ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

A-БЕСКОНЕЧНОСТЬ АЛГЕБРЫ И ГОМОЛОГИИ ПЕТЕЛЬ

Выполнил студент
603 группы
Грауман Владислав Александрович

____
подпись студента

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва
2024 г.

Содержание

1. Введение

Эта работа представляет собой исследование в области рациональной теории гомотопий, мотивированное, прежде всего, задачами из торической топологии.

В конкретной постановке положим в качестве $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]=\{1,\ldots,m\}$, и пусть D^2 есть двумерный диск с граничной окружностью S^1. По комплексу $\mathcal{K}$ функториальным образом строится *момент-угол комплекс*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}=\bigcup_{\sigma\in\mathcal{K}}(D^2)^{\sigma}\times(S^1)^{[m]\setminus\sigma}\subseteq(D^2)^m,$$

где $(D^2)^{\sigma}\times(S^1)^{[m]\setminus\sigma}=\{(x_1,\ldots,x_m): x_i\in D^2 \text{ при } i\in\sigma, \text{ иначе } x_i\in S^1\}$.

Пространства $\mathcal{Z}_K$ были введены в работах В. М. Бухштабера и Т. Е. Панова [8], [9] как клеточные представления некоторых торических пространств, возникавших в ранее разрозненных конструкциях в алгебраической геометрии, симплектической геометрии, голоморфной динамике, комбинаторной топологии. При этом понятие момент-угол комплекса послужило расширением более ранней конструкции М. Дэвиса и Т. Янушкевича [11] пространства $\mathcal{Z}_P$ с действием тора T^m, строящегося по простому комбинаторному многограннику P с m гранями. В то время, как $\mathcal{Z}_P$ всегда является многообразием, пространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ для произвольного $\mathcal{K}$ не обязано даже быть гомотопически эквивалентным многообразию.

Исторически первые примеры комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ были формальными пространствами (целочисленно и рационально), такими как связные суммы произведений сфер. Геометрический подход к построению $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ с нетривиальными тройными произведениями Масси в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Z})$ был разработан И. В. Баскаковым в [7] как продолжение его результата [6] о вычислении мультипликативной структуры $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Z})$. Как хорошо известно, произведения Масси в когомологиях DG-алгебры препятствуют её формальности, так что пространства в работе Баскакова целочисленно неформальны.

В данной работе изучается важный гомотопический инвариант момент-угол комплексов, их гомологии петель $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$, или так называемые *рациональные алгебры Понтрягина*. Над произвольным коммутативным кольцом $\boldsymbol{k}$ с единицей алгебры Понтрягина исследовались первоначально в работе Т. Е. Панова и Н. Рэя [12] категорными методами. Позднее в работе [13] было установлено описание минимального множества порождающих $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\boldsymbol{k})$ для флаговых комплексов $\mathcal{K}$ (см. теорему 8). Описание соотношений между этими порождающими в общем случае представляет собой открытую задачу.

Как показано работах Грбич–Линтон [17] и Денама–Сучю [15], момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеет в $H^8(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$ нетривиальное произведение Масси классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ содержит в качестве подграфа один из восьми «препятствующих» графов, указанных далее в работе на рис. 2.

В настоящей работе была поставлена задача полного вычисления алгебр Понтрягина комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующим флагизациям препятствующих графов. Как уже упоминалось, минимальный набор порождающих алгебры Понтрягина во флаговом случае известен, так что вычисление означает описание минимального набора соотношений.

Вычисления в явных алгебраических моделях могут показать наличие определённых соотношений в алгебрах Понтрягина, но кроме весьма простых примеров ими не удаётся доказать, что полученные соотношения порождают собой все остальные, иными словами, что других независимых соотношений не существует. Для решения поставленной задачи нами были привлечена дополнительная теория высших гомотопических структур, а именно A_∞- и L_∞-структур.

Сформулируем основные результаты работы. Первый результат показывает существование структуры A_∞-коалгебры особого вида на надстройке абелианизации свободной градуированной алгебры Ли с дифференциалом.

Теорема 1. *Пусть L — DG-алгебра Ли над полем, без учёта дифференциала совпадающая со свободной алгеброй Ли $F(V)$ на DG-векторном пространстве V. Тогда на sQL операции $\Delta_n = s^{-1} \circ d^n \circ s$, $n \geqslant 1$ задают структуру A_∞-коалгебры, где d^n — компоненты дифференциала d на L, повышающие длины элементов на $n-1$.*

Далее, мы применяем эту теорему к случаю, когда $L = L_X$ есть минимальная модель Квиллена (см., например, [4]) пространства X, и получаем следствие уже в топологическом контексте.

Следствие 1. *Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ существует структура минимальной A_∞-коалгебры $\Delta = (\Delta_2, \Delta_3, \dots)$, где Δ_2 есть стандартное гомологическое коумножение, или двойственным образом структуру A_∞-алгебры на $\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$, причём Δ_n соответствует n-ой компоненте в разложении дифференциала L_X в смысле теоремы 1.*

Более того, справедливо следующее.

1. *Нетривиальность операции Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ влечёт наличие соотношения степени $l-2$ в представлении алгебры Ли $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q} \cong ZL_X/BL_X$, в котором имеются слагаемые длины k. Здесь ZL_X, BL_X есть соответственно циклы и границы в минимальной модели Квиллена L_X.*
2. *Наоборот, пусть операция Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ равна тождественно нулю. Для любого соотношения r степени $l-2$ в BL_X пусть I — идеал в L_X, порожденный всеми соотношениями с максимальными длинами меньше, чем у r. Для всякого такого r существует соотношение $r' \in I$ степени $l-2$ такое, что компонента длины k элемента $r - r'$ равна нулю.*
3. *Если Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ равна тождественно нулю и (G, R) — минимальное представление алгебры Ли $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$. Тогда для всякого определяющего соотношения $r \in R$ степени $l-2$ справедливо заключение пункта (2).*

Все длины в формулировке измеряются как у элементов свободной алгебры Ли L_X.

И, наконец, это следствие применяется для решения поставленной задачи вычисления рациональных алгебр Понтрягина, а именно для доказательства того, что соотношения, вычисленные нами явно при помощи модели Квиллена, дают исчерпывающий список.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_8$ — момент-угол комплексы, соответствующие флагизациям графов препятствий на рис. 2 и пронумерованные в порядке появления на этом рисунке. Пусть также $a_{ij} = [u_i, u_j]$, $b_{ijk} = [u_i, [u_j, u_k]]$ и $c_{ijkl} = [u_i, [u_j, [u_k, u_l]]]$ есть канонические образующие из теоремы 8.*

Тогда для рациональных алгебр Понтрягина комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}$ справедливы представления, указанные далее в работе в таблице 1.

Таким образом, план решения поставленной задачи и доказательства теоремы 2 можно кратко сформулировать следующим образом.

- Доказать теорему 1 непосредственной проверкой тождеств Сташеффа, которым должны удовлетворять Δ_k.
- Используя теорему 1 и известный изоморфизм $sQL_X \cong \tilde{H}_*(X; \mathbb{Q})$, доказать следствие 1. Идея заключается в том, что тривиальность операций Δ_k будет означать равенство нулю компонент длины k дифференциалов неразложимых элементов алгебры Ли L_X (см. определения 8, 9, связанные с длиной). Так что всякая компонента длины k в любом соотношении r подходящей степени произойдёт из дифференциала разложимого элемента, откуда можно заключить, что r по модулю соотношений меньших степеней можно привести к виду с нулевой компонентой длины k.

  Для случая минимального представления мы пользуемся результатами раздела 3.3.
- Завершение доказательства теоремы 2 производится при помощи анализа лиевой модели $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, полученной из минимальной модели Квиллена $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Так как приведённые когомологии интересующих нас комплексов сосредоточены в степенях $3 \leqslant k \leqslant 8$, большая часть структурных отображений A_∞-алгебры на $\tilde{H}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$ равна нулю по причинам градуировки. Из следствия 1 и соображений, специфичных для модели $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, мы показываем, что любое соотношение степени не менее семь есть следствие соотношений меньших степеней.

Отметим также, что в ходе исследования нами обнаружена связь между компонентами дифференциала свободной алгебры Ли и дифференциалами спектральной последовательной, полученной из центральной фильтрации. Это излагается в качестве самостоятельной теоремы 10. Она не требуется при вычислении алгебр Понтрягина, но представляет собственный интерес.

