Sigma\alpha_i^{(k)}} \dots \Sigma\alpha_{ij,s}^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)}$$

сокращается с суммой мономов, среди которых

$$\pm\Sigma\alpha_1^{(k')} \dots \widehat{\Sigma\alpha_l^{(k')}} \dots \Sigma\alpha_{lm,r}^{(k')} \dots \Sigma\alpha_n^{(k')},$$

то, как и раньше, получим

$$\Sigma\alpha_i^{(k)}\Sigma\alpha_j^{(k)}\Sigma\alpha_{lm,r}^{(k)} - \lambda\Sigma\alpha_l^{(k')}\Sigma\alpha_m^{(k')}\alpha_{ij,s}^{(k')} = 0.$$

Тогда либо $\Sigma\alpha_{lm,r}^{(k)}$ равен одному из $\alpha_l^{(k')}$, $\alpha_m^{(k')}$, или же элементы $\alpha_l^{(k')}$, $\alpha_m^{(k')}$ равны (с точностью до порядка) элементам $\alpha_i^{(k)}$, $\alpha_j^{(k)}$, но тогда ничего, кроме равенства $\alpha_{lm,r}^{(k)} = \alpha_{ij,s}^{(k')}$, заключить нельзя. Так же и на последующих шагах единственная возможность, которая добавится, это всевозможные равенства $\alpha_{i_1 \dots i_r} = \alpha_{j_1 \dots j_s}$, которые будут осуществлять новые, ранее недопустимые сокращения. Мы всё ещё будем называть такой случай спуском модифицированного типа Уайтхеда. Мы соберём все наши наблюдения, а также предложение 2 в следующем результате.

Теорема 2. *Пусть L — свободная алгебра Ли над $\mathbb{Q}$ (в частности, минимальная модель Квиллена некоторого пространства). Пусть задано представление $L = B(L) \oplus H(L) \oplus C(L)$, как описано ранее, и пусть $\alpha_k \in H(L)$ — базисные элементы, для которых определена длина, то есть которые содержат только итерированные скобки одинаковых длин (в пределах каждого отдельного α_k) от количества входящих порождающих свободной алгебры Ли. Тогда в спектральной последовательности Квиллена для $\mathcal{C}(L)$ справедливо следующее.*

(1) *Для симметрического монома вида*
$$\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n$$
полный спуск всегда имеет вид модифицированного типа Уайтхеда, причём если в базисных разложениях определяющих элементов $\tilde{\alpha}_{i_1 \dots i_r}$ нет никаких α_s, то возможен спуск типа Уайтхеда, и, в частности, определено высшее произведение Уайтхеда $[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, и для дифференциала d^{n-1} на E^{n-1} выполнено
$$d^{n-1}([\Sigma\alpha_1 \dots \Sigma\alpha_n]) = -[\Sigma\alpha],$$
где $[\cdot]$ обозначает взятие класса в E^{n-1}, и $\alpha \in [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$.

(2) *Для суммы симметрических мономов*
$$\sum_k \lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)}$$
спуск всегда имеет вид модифицированного типа Уайтхеда, причём если в базисных разложениях определяющих элементов $\tilde{\alpha}^{(k)}_{i_1 \dots i_r}$ нет никаких $\alpha_s^{(l)}$, а также базисные разложения различных $\tilde{\alpha}^{(k)}_{i_1 \dots i_r}$ не имеют одинаковых базисных элементов, то возможен спуск типа Уайтхеда, и, в частности, определены высшие произведения Уайтхеда $[\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}]$, и для дифференциала d^{n-1} на E^{n-1} выполнено
$$d^{n-1}\left(\left[\sum_k \lambda_k \Sigma\alpha_1^{(k)} \dots \Sigma\alpha_n^{(k)}\right]\right) = -\sum_k \lambda_k [\Sigma\alpha^{(k)}],$$
где $\alpha^{(k)} \in [\alpha_1^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}]$.