К изложенным выше результатам в A_∞-случае мы также доказываем в какой мере двойственные результаты в случае L_∞-алгебр и соотношений в сингулярных когомологиях. Они изложены в разделах 3.5, 3.7.

Структура работы такова.

В разделах 2.1–2.2 излагаются предварительные определения и утверждения, связанные с A_∞-структурами, включая свойства и объекты, необходимые для дальнейшей работы с формальностью.

В разделе 2.3 определены L_∞-алгебры, а также приведены нужные для работы с ними сведения о симметрических алгебрах и коалгебрах.

В разделе 2.4 мы определяем основной класс топологических пространств, представляющий для нас интерес: полиэдральные произведения и как важный частный случай момент-угол комплексы и пространства Дэвиса—Янушкевича. Даны стандартные результаты об их алгебрах Понтрягина и гомотопических алгебрах Ли.

В разделе 3.1 мы излагаем наши первые результаты. Мы производим вычисления соотношений в рациональных алгебрах Понтрягина восьми момент-угол комплексов, построенных по флагизациям так называемых графов-препятствий (теорема 9). В алгебре каждого комплекса имеются неустранимые кубические (содержащие двойной вложенный коммутатор) соотношения, что ещё раз подтверждает рациональную неформальность этих пространств.

В разделе 3.2 доказан результат о связи соотношений в рациональной гомотопической алгебре и A_∞-структур на приведённых рациональных гомологиях (следствие 3), и аналогичный результат для соотношений в рациональных гомологиях и L_∞-структуры на гомотопической алгебре (следствие 4). Они получаются применением соответственно теорем 11 и 12 к модели Квиллена и минимальной коалгебраической модели пространства.

В разделе 3.3 мы излагаем фундаментальные результаты, связывающие порождающие и соотношения положительно градуированных алгебр Ли с их свободными резольвентами. Для случая связных градуированных алгебр некоторые из этих результатов уже были доказаны в [24].

В разделе 3.4 мы доказываем результат, связывающий соотношения в рациональных гомотопических алгебрах Ли с некоторой структурой A_∞-коалгебры на рациональных сингулярных гомологиях пространств. С помощью него мы показываем, что вычисленные описания алгебр Понтрягина из секции 3.1 полны, то есть дают исчерпывающее описание порождающих и соотношений.

Разделы 3.5, 3.7 сходны разделам 3.2, 3.4 соответственно, и излагают аналогичные результаты, но для спектральной последовательности DG-коалгебры, и для связи соотношений в рациональных сингулярных гомологиях. Раздел 3.6 аналогичен разделу 3.3, но имеет дело с обычными градуированными алгебрами.

Автор желает выразить благодарность Георгию Сергеевичу Черных за плодотворные обсуждения, а также своему научному руководителю Тарасу Евгеньевичу Панову за очень ценные замечания и вопросы по содержанию работы, без которых она не приняла бы настоящий вид.

2. Предварительные сведения

2.1. A_∞-структуры. Здесь мы кратко изложим основные определения и результаты, связанные с A_∞-(ко-)алгебрами. Одним из стандартных введений является работа Келлера [16].

Зафиксируем коммутативное кольцо с единицей R. Здесь и далее непомеченные тензорные произведения $\otimes$ понимаются над R.

Определение 1. *A_∞-алгеброй* над R называют $\mathbb{Z}$-градуированный R-модуль $A = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p$, снабжённый совокупностью однородных R-линейных отображений

$$m_n : A^{\otimes n} \to A,\ n \in \mathbb{N}$$

степени $2-n$, удовлетворяющим *тождествам Сташеффа*

$$(SI_n) \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) = 0.$$

В частности, m_2 можно интерпретировать как умножение в алгебре, а m_1 — дифференциал, удовлетворяющий тождеству Лейбница относительно m_2. Мы говорим, что A_∞-алгебра *минимальна*, если $m_1 = 0$.

Двойственным образом под A_∞*-коалгеброй* понимается $\mathbb{Z}$-градуированный R-модуль $C = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} C_p$ с заданной совокупностью однородных R-линейных отображений

$$\Delta_n : C \to C^{\otimes n},\ n \in \mathbb{N}$$

степени $n-2$, удовлетворяющим тождествам Сташеффа

$$(SI_n^*) \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st}(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes \Delta_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t})\Delta_{r+1+t} = 0.$$

При применении этих тождеств к элементам модуля употребляется известное соглашение о знаках Кошуля. Мы аналогично говорим, что A_∞-коалгебра *минимальна*, если $\Delta_1 = 0$. Далее для удобства мы формулируем свойства для A_∞-алгебр, случай коалгебр определятся по двойственности. A_∞-(ко-)алгебры образуют категорию при задании морфизмов следующим образом.

Определение 2. *Морфизм* A_∞*-алгебр* или A_∞*-морфизм* $f : A \to B$ это совокупность однородных R-линейных отображений

$$f_n : A^{\otimes n} \to B,\ n \in \mathbb{N}$$

степени $1-n$, удовлетворяющих тождествам

$$(MI_n) \quad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ r,t\geqslant 0, s\geqslant 1}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t}(\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) = \sum (-1)^s m_r(f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_r}),$$

где суммирование в правой части производится по всем $1 \leqslant r \leqslant n$ и разложениям $n = i_1 + \cdots + i_r$ в сумму натуральных чисел; знак определён как

$$s = (r-1)(i_1-1) + (r-2)(i_2-1) + \cdots + 2(i_{r-2}-1) + (i_{r-1}-1).$$

Морфизм f есть *квазиизоморфизм*, если f_1 является квазиизоморфизмом. Морфизм f строгий, если $f_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Композиция $f : B \to C$ и $g : A \to B$ задаётся как

$$(f \circ g)_n = \sum (-1)^s f_r(g_{i_1} \otimes g_{i_2} \otimes \cdots \otimes g_{i_r}),$$

где знак и суммирование такие же, как в тождествах, определяющих морфизмы.

Мы говорим, A_∞-алгебры A и B *квазиизоморфны*, если существуют A_∞-алгебры $A_1, \dots, A_k$ и квазиизоморфизмы

$$A \leftarrow A_1 \to \cdots \leftarrow A_k \to B.$$

Определение 3. A_∞-алгебра A называется *формальной*, если она квазиизоморфна A_∞-алгебре $(H(A), (0, m_2, 0, \dots))$, где m_2 индуцировано умножением на A.

Мы говорим, что A_∞-алгебра A *строго унитальна*, если в ней есть элемент 1_A степени ноль такой, что $m_1(1_A) = 0$, $m_2(1_A, a) = a = m_2(a, 1_A)$ для всех $a \in A$ и что для всех $i \geqslant 3$ и всех $a_1, \dots, a_i \in A$ произведение $m_i(a_1, \dots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из a_j равен 1_A. Если A и B — строго унитальные A_∞-алгебры, то A_∞-морфизм $f : A \to B$ *строго унитален*, если $f_1(1_A) = 1_B$

и для всех $i \geqslant 2$ и всех $a_1, \ldots, a_i \in A$ элемент $f_i(a_1, \ldots, a_i)$ обращается в ноль, если хотя бы один из a_j равен 1_A. Каждая строго унитальная A_∞-алгебра A имеет строгий морфизм $\eta : R \to A$, переводящий 1_R в 1_A. Она *аугментирована*, если задан строго унитальный морфизм $\varepsilon : A \to k$ такой, что $\varepsilon \circ \eta = \mathrm{id}_R$. Морфизм аугментированных A_∞-алгебр это строго унитальный морфизм $f : A \to B$ такой, что $\varepsilon_B \circ f = \varepsilon_A$. Функтор $A \mapsto \ker \varepsilon_A$ определяет эквивалентность из категории аугментированных A_∞-алгебр в категорию A_∞-алгебр.

2.2. **A_∞-алгебры и минимальные модели.** Мы ограничимся рассмотрением класса A_∞-алгебр, обладающих следующим свойством.

Определение 4. A_∞-алгебра A называется *плоской*[1], если каждый R-модуль когомологий $H^i(A)$ R-проективен.

Над полем всякая A_∞-алгебра плоская. Напомним следующий известный результат Кадеишвили.

Теорема 3 ([27], см. также [5]). *Пусть A — плоская A_∞-алгебра, и $g : H(A) \to A$ — квазиизоморфизм цепных комплексов R-модулей, где дифференциал на $H(A)$ тождественно нулевой. Тогда существует структура минимальной A_∞-алгебры на $H(A)$, где m_2 индуцировано умножением на A, а также A_∞-морфизм $f = (g_1, g_2, \ldots) : H(A) \to A$, где $g_1 = g$.*

Мы называем так полученную A_∞-алгебру *минимальной моделью* для A. Она единственна с точностью до A_∞-квазиизоморфизма. Заметим, что для A_∞-алгебр понятие квазиизоморфность совпадает с существованием квазиизоморфизма между ними. Квазиизоморфные плоские A_∞-алгебры имеют изоморфные бар-конструкции.

Как следует из определения A_∞-алгебры, DG-алгебра есть ни что иное, как A_∞-алгебра, у которой $m_i = 0$ при $i \geqslant 3$. Под морфизмом DG-алгебр мы понимаем морфизм ассоциативных алгебр, коммутирующий с дифференциалами. Таким образом, категория DG-алгебр не является полной подкатегорией в категории A_∞-алгебр. Для DG-алгебр (даже для плоских) в общем случае не верен тот факт, что квазиизоморфные DG-алгебры могут быть связаны одним квазиизоморфизмом. Для плоских DG-алгебр справедлив следующий важный результат.

Предложение 1 ([5]). *Пусть E, F — плоские DG-алгебры и A, B — их минимальные модели соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

(1) *E, F DG-квазиизоморфны;*
(2) *E, F A_∞-квазиизоморфны;*
(3) *A, B A_∞-квазиизоморфны;*

Как и ранее, мы говорим, что DG-алгебра E *формальна* (в DG-смысле), если она квазиизоморфна алгебре $H(E)$ с нулевым дифференциалом и индуцированным с E умножением.

Следствие 2 ([5]). *Пусть E — минимальная плоская DG R-алгебра с минимальной моделью A. Тогда E DG-формальна тогда и только тогда, когда A формальна как A_∞-алгебра.*

[1]Это определение *не* совпадает с обычным определением плоского модуля.

Таким образом, в плоском случае мы можем исследовать формальность DG-алгебр, используя лишь их минимальные модели. В дальнейшем мы подразумеваем, что все A_∞ и DG-алгебры плоские.

2.3. **L_∞-структуры.** Так как наши результаты будут иметь аналоги для L_∞-структур, мы также дадим определение L_∞-алгебры, но за более подробной информацией отсылаем читателя к стандартной литературе, например, [3].

Определение 5. *L_∞-алгеброй* называют градуированное векторное пространство $L = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L_n$ над R, снабжённое совокупностью R-линейных однородных отображений

$$\ell_n : L^{\otimes n} \to L,\ n \in \mathbb{N}$$

степени $n-2$, удовлетворяющими для каждого $n \in \mathbb{N}$ следующим условиям. Во-первых, для каждой перестановки σ на n элементах

$$\ell_n(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)\ell_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n),$$

а во-вторых, справедливо обобщение тождества Якоби

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \operatorname{sgn}(\sigma)\varepsilon(\sigma)(-1)^{i(j-1)}\ell_j(\ell_i(x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i)})\otimes x_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(n)}) = 0,$$

где $\mathrm{Sh}(i, n-i)$ — множество $(i, n-i)$-тасующих перестановок, то есть таких $\sigma \in S_n$, что $\sigma(1) < \cdots < \sigma(i)$ и $\sigma(i+1) < \cdots < \sigma(n)$, а $\varepsilon(\sigma)$ — знак, получаемый из применения правила Кошуля (для перестановки пары элементов x, y появляется знак $(-1)^{\deg x \deg y}$).

Положим теперь, что V — DG-векторное пространство. Далее нам также понадобятся определения следующих объектов.

Пусть $T(V) = \bigoplus_{i\geqslant 0} V^{\otimes i}$ — тензорная алгебра на V, а I — идеал в ней, порождённый всеми элементами $x\otimes y-(-1)^{\deg x \deg y} y\otimes x$, где $x, y \in V$. Фактор-алгебра $S(V) := T(V)/I$ называется *симметрической алгеброй* на V, она коммутативна. Обозначим как $\pi : T(V) \to S(V)$ каноническую проекцию. Про элементы из $S^n(V) = \pi(V^{\otimes n})$ будем говорить, что их *длина* равна n. Мы также обозначим индуцированное умножение на $S(V)$ символом $\vee$, то есть $\pi(x \otimes y) = x \vee y$.

На $T(V)$ существует стандартное коумножение Δ, заданное как $\Delta(1) = 1\otimes 1$, и для $x \in \overline{T}(V)$ $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \overline{\Delta}(x)$, где $\overline{\Delta}$ — деконкатенация

$$\overline{\Delta}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n).$$

Отображение $N : S(V) \to T(V)$, действующее по правилу $N(1) = 1$, $N(v) = v$, $v \in V$, и

$$N(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}, \quad v_1, \ldots , v_n \in V,$$

является инъективным, причём $\pi\circ N = \mathrm{id}_{S(V)}$. Известно, что $\mathrm{Im}(N) \subset T(V)$ есть подкоалгебра $T(V)$, поэтому можно индуцировать коумножение Δ_S на $S(V) \cong \mathrm{Im}(N)$. В этом случае оно примет вид

$$\Delta_S(v_1 \vee \cdots \vee v_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\sigma\in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)(v_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(i)}) \otimes (v_{\sigma(i+1)} \vee \cdots \vee v_{\sigma(n)}). \tag{1}$$

Это коумножение кокоммутативно и согласовано с умножением. Напомним, что свойство однородного линейного отображения $d : C \to C$ на коалгебре C быть кодеривацией означает, что $\Delta_C \circ d = (d \otimes 1 + 1 \otimes d) \circ \Delta_C$. Важным для нас будет следующее утверждение.

Лемма 1 ([3]). *Пусть C — кокоммутативная коалгебра, и $f : C \to S(V)$ — гомоморфизм коалгебр. Обозначим как $\mathrm{pr}_V : S(V) \to V$ каноническую проекцию. Линейное отображение*

$$\mathrm{Coder}(C, S(V)) \to \mathrm{Hom}(C, V), \quad d \mapsto \mathrm{pr}_V \circ d$$

есть изоморфизм. Его обратный задаётся как

$$\mathrm{Hom}(C, V) \to \mathrm{Coder}(C, S(V)), \quad \lambda \mapsto \vee \circ (\lambda \otimes f) \circ \Delta_C.$$

Для L_∞-алгебр поэтому справедливы некоторые аналоги свойств A_∞-алгебр. Мы далее также будем использовать следующий результат.

Предложение 2 ([3]). *Структура L_∞-алгебры на градуированном векторном пространстве L эквивалентна совокупности линейных отображений $\lambda_k : S^k(sL) \to sL$, $k \in \mathbb{N}$ степени -1 и таких, что*

$$\sum_{i+j=n+1} \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i,n-i)} \varepsilon(\sigma)\lambda_j(\lambda_i(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(i)}), x_{\sigma(i+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = 0$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

2.4. **Полиэдральные произведения и момент-угол комплексы.** Подмножество $\mathcal{K} \subseteq 2^{[m]}$, $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ называется *симплициальным комплексом* на множестве $[m]$, если из того, что $I \in \mathcal{K}$, следует, что всякое $L \subseteq I$ также лежит в $\mathcal{K}$. Элементы $I \in \mathcal{K}$ называются *симплексами* $\mathcal{K}$, *размерность* симплекса I есть количество его элементов минус единица, симплексы размерности ноль называются *вершинами* $\mathcal{K}$, которые мы отождествляем с $1, 2, \dots, m$. Размерность комплекса $\mathcal{K}$ есть максимум среди размерностей его симплексов. Для каждого симплекса I определён *полный подкомплекс* $\mathcal{K}_I = \{J \in \mathcal{K} : J \subseteq I\}$.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если любое множество его вершин, попарно соединённых рёбрами, образует симплекс. Подмножество $I \subseteq [m]$ называют *пропущенной гранью* $\mathcal{K}$, если $I \notin \mathcal{K}$, но всякое $L \subseteq I$ лежит в $\mathcal{K}$. Комплекс флаговый тогда и только тогда, когда всякая его пропущенная грань имеет ровно две вершины.