Такие модифицированные произведения нельзя исключить и в случае модели Квиллена для $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

3.3. **О проблеме реализации рациональных высших произведений.** Мы прежде всего напомним о стандартном построении минимальной модели Квиллена для $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Порождающие a_σ этой модели находятся во взаимно-однозначном соответствии с клетками CW-структуры пространства, так что индексы представляют собой всевозможные непустые мультимножества
$$\sigma = \{\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2}, \dots, \underbrace{m, \dots, m}_{k_m}\},$$
такие, что их суппорты $\operatorname{supp}\sigma = \{i \in [m] : k_i \neq 0\}$ являются симплексами $\mathcal{K}$. Степень $|a_\sigma|$ элемента a_σ на единицу меньше размерности соответствующей клетки, то есть $|a_\sigma| = 2(k_1 + \dots + k_m) - 1$. Такие же порождающие, но со степенями, совпадающими с размерностями клеток, образуют аддитивный базис

коалгебры граней, изоморфной гомологиям $(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}$: $\mathbb{Q}\langle\mathcal{K}\rangle = H_*((\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K};\mathbb{Q})$. Коумножение на $\mathbb{Q}\langle\mathcal{K}\rangle$ имеет вид

$$\Delta a_\sigma = \sum_{\sigma=\tau\sqcup\tau'} a_\tau \otimes a_{\tau'},$$

где сумма берётся по всем разбиениям σ на подмультимножествам τ, τ' (которые могут быть пустыми, в таком случае $a_\varnothing = 1$). Классический результат (см. [666]) позволяет получить выражение для дифференциала на модели Квиллена через коумножение на сингулярных гомологиях пространства:

$$da_\sigma = \sum_{\substack{\sigma=\tau\sqcup\tau' \\ \tau,\tau'\neq\varnothing}} [a_\tau, a_{\tau'}]. \tag{14}$$

Мы для краткости будем обозначать $L_\mathcal{K} = L_{(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}}$.

В контексте рациональной теории гомотопий инструменты лиевских моделей позволяют особенно просто решить задачу о реализации высших произведений Уайтхеда. Все произведения, рассматриваемые в этом разделе, будут каноническими от различных канонических порождающих a_i степени 1. Сначала мы приведём предварительные сведения, следуя отчасти [5].

Определение 7. Мы рассматриваем высшие произведения Уайтхеда w из некоторого класса $\mathcal{W}$, определяемого индуктивно следующим образом.

(1) Всякое каноническое (высшее) произведение Уайтхеда $[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$, где i_l все различны, лежит в $\mathcal{W}$.
(2) Пусть $w_1, \dots, w_m \in \mathcal{W}$, тогда каноническое произведение $[c_1, \dots, c_n]$ лежит в $\mathcal{W}$ при условии, что всякое c_i это или некоторая порождающая a_j, или некоторое w_s, причём среди a_j, фигурирующих в $c_1, \dots, c_n$, нет повторяющихся.

Мы говорим индуктивно, что $w = [c_1, \dots, c_n] \in \mathcal{W}$ *определено*, если c_i определены и существует каноническое произведение $[c_1, \dots, c_n]$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *реализует* $w \in \mathcal{W}$, если w определено в $\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}$.

Здесь наблюдается наше отхождение от определения в [5], которое дано для обычных (не рациональных) произведений Уайтхеда, и где вместо определённости произведения требуется ещё его нетривиальность. Мы получим также и критерий тривиальности итерированных высших рациональных произведений $w \in \mathcal{W}$, однако нетрудно привести пример ненулевого (обычного не рационального) произведения, которое над $\mathbb{Q}$ равно нулю, скажем, $[a_1, [a_1, a_2]]$.

Определение 8 ([5])**.** Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$, и пусть $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$ это набор из m симплициальных комплексов. Мы будем говорить, что комплекс

$$\mathcal{K}(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m) = \{I_{j_1}, \dots, I_{j_k} : I_{j_l} \in \mathcal{K}_{j_l}, l = 1, \dots, k \text{ и } \{j_1, \dots, j_k\} \in \mathcal{K}\}$$

является *подстановкой* $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_m$ в $\mathcal{K}$.

Определение 9 ([5])**.** Определим канонический симплициальный комплекс $\partial\Delta_w$, ассоциированный с $w \in \mathcal{W}$ индуктивным образом.