Для всякого комплекса $\mathcal{K}$ существует минимальный по включению флаговый комплекс $\mathcal{K}^f$, содержащий $\mathcal{K}$. Мы называем $\mathcal{K}^f$ *флагизацией* $\mathcal{K}$.

Для каждого $I \subseteq [m]$ и топологической пары (X, A) определено подмножество X^m

$$(X, A)^I = \prod_{I \in \mathcal{K}} X \times \prod_{I \notin \mathcal{K}} A.$$

Объединение этих множеств по всем симплексам $I \in \mathcal{K}$ даёт *полиэдральное произведение*, соответствующее $\mathcal{K}$:

$$(X, A)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (X, A)^I \subseteq X^m.$$

Произведение $(X, pt)^{\mathcal{K}}$ обозначают как $X^{\mathcal{K}}$. Мы будем работать лишь с частным случаем полиэдральных произведений. Рассмотрим единичный полидиск в пространстве $\mathbb{C}^m$:

$$(D^2)^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m : |z_i| \leqslant 1,\, i = 1, \ldots, m\}.$$

Тогда *момент-угол комплексом*, соответствующему симплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называют

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subseteq (D^2)^m.$$

Также мы будем рассматривать множество $(BS^1)^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Сформулируем ряд важных результатов, используемых в работе. Здесь и далее $\mathbf{k}$ — поле или кольцо $\mathbb{Z}$.

Теорема 4 ([10]). *Гомотопический слой вложения $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ есть $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.*

Теорема 5 ([10]). *Имеется точная последовательность гомотопических алгебр Ли*

$$0 \longrightarrow \pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow CL(u_1, \ldots, u_m) \longrightarrow 0,$$

где $CL(u_1, \ldots, u_m)$ — свободная коммутативная алгебра Ли, $\deg u_i = 1$, и точная последовательность алгебр Понтрягина (гомологий петель)

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \longrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \longrightarrow \Lambda[u_1, \ldots, u_m] \longrightarrow 0,$$

где $\Lambda[u_1, \ldots, u_m]$ — внешняя алгебра на u_i, $\deg u_i = 1$.

Таким образом, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ вкладывается в $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ в качестве коммутаторной подалгебры.

Группа $\pi_*(X)$ имеет стандартную структуру алгебры, задаваемую произведением Уайтхеда $[\cdot,\cdot]_w$. Сопряжённым к нему в $\pi_*(\Omega X)$ является произведение Самельсона $[\cdot,\cdot]_s$. $H_*(\Omega X)$ имеет в качестве умножения произведение $\star$, определённое Л.С. Понтрягиным. Все эти три умножения связаны классическим результатом Самельсона.

Теорема 6. *Существует выбор изоморфизма сопряжения*

$$t : \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$$

такой, что

$$t[\alpha, \beta]_w = (-1)^{k-1}[t\alpha, t\beta]_s,$$

где $\alpha \in \pi_k(X), \beta \in \pi_l(X)$. Если $h : \pi_n(\Omega X) \to H_n(\Omega X)$ есть гомоморфизм Гуревича, то

$$h[\varphi, \psi]_s = h(\varphi) \star h(\psi) - (-1)^{pq} h(\psi) \star h(\varphi),$$

при $\varphi \in \pi_p(\Omega X)$, $\psi \in \pi_q(\Omega X)$.

Тогда из классического результата Картана—Серра ([14, теорема 16.10]) следует, что $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$ есть универсальная обёртывающая градуированной алгебры Ли $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$, и последняя есть подалгебра примитивных элементов в алгебре Хопфа $H_*(\Omega X; \mathbb{Q})$.

Во флаговом случае гомотопическая алгебра Ли и алгебра Понтрягина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ допускает полное описание мультипликативных образующих, а в случае $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$ имеет описание и соотношений.

Теорема 7 ([10]). *Для каждого флагового комплекса $\mathcal{K}$ имеются изоморфизмы*

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \cong T(u_1, \ldots, u_m)/\langle u_i^2, u_i u_j + u_j u_i \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\rangle,$$

$$\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q} \cong FL(u_1, \ldots, u_m)/\langle [u_i, u_i], [u_i, u_j] \text{ при } \{i,j\} \in \mathcal{K}\rangle,$$

где $FL(\cdot)$ — свободная алгебра Ли, $\deg u_i = 1$.

Теорема 8 ([13]). *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс. Тогда алгебра Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ мультипликативно порождена образующими вида*

$$[u_j, u_i], [u_{k_1}, [u_j, u_i]], \ldots, [u_{k_1}, [u_{k_2}, \ldots, [u_{k_{m-2}}, [u_j, u_i]] \ldots]],$$

где $k_1 < \cdots < k_p < j > i$, и $k_s \neq i$ для каждого s, причём i — наименьшая вершина в связной компоненте комплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_p,j,i\}}$, не содержащей j.

3. Результаты

3.1. **Основные вычисления.** Как показано в статье [17], момент-угол комплекс содержит в когомологиях нетривиальное произведение Масси тогда и только тогда, когда его одномерный остов содержит подграф, изоморфный одному из восьми графов препятствий, представленных на рисунке 2. Для алгебр Понтрягина, как уже было отмечено, это влечёт существование кубического соотношения, то есть соотношения, в котором имеется дважды итерированный коммутатор. Здесь мы находим алгебры для флаговых комплексов этих графов. Вычисления будут производиться поэтапно, сначала для всевозможных полных подкомплексов на пяти вершинах, затем для графов в целом. Для вычислений привлекался компьютерный пакет SuperLie [26] для Wolfram Mathematica. Так как образующие алгебры известны, требуется описать соотношения.

Для начала отметим, что любой гомотопически тривиальный полный подкомплекс на пяти вершинах любого из восьми комплексов не даст вклада в соотношения алгебры. Действительно, каждый такой подкомплекс можно получить последовательным приклеиванием 1- и 2-симплексов, каждый раз ровно по одной общей грани. Если $\mathcal{K}$ есть склейка двух комплексов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ по их общей грани, и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_\rangle}$ гомотопически эквивалентны букетам сфер, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ также эквивалентен букету сфер [10, теорема 8.2.1]. Так что для каждого рассматриваемого подкомплекса соответственный момент-угол комплекс будет иметь тип букета сфер, каждая из которых будет соответствовать образующей из теоремы 8, попавшей в наш подкомплекс.

Рассмотрим теперь всевозможные нестягиваемые подкомплексы на пяти вершинах во флаговых комплексах графов. Каждый из них будет изоморфен одному из пяти комплексов, указанных на рисунке 1. Степени элементов далее указываются относительно градуировки в $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$, или, что равносильно, в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbb{Q})$.

Для первого из них, пятиугольника, не имеется соотношений степеней не более 4 в силу стягиваемости его собственных подкомплексов. Рассмотрим всевозможные коммутаторы степени пять, содержащие индекс каждой вершины по одному разу, так как коммутаторы с повторениями индексов будут лежать в алгебрах подкомплексов на не более, чем четырёх вершинах, где нет соотношений. Таковых всего пять штук, распишем их в базисе гомотопической алгебры $\pi_*((\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}) \otimes \mathbb{Q}$ при помощи SuperLie. Вычисления показывают, что в алгебре Ли, а, следовательно, и в рациональной алгебре Понтрягина, имеется одно соотношение

$$[a_{13}, b_{452}] - [a_{14}, b_{352}] - [a_{24}, b_{153}] + [a_{25}, b_{341}] - [a_{35}, b_{241}] = 0,$$

где $a_{ij} = [u_i, u_j], b_{ijk} = [u_i, [u_j, u_k]]$ — канонические образующие из теоремы 8. Это согласуется с результатом в [28, теорема 3.1], причём, как отмечено в [28], эти коммутаторы дают гомотопическую эквивалентность $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (S^3 \times S^4)^{\#5}$, откуда, как показывает модель Адамса—Хилтона [25], следует отсутствие прочих соотношений.

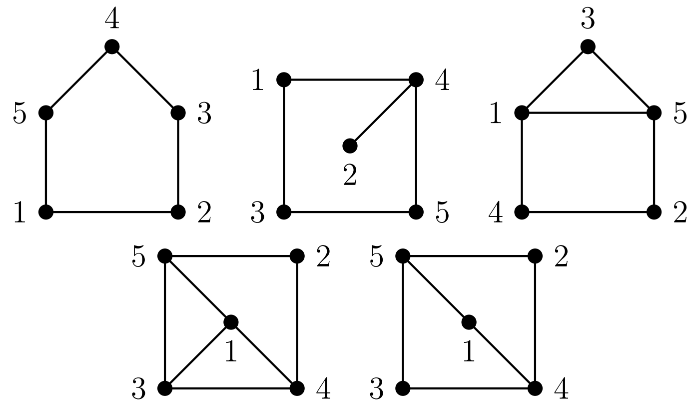

Рис. 1. Графы подкомплексов на пяти вершинах

Аналогичные вычисления для остальных четырёх комплексов дают соотношение

$$[a_{15}, a_{34}] = [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}] = 0$$

для второго комплекса на рис. 1,

$$[a_{12}, a_{45}] = [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}] = 0$$

для третьего комплекса,

$$[a_{23}, a_{45}] = [a_{12}, a_{45}] = [a_{45}, b_{132}] = 0$$

в алгебре четвёртого, а также

$$[a_{23}, a_{45}] = [a_{12}, a_{45}] = [a_{13}, a_{45}] = [a_{45}, b_{132}] = [a_{45}, b_{231}] = 0$$

у пятого комплекса.

Опишем теперь соотношения в степени шесть. Для этого поступим схожим образом, что и в степенях не более пяти. Выпишем всевозможные коммутаторы степени шесть через канонические образующие, используя при этом то, что достаточно рассмотрения коммутаторов, содержащих индекс каждой вершины ровно по одному разу, так как подкомплексы на пяти вершинах уже рассмотрены.

Для, к примеру, шестого графа $\mathcal{K}_6$ на рис. 2 мы имеем три возможных коммутатора такого вида с учётом соотношений коммутирования и тождества Якоби в алгебре Ли:

$$[a_{34}, [a_{56}, a_{12}]], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]], [b_{132}, b_{465}],$$

среди которых первый равен нулю, что уже является следствием соотношения $[a_{56}, a_{12}] = 0$, а остальные два совпадают, как показывает разложение в базисе алгебры Ли.

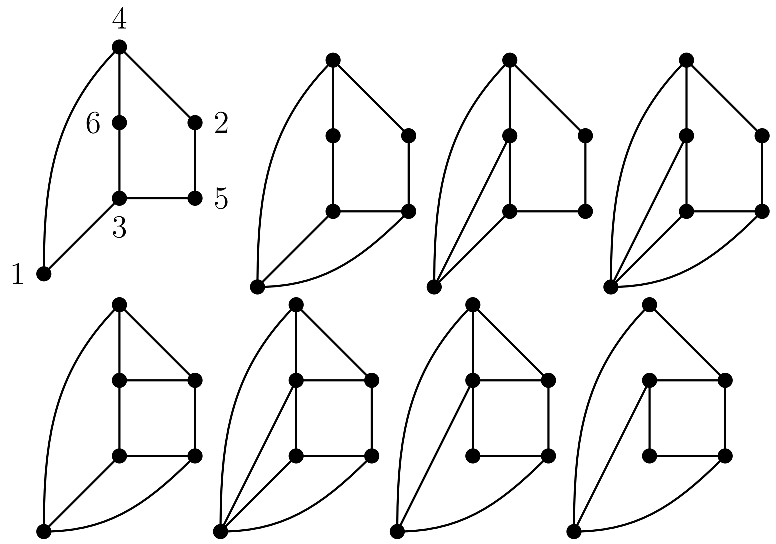

Рис. 2. Графы препятствий

Соотношения в размерности шесть имеются у всех графов на рис. 2. Они имеют следующий вид:

$$[a_{23},[a_{16},a_{45}]]+[a_{34},c_{2561}]+[a_{45},[a_{23},a_{16}]]-[b_{354},b_{261}]-[b_{243},b_{561}]=$$
$$=[a_{23},c_{1465}]-[a_{26},[a_{15},a_{34}]]+[a_{34},c_{1562}]+[a_{56},[a_{12},a_{34}]]-[b_{132},b_{465}]+$$
$$+[b_{362},b_{154}]-[b_{165},b_{243}]-[b_{162},b_{354}]-[a_{45},[a_{23},a_{16}]]=0$$

для первого комплекса,

$$[a_{23},[a_{16},a_{45}]]+[a_{34},c_{2561}]+[a_{45},[a_{23},a_{16}]]-[b_{354},b_{261}]-[b_{243},b_{561}]=$$
$$=[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{354},b_{261}]+[b_{162},b_{354}]+$$
$$+[b_{132},b_{465}]+[a_{45},c_{1362}]-[a_{45},[a_{23},a_{16}]]=0$$

для второго комплекса,

$$[a_{23},c_{1465}]+[a_{34},c_{1562}]-[a_{45},c_{1362}]-[a_{26},[a_{15},a_{34}]]+[a_{56},[a_{12},a_{34}]]-$$
$$-[b_{132},b_{465}]+[b_{362},b_{154}]-[b_{162},b_{354}]-[b_{165},b_{243}]=0$$

в случае третьего,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[a_{45},c_{1362}]+[b_{132},b_{465}]+[b_{162},b_{354}]=0$$

у четвёртого комплекса,

$$[a_{23},[a_{16},a_{45}]]-[a_{56},[a_{12},a_{34}]]+[b_{132},b_{465}]-[b_{243},b_{561}]=$$
$$=[a_{16},[a_{23},a_{45}]]-[a_{34},[a_{56},a_{12}]]-[b_{243},b_{561}]-[b_{354},b_{261}]=0$$

у пятого,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{132},b_{465}]=0$$

у шестого,

$$[a_{12},[a_{34},a_{56}]]+[b_{231},b_{465}]+[a_{56},c_{1243}]=[a_{56},c_{1243}]-[b_{132},b_{465}]=0$$

в алгебре седьмого, и, наконец,

$$[a_{12}, c_{3564}] + [b_{132}, b_{564}] + [b_{231}, b_{564}] = [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}] + [b_{231}, b_{465}] = \\ = [a_{56}, c_{1243}] - [b_{132}, b_{465}] = 0$$

для восьмого комплекса. Порядок вершин для каждого комплекса аналогичен указанному на первом графе рис. 2.

Теперь, пользуясь полученными результатами, определим все вхождения комплексов на пяти вершинах, указанных ранее, во флаговые комплексы графов препятствий в качестве изоморфных подкомплексов. Выпишем соотношения с необходимыми изменениями индексов и добавим соотношения степени шесть. Имеем часть следующего результата.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_8$ — момент-угол комплексы, соответствующие флагизациям графов препятствий на рис. 2 и пронумерованные в порядке появления на этом рисунке. Пусть также $a_{ij} = [u_i, u_j]$, $b_{ijk} = [u_i, [u_j, u_k]]$ и $c_{ijkl} = [u_i, [u_j, [u_k, u_l]]]$ есть канонические образующие из теоремы 8.*

Тогда для рациональных алгебр Понтрягина комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}$ справедливы представления, указанные в следующей таблице.

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{154}, b_{162}, b_{165}, \\ b_{243}, b_{251}, b_{261}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{561}, b_{562}, c_{1362}, c_{1465}, c_{1562}, c_{2561})/I_1$$

$$I_1 = \langle [a_{16}, a_{34}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}], \\ [a_{12}, b_{354}] + [a_{15}, b_{243}] - [a_{23}, b_{154}] - [a_{34}, b_{251}] + [a_{45}, b_{132}], \\ [a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}], [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}], [a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] + [a_{34}, c_{2561}] + \\ + [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] - [b_{354}, b_{261}] - [b_{243}, b_{561}], [a_{23}, c_{1465}] - [a_{26}, [a_{15}, a_{34}]] + \\ + [a_{34}, c_{1562}] + [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] - [b_{132}, b_{465}] + [b_{362}, b_{154}] - \\ - [b_{165}, b_{243}] - [b_{162}, b_{354}] - [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] \rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{16}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, \\ b_{162}, b_{243}, b_{261}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{561}, b_{562}, c_{1362})/I_2$$