(1) Если $w = [a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$, то $\partial\Delta_w$ полагается равным границе $\partial\Delta(i_1, \dots, i_k)$ симплекса с вершинами $i_1, \dots, i_k$. Также мы говорим, что $\partial\Delta_{a_i}$ есть просто симплекс на одной вершине a_i.

(2) Если $w = [c_1, \dots, c_k]$, где c_i это или высшее произведение в $\mathcal{W}$, или a_j, то $\partial\Delta_w = \partial\Delta(\partial\Delta_{c_1}, \dots, \partial\Delta_{c_k})$.

Теорема 3. *Рассмотрим высшее рациональное произведение Уайтхеда* $w = [c_1, \dots, c_n] \in \mathcal{W}$. *Тогда справедливо следующее.*

(1) *Произведение* w *определено тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *содержит* $\partial\Delta_w$ *в качестве подкомплекса;*

(2) *Произведение* w *определено и тривиально в* $\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *содержит*

$$\Delta(\partial\Delta_{c_1}, \dots, \partial\Delta_{c_k}) = \partial\Delta_{c_1} * \dots * \partial\Delta_{c_k} \tag{15}$$

как подкомплекс.

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение теоремы. Действительно, так как w определено тогда и только тогда, когда $[c_{i_1}, \dots, c_{i_k}] = 0$, $i_1 < \dots < i_k$, $k < n$, откуда $\partial\Delta_{c_{i_1}} * \dots * \partial\Delta_{c_{i_k}} \subseteq \mathcal{K}$. Объединение всех таких $\partial\Delta_{c_{i_1}} * \dots * \partial\Delta_{c_{i_k}}$ равно $\partial\Delta_w$.

Для начала нам потребуются некоторые определения.

Мы определим *глубину* $\mathrm{depth}(w)$ произведения $w \in \mathcal{W}$ индуктивно. Для порождающей a_σ свободной алгебры Ли $L_\mathcal{K}$ мы полагаем $\mathrm{depth}(a_\sigma) = 0$. Если $w = [c_1, \dots, c_k]$, то $\mathrm{depth}(w) = 1 + \max_{1 \leqslant s \leqslant k} \mathrm{depth}(c_s)$.

Каждое $w \in \mathcal{W}$ представляется в свободной алгебре Ли $L_\mathcal{K}$ в виде линейной комбинации итерированных скобок Ли от порождающих a_σ. В связи с этим мы также определим *симплексный состав* итерированной скобки следующим образом. Симплексный состав a_σ это просто мультимножество σ. Состав (нетривиальной) скобки $[v_1, v_2]$ это мультимножество, равное дизъюнктному объединению составов v_1 и v_2. Таким образом, в симплексном составе допускаются повторения, и порядок следования элементов состава не важен. Если какой-то элемент $\alpha \in L_\mathcal{K}$ представим в виде линейной комбинации скобок одинакового состава σ, то мы говорим, что σ есть состав α. Важен тот факт, что симплексный состав не меняется при применении тождеств алгебры Ли (кроме того случая, когда какие-то слагаемые сокращаются совсем), а также меняется ясным образом при взятии дифференциала в $L_\mathcal{K}$.

Также мы выделим следующие утверждения, используемые в доказательстве теоремы.

Утверждение A. Каждое $w \in \mathcal{W}$ может быть представлено в виде суммы итерированных скобок v_k с попарно различными симплексными составами, причём объединение любых двух мультимножеств в симплексном составе любой v_k будет содержать индексы всех вершин комплекса (15).

Утверждение B. Пусть даны итерированные скобки c_1, c_2, причём в c_i фигурируют без повторов только вершины из $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$, $i = 1, 2$ и $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \{\varnothing\}$. Тогда $[c_1, c_2]$ представимо в виде суммы итерированных скобок Ли таких, что в каждой скобке встречается ровно по одному разу $[a_\sigma, a_\tau]$ для каждой пары (a_σ, a_τ) такой, что a_σ встречается в c_1, а a_τ встречается в c_2. Более того, для всякого представления с требованием, что в каждой скобке встречается *хотя бы* по одному разу $[a_\sigma, a_\tau]$ для каждой пары (a_σ, a_τ) с упомянутым свойством, найдётся итерированная скобка, где такая подскобка $[a_\sigma, a_\tau]$ единственна среди всех таких пар (a_σ, a_τ).