$$I_2 = \langle [a_{16}, a_{34}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}], \\ [a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}], [a_{16}, b_{243}] - [a_{34}, b_{261}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], \\ [a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] + [a_{34}, c_{2561}] + [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] - [b_{354}, b_{261}] - [b_{243}, b_{561}], \\ [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{354}, b_{261}] + [b_{162}, b_{354}] + [b_{132}, b_{465}] + [a_{45}, c_{1362}] - [a_{45}, [a_{23}, a_{16}]] \rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_3};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{15}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{154}, b_{162},$$
$$b_{165}, b_{243}, b_{251}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{562}, c_{1362}, c_{1465}, c_{1562})/I_3$$
$$I_3 = \langle [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{15}, b_{243}] - [a_{23}, b_{154}] - [a_{34}, b_{251}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{23}, c_{1465}]+$$
$$+[a_{34}, c_{1562}] - [a_{45}, c_{1362}] - [a_{26}, [a_{15}, a_{34}]] + [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] - [b_{132}, b_{465}]+$$
$$+[b_{362}, b_{154}] - [b_{162}, b_{354}] - [b_{165}, b_{243}]\rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_4};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{26}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{162}, b_{243}, b_{354}, b_{362}, b_{465}, b_{562}, c_{1362})/I_4$$
$$I_4 = \langle [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{26}, b_{354}] + [a_{34}, b_{562}] - [a_{45}, b_{362}]+$$
$$+[a_{56}, b_{243}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, b_{465}] - [a_{45}, b_{162}],$$
$$[a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [a_{45}, c_{1362}] + [b_{132}, b_{465}] + [b_{162}, b_{354}]\rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_5};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{16}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{261}, b_{354}, b_{465}, b_{561})/I_5$$
$$I_5 = \langle [a_{12}, a_{45}], [a_{16}, a_{34}], [a_{23}, a_{56}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{16}, b_{354}] + [a_{34}, b_{561}],$$
$$[a_{12}, b_{465}] - [a_{45}, b_{261}], [a_{23}, b_{561}] + [a_{56}, b_{132}], [a_{34}, b_{261}] - [a_{16}, b_{243}],$$
$$[a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{23}, [a_{16}, a_{45}]] - [a_{56}, [a_{12}, a_{34}]] + [b_{132}, b_{465}] - [b_{243}, b_{561}],$$
$$[a_{16}, [a_{23}, a_{45}]] - [a_{34}, [a_{56}, a_{12}]] - [b_{243}, b_{561}] - [b_{354}, b_{261}]\rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_6};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{243}, b_{354}, b_{465})/I_6$$
$$I_6 = \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}], [a_{12}, b_{465}],$$
$$[a_{56}, b_{132}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}]\rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_7};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{56}, b_{132}, b_{143}, b_{231}, b_{243}, b_{354}, b_{465}, c_{1243})/I_7$$
$$I_7 = \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{13}, a_{56}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{13}, b_{465}] + [a_{56}, b_{143}], [a_{12}, b_{465}], [a_{56}, b_{132}], [a_{56}, b_{231}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}]+$$
$$+[a_{45}, b_{231}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{231}, b_{465}] + [a_{56}, c_{1243}], [a_{56}, c_{1243}] - [b_{132}, b_{465}]\rangle$$

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_8};\mathbb{Q}) \cong T(a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{46}, a_{56}, b_{132},$$
$$b_{143}, b_{231}, b_{243}, b_{354}, b_{364}, b_{465}, b_{564}, c_{1243}, c_{3564})/I_8$$
$$I_8 = \langle [a_{23}, a_{56}], [a_{12}, a_{56}], [a_{12}, a_{45}], [a_{13}, a_{56}], [a_{12}, a_{46}], [a_{23}, b_{465}] + [a_{56}, b_{243}],$$
$$[a_{13}, b_{465}] + [a_{56}, b_{143}], [a_{12}, b_{354}] + [a_{45}, b_{132}] + [a_{45}, b_{231}], [a_{12}, b_{465}], [a_{12}, b_{564}],$$
$$[a_{56}, b_{132}], [a_{56}, b_{231}], [a_{12}, b_{364}] + [a_{46}, b_{132}] + [a_{46}, b_{231}], [a_{56}, c_{1243}] - [b_{132}, b_{465}],$$
$$[a_{12}, c_{3564}] + [b_{132}, b_{564}] + [b_{231}, b_{564}], [a_{12}, [a_{34}, a_{56}]] + [b_{132}, b_{465}] + [b_{231}, b_{465}]\rangle$$

Таблица 1. Алгебры Понтрягина комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}$, $i = 1, \ldots, 8$.

Заметим, что найденные соотношения в размерности шесть кубические, то есть содержат дважды итерированные коммутаторы, в согласии с рациональной неформальностью соответствующих $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Заметим также и то важное обстоятельство, что вычисления показывают *наличие* указанных соотношений, но не говорят ничего о том, имеются ли другие независимые соотношения. На данный момент мы только показали, что идеалы на выписанных элементах *содержатся* в соответственных идеалах I_k, содержащих *все* соотношения. Для того, чтобы показать отсутствие прочих соотношений, требуются дополнительные соображения. Далее в работе мы с их помощью покажем, что действительно прочих независимых соотношений нет и наши описания алгебр Понтрягина на самом деле полны.

3.2. **Связь A_∞-структур, компонент дифференциала DG-алгебры Ли и дифференциалов спектральной последовательности.** Мы здесь и далее в этом разделе предполагаем, что все алгебраические объекты определены над полем нулевой характеристики.

Для формулировки и доказательства наших основных результатов сделаем краткое напоминание об алгебрах Ли и дифференциалах на них. Далее если модуль A градуирован гомологически, то считаем, что оператор сдвига действует как $(sA)_n = A_{n-1}$, а если когомологически, то тогда $(sA)^n = A^{n+1}$.

Свободная DG алгебра Ли $F(V)$ на DG векторном пространстве V вместе с каноническим линейным вложением $V \to F(V)$ характеризуются универсальным свойством: для всякого линейного однородного отображения $f : V \to L$, где L — алгебра Ли, существует единственный морфизм алгебр Ли $\overline{f} : F(V) \to L$ такой, что композиция $V \to F(V) \to L$ равна f.

Другое описание $F(V)$ таково. Зададим на алгебре $T(V)$ коумножение $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ для $x \in V$, а на остальных элементах так, чтобы $T(V)$ стала алгеброй Хопфа. Тогда можно положить $F(V) = PT(V)$.

Для DG алгебры Ли L обозначим как $QL = L/[L, L]$ абелианизацию L. В случае, когда $L = F(V)$ свободная, QL естественно изоморфно V, таким образом, V выступает в качестве модуля всех неразложимых относительно скобки Ли элементов $F(V)$. Если L не свободная, то QL всё ещё называет также модулем неразложимых элементов L (в нашем случае даже векторным пространством), однако теперь QL не имеет канонического вложения в L. Если выбрано некоторое сечение $i : QL \to L$ канонической проекции $\pi : L \to QL$, то все элементы образа i неразложимы в обычном смысле, то есть не лежат в $[L, L]$.

Вместе с элементами, неразложимыми относительно скобки Ли, мы можем также для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ определить элементы, представимые в качестве сумм итерированных скобок Ли от n элементов. Для этого рассмотрим стандартный нижний центральный ряд L, задаваемый как $F^0(L) = L$, $F^{-1}(L) = [L, L], \ldots$, $F^{-n}(L) = [L, F^{-n+1}(L)]$.

Определение 6. Мы определим *минимальную длину* ненулевого элемента $x \in L$ как максимальное натуральное число n, для которого $x \in F^{-n+1}(L)$.

Таким образом, для любой алгебры Ли L абелианизация QL состоит полностью из элементов минимальной длины 1.

Можно определить также и *максимальную длину* элемента алгебры Ли L, однако её нельзя определить инвариантно, и она будет зависеть от выбора порождающих L. В наиболее простом случае, когда $L = F(V)$ свободна, можно дать инвариантное определение следующим образом.

Определение 7. Максимальное натуральное n, для которого образ ненулевого элемента x под действием композиции $F(V) \to T(V) \to V^{\otimes n}$ нетривиален, будем называть *максимальной длиной* $x \in L$. Здесь первое отображение есть вложение $F(V)$ в $T(V)$ как подалгебры примитивных, а второе — каноническая проекция.

Мы тут же отметим ожидаемое свойство этих двух понятий длины.