Докажем первую часть утверждения B индукцией по глубине $[c_1, c_2]$. Можно считать, что c_1 имеет глубину не менее 2. Тогда $c_1 = [c_{1,1}, c_{1,2}]$. Тогда по тождеству Якоби

$$[c_1, c_2] = [[c_{1,1}, c_{1,2}], c_2] = \pm[[c_{1,1}, c_2], c_{1,2}] \pm [[c_{1,2}, c_2], c_{1,1}]. \tag{16}$$

Для $[c_{1,i}, c_2]$, $i = 1, 2$ справедливо условие утверждения B, так что по индукционному предположению для них справедливо упомянутое представление $[c_{1,i}, c_2] = \sum_k v_{k,i}$. Тогда $\sum_k \pm[v_{k,1}, c_{1,2}] + \sum_k \pm[v_{k,2}, c_{1,1}]$ есть требуемое представление для $[c_1, c_2]$.

Покажем теперь вторую часть утверждения. Для получения какого-то фиксированного представления из формулировки утверждения мы стартуем с $[c_1, c_2]$. Запишем $c_1 = [c_{1,1}, c_{1,2}]$ и пусть наш первый шаг на пути получения данного представления — применение тождества Якоби так, чтобы пронести c_2 внутрь скобки $[c_{1,1}, c_{1,2}]$, то есть преобразование (16) (или же симметричным образом вносим c_1 внутрь c_2). Если бы мы знали, что все дальшейшие применения тождеств алгебры Ли (антисимметрии и Якоби) будут производиться только внутри $[c_{1,1}, c_2]$ и $[c_{1,2}, c_2]$, то можно было бы применить индукцию по длине скобки $[c_1, c_2]$. Для того, чтобы свести задачу к этому случаю, удобно воспользоваться особо выбранным базисом Холла. Так как в базисе Холла итерированные скобки от порождающих можно упорядочить любым способом, покуда выполнено $y < [x, y]$ для всех итерированных скобок x, y, то мы упорядочим их так: $c' < c''$, если в c' имеются вершины из $\mathcal{K}_2$, а в c'' все вершины только из $\mathcal{K}_1$; $c_2 < c_1$, $c_{1,2} < c_{1,1}$ причём нет такой скобки c, что $c_{1,2} < c < c_{1,1}$; и чтобы $c_{1,i}$ были словами Холла. Тогда в силу такого упорядочивания запись $[c_1, c_2]$ в виде линейной комбинации слов Холла будет иметь вид

$$\sum_{c', c''} \pm[c', c_{1,2}] \pm [c'', c_{1,1}].$$

Так что действительно можно считать, что применения тождеств алгебры Ли производятся лишь внутри $[c_{1,1}, c_2]$ и $[c_{1,2}, c_2]$. Но мы допустили в самом начале, что сначала c_2 проносится внутрь c_1 (или наоборот). Если же сначала мы применяем тождества Якоби к c_1 и c_2, то $[c_1, c_2]$ распадается в сумму скобок, к каждой из которых применяется рассуждение выше.