Лемма 2. *Для всякого $x \in L = F(V)$, $x \neq 0$ минимальная длина не превышает максимальную.*

Доказательство. При стандартном вложении $i : F(V) \to T(V)$ скобка Ли переходит в градуированный коммутатор, то есть,

$$i([a, b]) = a \otimes b + (-1)^{|a||b|+1} b \otimes a,$$

где $|\cdot|$ обозначает степень. Далее в доказательстве отождествим $F(V)$ с $i(F(V))$. Обозначим $T^{\geqslant n}(V) = \bigoplus_{k \geqslant n} V^{\otimes k}$. Заметим, что $F^0(L) = F(V) \subset T^{\geqslant 1}(V)$, а также если известно, что $F^{-n}(L) \subset T^{\geqslant n+1}(V)$, то $F^{-n-1}(V) = [L, F^{-n}(L)] \subset T^{\geqslant 0}(V) \otimes T^{\geqslant n+1}(V) \subset T^{\geqslant n+2}(V)$. По индукции имеем, что

$$F^{-n}(L) \subset T^{\geqslant n+1}(V).$$

Если $x \in F^{-n+1}(L)$, то $x \in T^{\geqslant n}(V)$, так что для некоторого $k \geqslant n$ образ x в $V^{\otimes k}$ ненулевой (т.к. сам $x \neq 0$). Отсюда и из определений длин немедленно следует заключение леммы. $\square$

Замечание 1. Длины были определены для ненулевых элементов алгебр Ли. Для нуля нам будет удобно использовать соглашение, что он имеет сразу все натуральные (минимальные и максимальные) длины одновременно.

Если же алгебра L представлена в виде фактор-алгебры $F(V)/I$ свободной алгебры Ли по однородному идеалу I, то максимальная длина элемента $x \in F(V)/I$ это минимум по всем максимальным длинам представителей в $F(V)$ класса x. Такое определение, конечно, существенно зависит от выбранного представления $L \cong F(V)/I$. При этом для каждого соотношения $r \in I$ длина его, конечно, равна нулю, ибо оно само обращается в ноль в $F(V)/I$. Поэтому полезно рассматривать минимальную или максимальную длину r в $F(V)$, или же если $I = \langle r, r_2, \dots, r_n \rangle$, то максимальную длину r в $F(V)/I'$, где $I' = \langle r_2, \dots, r_n \rangle$. В последнем случае длина r также зависит от выбора представления $I = \langle r, r_2, \dots, r_n \rangle$.

Определение 8. Обозначим стандартное вложение $i : F(V) \to T(V)$. Для свободной алгебры Ли $L = F(V)$ имеет место представление в виде прямой суммы $L = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^{[n]}$, где $L^{[n]} = i^{-1}(V^{\otimes n})$. Для каждого элемента $L^{[n]}$ максимальная и минимальная длины совпадают и равны n, поэтому их общее значение будем называть *длиной*.

Для DG-алгебры Ли $(F(V), d)$ рассмотрим сужение $d|_V : V \to F(V)$ на V дифференциала d. Обозначим каноническую проекцию $F(V) \to F(V)^{[n]}$ как i_n.

Определение 9. Определим n-ую компоненту $d^n : V \to F(V)^{[n]}$ дифференциала d свободной алгебры Ли $F(V)$ как композицию $i_n \circ d|_V$. Продолжение $\bar{d}^n : F(V) \to F(V)$ компоненты d^n как деривации мы тоже будем называть n-ой компонентой дифференциала, когда это не вызовет недоразумения.

Имеет место разложение $d = \sum_{n\geqslant 1} \bar{d}^n$ в виде суммы дериваций, где $\bar{d}^n$ повышает длины на $n-1$. Для несвободной алгебры Ли L такое разложение дифференциала не может быть определено инвариантно, и будет зависеть от выбора порождающих элементов.

Мы кратко обсудим, как наши определения будут записывается в явном виде при выборе базисных неразложимых элементов. Пусть в пространстве V выбран базис (v_i). Напомним, что в векторном пространстве $F(V)$ свободной алгебры Ли существует базис, в котором все элементы будут правонормированными итерированными скобками

$$[v_{j_1}, [v_{j_2}, \ldots, [v_{j_{k-1}}, v_{j_k}] \ldots]] \tag{2}$$

от векторов v_j (см., например, [21]). При этом, конечно, не все скобки вида (2) войдут в базис. Согласно предыдущему определению, вложенная скобка (2) имеет длину k.

Пусть L — DG-алгебра Ли с дифференциалом d степени -1, и $QL = L/[L, L]$ обозначает абелианизацию L. Выберем базис (x_j) в QL и расщепление $QL \to L$, так что мы можем рассматривать (x_j) как минимальный набор порождающих элементов L. Действие дифференциала на x_j в таком случае можно записать в виде конечной суммы

$$d(x_\alpha) = \sum_i \lambda_i x_i + \sum_{j,k} \lambda_{jk}[x_j, x_k] + \sum_{l,m,n} \lambda_{lmn}[x_l, [x_m, x_n]] + \ldots,$$

правая часть этого равенства представляет собой разложение по длинам вложенных скобок. Выделим линейное отображение, действующее по правилу

$$x_\alpha \mapsto \sum_{j_1,\ldots,j_k} \lambda_{j_1\ldots j_k}[x_{j_1}, \ldots, [x_{j_{k-1}}, x_{j_k}] \ldots].$$

Из определения 9 непосредственно выводится, что для случая свободной алгебры Ли это линейное отображение и есть компонента d^{k-1}.

Для алгебры Ли L рассмотрим примитивную фильтрацию на L: $F^0(L) = L$, $F^{-1}(L) = [L, L], \ldots,$ $F^{-n}(L) = [L, F^{-n+1}(L)]$. Эта фильтрация порождает спектральную последовательность алгебр Ли с $E^0(L) = F(V)$, $E^1(L) = F(HV)$, $E^1_{0,n} = HV_n$. Обозначим как $[x]_r$ класс в $E^r_{*,*}$, содержащий элемент $x \in L$ для тех x, у которые такой класс есть.

Теорема 10. *Пусть L — DG-алгебра Ли над полем, без учёта дифференциала совпадающая со свободной алгеброй Ли $F(V)$ на DG-векторном пространстве V, и $(E^r_{*,*}, d_r)$ — спектральная последовательность L, построенная по примитивной фильтрации. Пусть также L удовлетворяет следующему техническому условию: $d^i(d^j(x)) = 0$ для всякого $x \in V$ и $i < j$. Пусть для некоторого $x \in L$ определён его класс $[x]_r$ в E^r. Тогда $d_r([x]_r) = [d^{r+1}(x)]_r$, где d^{r+1} есть соответствующая компонента дифференциала на L.*

Доказательство. Обозначим как d дифференциал на L. Прежде всего произведём вычисление дифференциалов d_r в этой последовательности. Напомним определение модулей $E^r_{p,q}$, составляющие листы спектральной последовательности, ассоциированной с фильтрованным объектом L:

(3)
$$E^r_{p,q} = \frac{\{x \in F_pL_{p+q} : dx \in F_{p-r}L_{p+q-1}\}}{\{x \in F_{p-1}L_{p+q} : dx \in F_{p-r}L_{p+q-1}\} + \{x \in F_pL_{p+q} : x = dy, y \in F_{p+r-1}L_{p+q+1}\}}.$$

Для наших целей нам достаточно определить дифференциалы d_r на элементах из $E^r_{0,*}$. Образ $E^r_{0,n}$ под действием d_r лежит в $E^r_{-r,n+r-1}$ для всех целых n. Согласно определению (3), имеем

$$E^r_{0,n} = \frac{\{x \in F^0L_n : dx \in F^{-r}L_{n-1}\}}{\{x \in F^{-1}L_n : dx \in F^{-r}L_{n-1}\} + \{x \in F^0L_n : x = dy, y \in F^{r-1}L_{n+1}\}}.$$

Далее, из (3) определим $E^r_{-r,n+r-1}$:

$$E^r_{-r,n+r-1} = \frac{\{x \in F^{-r}L_{n-1} : dx \in F^{-2r}L_{n-2}\}}{\{x \in F^{-r-1}L_{n-1} : dx \in F^{-2r}L_{n-2}\} + \{x \in F^{-r}L_{n-1} : x = dy, y \in F^{-1}L_n\}}.$$