В качестве A_n мы будем понимать утверждение, что A выполнено для произведений w глубины не более n, а в качестве C_n — утверждение, что заключение (2) теоремы верно для для произведений w глубины не более n. Покажем, что из A_n, B и C_n следуют C_{n+1} и A_{n+1}. Пусть $w = [c_1, \ldots, c_k] \in \mathcal{W}$ и $\mathrm{depth}(w) = n+1$. Рассмотрим скобку Ли $[c_i, c_j]$. Так как каждое c_s есть сумма скобок $c_{s,l}$ с различными симплексными составами, и никакая вершина не встречается одновременно в двух разных c_s, то все скобки $[c_{i,l}, c_{j,t}]$ имеют попарно различные симплексные составы. Если $[c_i, c_j]$ есть граница, то в силу квадратичности дифференциала на $L_{\mathcal{K}}$ каждая $[c_{i,l}, c_{j,t}]$ представима в виде суммы итерированных скобок таких, что в каждой из них присутствует коммутатор $[a_{\tau'}, a_\tau]$, фигурирующий в сумме (14) для какого-то a_σ. Поэтому $\tau \sqcup \tau' \in \mathcal{K}$. Если бы оба τ, τ' входили бы в симплексный состав c_i (или c_j), то тогда их объединение, согласно A_n, содержало бы все вершины комплекса, обеспечивающего равенство c_i нулю. Так что можно считать, что a_τ встречается в c_i, а $a_{\tau'}$ — в c_j. Тогда согласно B все $a_\tau, a_{\tau'}$ с таким условием встречаются во всяком представлении $[c_i, c_j]$ в виде суммы итерированных скобок, причём для любого такого коммутатора $[a_\tau, a_{\tau'}]$

есть скобка, в котором он единственен, поэтому $\tau \sqcup \tau' \in \mathcal{K}$. Таким образом, $\Delta(\partial\Delta_{c_i}, \partial\Delta_{c_j}) \in \mathcal{K}$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$.

Из утверждения B мы заключаем, что есть *канонический* способ выбора определяющих систем произведений в $\mathcal{W}$. А именно, мы собираем в сумме представления $[c_i, c_j]$ из первой части утверждения B все подобные итерированные скобки. Например, если есть подобные скобки

$$[\ldots[a_{13}, a_2]\ldots], \quad [\ldots[a_{12}, a_3]\ldots], \quad [\ldots[a_{23}, a_1]\ldots],$$

мы их собираем в скобку $[\ldots([a_{12}, a_3] + [a_{13}, a_2] + [a_{23}, a_1])\ldots]$, где выражение внутри есть $d(a_{123})$. Если $[c_i, c_j]$ есть граница, то заменив $[a_{12}, a_3] + [a_{13}, a_2] + [a_{23}, a_1]$ на a_{123}, (и так далее во всех скобках) мы получим канонический элемент c_{ij} такой, что $d(c_{ij}) = [c_i, c_j]$. (Сумма других скобок вида, например, $[\ldots a_{123}\ldots d\alpha\ldots]$ и т. д., будет равна нулю, так как они будут иметь отличные от всех слагаемых в $[c_i, c_j]$ симплексные составы.) Тоже самое мы можем повторить для скобок $[c_{ij}, c_k]$ и так далее, определив таким образом каноническую систему (c_μ) произведения $[c_1, \ldots, c_n]$.

Пусть теперь канонический элемент c_{ij} таков, что $d(c_{ij}) = [c_i, c_j]$. Теперь если сумма $[c_{ij}, c_k] \pm [c_{ik}, c_j] \pm [c_{jk}, c_i]$, представляющая произведение Уайтхеда $[c_i, c_j, c_k]$, является границей, то в силу того, что у $[c_{ij}, c_k]$, $[c_{ik}, c_j]$ и $[c_{jk}, c_i]$ имеют попарно различные симплексные составы, то применив к каждой из них точно такое же рассуждение, что мы производили для $[c_i, c_j]$, мы получим, что $\tau \sqcup \tau' \in \mathcal{K}$, где a_τ встречается в c_{ij}, а $a_{\tau'}$ — в c_k (и аналогично для двух других слагаемых), так что $\Delta(\partial\Delta_{c_i}, \partial\Delta_{c_j}, \partial\Delta_{c_k}) \subseteq \mathcal{K}$. Повторяя последовательно эти рассуждения, мы придём к заключению $\Delta(\partial\Delta_{c_1}, \ldots, \partial\Delta_{c_k}) \subseteq \mathcal{K}$.

□

Следствие 1. *Комплекс $\partial\Delta_w$ является минимальным, реализующим $w \in \mathcal{W}$.*

Пример 2. Построим представитель произведения $w = [[a_1, a_2, a_3], a_4, a_5]$ в комплексе $\partial\Delta_w$. Тройное произведение $[a_1, a_2, a_3]$ представлено циклом

$$[a_{12}, a_3] + [a_{13}, a_2] + [a_{23}, a_1].$$

Рассмотрим теперь скобку Ли этого цикла с a_4. Для первого слагаемого запишем

$$[[a_{12}, a_3], a_4] = -[[a_3, a_4], a_{12}] - [[a_4, a_{12}], a_3] =$$
$$= -d([a_{34}, a_{12}]) - [a_{34}, [a_1, a_2]] - \frac{1}{2}d([a_{124}, a_3]) - [[a_1, a_{24}], a_3] - [[a_2, a_{14}], a_3].$$

Тогда мы можем аналогично проделать это же вычисление для двух других слагаемых, и в итоге получить

$$[[a_{12}, a_3] + [a_{13}, a_2] + [a_{23}, a_1], a_4] = -d([a_{34}, a_{12}]) - [a_{34}, [a_1, a_2]] - \frac{1}{2}d([a_{124}, a_3]) -$$
$$-[[a_1, a_{24}], a_3] - [[a_2, a_{14}], a_3] - d([a_{24}, a_{13}]) - [a_{24}, [a_1, a_3]] - \frac{1}{2}d([a_{134}, a_2]) -$$
$$-[[a_1, a_{34}], a_2] - [[a_3, a_{14}], a_2] - d([a_{14}, a_{12}]) - [a_{14}, [a_2, a_3]] - \frac{1}{2}d([a_{234}, a_1]) -$$
$$-[[a_2, a_{34}], a_1] - [[a_3, a_{24}], a_1] = -d([a_{34}, a_{12}] + [a_{24}, a_{13}] + [a_{14}, a_{12}] +$$
$$+\frac{1}{2}([a_{124}, a_3] + [a_{134}, a_2] + [a_{234}, a_1])).$$

Здесь сократились в силу тождества Якоби все слагаемые, отличные от дифференциалов. Для скобки Ли с a_5 получится тот же результат, но с индексом 4, заменённым на 5. Таким образом, получим представитель произведения w

$$-[[a_{34},a_{12}]+[a_{24},a_{13}]+[a_{14},a_{12}]+\frac{1}{2}([a_{124},a_3]+[a_{134},a_2]+[a_{234},a_1]),a_5]-$$
$$-[[a_{35},a_{12}]+[a_{25},a_{13}]+[a_{15},a_{12}]+\frac{1}{2}([a_{135},a_2]+[a_{125},a_3]+[a_{235},a_1]),a_4]+$$
$$+[a_{45},[a_{12},a_3]+[a_{13},a_2]+[a_{23},a_1]].$$

Пример 3. Рассмотрим пример из [6] симплициального комплекса, для которого соответствующий $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть букет сфер, но имеется сфера букета, не реализуемая *каноническими* итерированными произведениями Уайтхеда. Для комплекса $\mathcal{K}=(\partial\Delta^2*\partial\Delta^2)\cup\Delta^2\cup\Delta^2$ в данной работе доказано, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\simeq(S^7)^{\vee 6}\vee(S^8)^{\vee 6}\vee(S^9)^{\vee 2}\vee S^{10}$, причём сфера S^{10} не реализуема в упомянутом смысле. В данном комплексе каноническое тройное произведение $[a_1,a_2,a_3]$ равно нулю, так как $\{1,2,3\}\subset\mathcal{K}$. Все (не обязательно канонические) представители $[a_1,a_2,a_3]$ в рациональной модели для $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ будут иметь вид

$$\eta_1=[\xi_1,a_1]+[\xi_2,a_2]+[\xi_3,a_3],$$

где ξ_i есть циклы степени 3. Вычислим представитель итерированного произведения $[[a_1,a_2,a_3],a_4,a_5,a_6]$. Рассмотрим скобки Ли $[\xi_i,a_i]$, $i=1,2,3$ с a_j, $j=4,5,6$:

$$[[\xi_i,a_i],a_j]=-[[a_i,a_j],\xi_i]-[[a_j,\xi_i],a_i]=-d([a_{ij},\xi_i]+[\xi_{ij},a_i]),$$

где мы предположили существование ξ_{ij} такого, что $d(\xi_{ij})=[\xi_i,a_j]$. Обозначим $\eta_{1j}=-\sum_{i=1}^3([a_{ij},\xi_i]+[\xi_{ij},a_i])$. Продолжим построение определяющей системы внешнего четверного произведения рассмотрением скобок $[[a_{ij},\xi_i]+[\xi_{ij},a_i],a_k]$, где i,j,k все различны и $k=4,5,6$.

$$[[a_{ij},\xi_i]+[\xi_{ij},a_i],a_k]=-[[\xi_i,a_k],a_{ij}]-[[a_k,a_{ij}],\xi_i]-[[a_i,a_k],\xi_{ij}]-[[a_k,\xi_{ij}],a_i]=$$
$$=-d([\xi_{ik},a_{ij}])-[[a_k,a_{ij}],\xi_i]-[[a_k,\xi_{ij}],a_i].$$

Посчитаем теперь $[[\xi_i,a_i],a_{jk}]$, где i,j,k все различны, $j,k=4,5,6$:

$$[[\xi_i,a_i],a_{jk}]=-[[a_i,a_{jk}],\xi_i]-[[a_{jk},\xi_i],a_i]=-\frac{1}{2}d([a_{ijk},\xi_i])-[[a_j,a_{ik}],\xi_i]-$$
$$-[[a_k,a_{ij}],\xi_i]-\frac{1}{2}d([\xi_{ijk},a_i])-[[a_j,\xi_{ik}],a_i]-[[a_k,\xi_{ij}],a_i],$$

где было предположено существование ξ_{ijk} таких, что $d(\xi_{ijk})=2([\xi_i,a_{jk}]+[a_j,\xi_{ik}]+[a_k,\xi_{ij}])$. Подставим теперь результаты этих вычислений в сумму

$$\sum_{i=1}^{3}(-[[a_{ij},\xi_i]+[\xi_{ij},a_i],a_k]-[[a_{ik},\xi_i]+[\xi_{ik},a_i],a_j]+[[\xi_i,a_i],a_{jk}])=$$
$$=d\left(\sum_{i=1}^{3}([\xi_{ik},a_{ij}]+[a_{ik},\xi_{ij}]-\frac{1}{2}([a_{ijk},\xi_i]+[\xi_{ijk},a_i]))\right).$$

Обозначим элемент в скобках правой части как η_{1jk}. Тогда представитель произведения $[[a_1,a_2,a_3],a_4,a_5,a_6]$ имеет вид

$$[\eta_{145},a_6]+[\eta_{146},a_5]+[\eta_{156},a_4]+[\eta_{14},a_{56}]+[\eta_{15},a_{46}]+[\eta_{16},a_{45}]+[\eta_1,a_{456}].$$

В качестве ξ_1, ξ_2, ξ_3 можно взять $[[a_2, a_3], a_3]$, $[[a_1, a_3], a_3]$, $[[a_1, a_2], a_2]$. Тогда указанный представитель не будет границей (по соображениям симплексного состава) и будет иметь степень 9.

Список литературы

[1] C. Allday. *Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 46, no. 2 (1973), 313–323.

[2] C. Allday. *Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen, II.* Houston Journal of Mathematics, vol. 3, no. 3 (1977), 301–308.

[3] D. Quillen. *Rational homotopy theory.* Annals of Mathematics, Second Series, vol. 90, no. 2 (1969), 205–295.

[4] J. McCleary. *A user's guide to spectral sequences.* Cambridge University Press. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 58 (2001).

[5] S. A. Abramyan, T. E. Panov. *Higher Whitehead Products in Moment-Angle Complexes and Substitution of Simplicial Complexes.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 305 (2019), 1–21.

[6] S. A. Abramyan. *Iterated Higher Whitehead products in topology of moment-angle complexes.* arXiv:1708.01694

[7] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[8] V. S. Retakh. *Lie-Massey brackets and n-homotopically multiplicative maps of differential graded Lie algebras.* Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 89 (1993), 217–229.