Дифференциал d_r есть отображение, индуцированное d на листе E^r. Пусть $x \in \{y \in F^0L_n : dy \in F^{-r}L_{n-1}\}$. Тогда

$$dx = x_{r+1} + x_{r+2} + x_{r+3} + \dots,$$

где x_k имеет длину k и сумма в правой части конечна. Элемент dx, конечно, лежит в множестве $\{y \in F^{-r}L_{n-1} : dy \in F^{-2r}L_{n-2}\}$. Для случая $r = 0$ утверждение теоремы, конечно, выполнено, а для $r > 0$ мы предполагаем по индукции, что утверждение теоремы справедливо для всех $0 \leqslant r' < r$, поэтому, так как элемент dx выжил до E^r, то для всякого $s \leqslant r$

$$[d^{s+1}(dx)]_s = d_s[dx]_s = [d \circ d(x)]_s = [0]_s \in E^s_{-r-s,n+r+s-2}.$$

По определению $E^s_{*,*}$ следует, что

$$d^{s+1}(dx) \in Z^{s-1}_{-r-s-1,n+r+s-1} + B^{s-1}_{-r-s,n+r+s-2}.$$

Элементы первого слагаемого правой части есть суммы элементов длин не менее $r + s + 2$. Так как $d^{s+1}(x_{r+1})$ имеет длину $r + s + 1$, то он обязан лежать во втором слагаемом, то есть $d^{s+1}(x_{r+1}) \in B^{s-1}_{-r-s,n+r+s-2}$. Однако элементы $B^{s-1}_{-r-s,n+r+s-2}$ по определению есть дифференциалы элементов из F^{-r-1}, так что $d^{s+1}(x_{r+1}) = d(y^{s+1})$. Обозначим $x' = y^1 + y^2 \dots + y^{r+1}$, x' содержит только слагаемые длин не менее $r + 2$, и $d(x') = \sum_{j \leqslant r} d^j(x_{r+1})$.

Так как

$$dx = x_{r+1} - x' + (x' + x_{r+2} + x_{r+3} + \dots),$$

является циклом, и $d^s(x_{r+1} - x') = 0$ при $s \leqslant r$, то $d(x' + x_{r+2} + x_{r+3} + \dots) \in F^{-2r}L$, поэтому его образ в E^r равен нулю, откуда

$$[dx]_r = [x_{r+1} - x' + (x' + x_{r+2} + x_{r+3} + \dots)]_r = [x_{r+1} - x']_r.$$

Из технического условия теоремы следует, что $d(x') = \sum_{j \leqslant r} d^j(x_{r+1}) = 0$. Поэтому образ x' в E^r тоже равен нулю, откуда

$$d_r([x]_r) = [dx]_r = [x_{r+1} - x']_r = [x_{r+1}]_r = [d^{r+1}(x)]_r,$$

что и требовалось. □

Замечание 2. Техническому условию теоремы удовлетворяет, например, минимальная модель Квиллена для $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$.

Теорема 11. *Пусть L — DG-алгебра Ли над полем, без учёта дифференциала совпадающая со свободной алгеброй Ли $F(V)$ на DG-векторном пространстве V. Тогда на sQL операции $\Delta_n = s^{-1} \circ d^n \circ s$, $n \geqslant 1$ задают структуру A_∞-коалгебры.*

Доказательство. Пусть d^k — k-ая компонента дифференциала d. Она продолжается до деривации $\bar{d}^k : F(V) \to F(V)$ как

$$\bar{d}^k = \bigoplus_{n\geqslant 1} \sum_{r+1+t=n} \mathrm{id}^{\otimes r} \otimes d^k \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}.$$

Тогда d есть сумма по всем k дериваций $\bar{d}^k$, повышающих длины на $k-1$. Рассмотрим отображение $d \circ d : V \to F(V)$. Мы рассматриваем второй (внутренний) d как отображение $V \to F(V)$, так что он равен $\sum_{k\geqslant 1} d^k$, а первый (внешний) d как отображение $F(V) \to F(V)$, равное $\sum_{k\geqslant 1} \bar{d}^k$. Отображение $d \circ d$, конечно, тождественно нулевое, причём в силу того, что оно рассматривается только на элементах V длины 1, равенство нулю этого отображения на V равносильно равенству нулю его компонент, повышающих длину на $n-1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$0 = (d \circ d)^n = \sum_{i+j=n+1} \bar{d}^i \circ d^j = \sum_{i+j=n+1} \left(\bigoplus_{m\geqslant 1} \sum_{r+1+t=m} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes d^i \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \right) \circ d^j =$$
$$= \bigoplus_{m\geqslant 1} \left(\sum_{i+j=n+1} \sum_{r+1+t=m} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes d^i \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \circ d^j \right)$$

Прямая сумма отображений равна нулю, когда все компоненты равны нулю, в частности, при $m = j$:

$$0 = \sum_{i+j=n+1} \sum_{r+1+t=j} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes d^i \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \circ d^j = \sum_{r+i+t=n} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes d^i \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \circ d^{r+1+t} =$$
$$= \sum_{r+i+t=n} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes (s \circ \Delta_i \circ s^{-1}) \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \circ (s \circ \Delta_{r+1+t} \circ s^{-1}) =$$
$$s \circ \left(\sum_{r+i+t=n} (-1)^{r+it} (\mathrm{id}^{\otimes r} \otimes \Delta_i \otimes \mathrm{id}^{\otimes t}) \circ \Delta_{r+1+t} \right) \circ s^{-1}.$$

Равенство нулю последнего выражения равносильно тождеству Сташеффа SI_n^*. Заметим, что степени Δ_n равны $n-2$, что и требуется для структурных отображений. □

Мы напоминаем, что минимальность DG-алгебры Ли (L, d) означает, что $d(L) \subseteq [L, L]$.

Замечание 3. Для минимальной алгебры Ли полученная A_∞-структура будет также минимальна, то есть $\Delta_1 = 0$. Для не минимальной алгебры Ли в общем случае получить A_∞-структуру на $sHQL$ (как это делалось в [2] для случая обычной коалгебры) указанным способом не удастся в силу отсутствия однозначного способа определить Δ_n на классах гомологий.

3.3. **О порождающих и соотношениях в градуированных алгебрах Ли.** Перейдём к изучению соотношений в алгебрах Ли. Пусть L — градуированная алгебра Ли над полем k, сосредоточенная в положительных степенях, т.е. $L = \bigoplus_{i \geqslant 1} L_i$. Рассмотрим задачу нахождения порождающих и соотношений в L. Порождающие это однородные элементы a_i в L такие, что если G есть свободная градуированная алгебра Ли на порождающих g_i, соответствующих a_i и имеющих те же степени, и если $\theta : G \to L$ индуцировано отображением $g_i \mapsto a_i$, то θ является сюръекцией. Множество определяющих соотношений это набор порождающих $\ker \theta$ как идеала в G. Множество порождающих *минимально*, если никакое собственное его подмножество не является множеством порождающих, аналогичное определение минимальности можно дать для множества соотношений (относительно уже выбранных порождающих).

Мы хотим связать задачу нахождения порождающих и соотношений с проблемой построения свободной резольвенты L-модуля L до степени 2

$$G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} L \longrightarrow 0$$

где G_i есть свободные L-модули, f_i есть L-линейные отображения. Мы говорим, что f_i минимален, если $\ker f_i \subset L \cdot G_i$. Между решениями представленных задачами есть взаимно-однозначное соответствие, при котором минимальные решения соответствуют друг другу.

Пусть (a_i) есть некоторое множество однородных элементов L и возьмём в качестве G свободный L-модуль на порождающих g_i в биективном соответствии с a_i и тех же степеней. Определим $f_1 : G \to L$ как $f_1(g_i) = a_i$.

Лемма 3. *Отображение f_1 сюръективно тогда и только тогда, когда (a_i) есть множество порождающих алгебры Ли L, и минимально тогда и только тогда, когда (a_i) есть минимальный набор порождающих.*

Доказательство. Первое заключение теоремы следует непосредственно из определения множества порождающих.

Пусть (a_i) минимальный набор порождающих. Есть f_1 не минимален, то в его ядре есть однородный элемент вида

$$g_i + g + \sum_j p_j g_j, \tag{4}$$

где $p_j \in L$, а элемент g лежит в k-пространстве, натянутом на все g_j, кроме g_i. Никакой g_j в сумме не может совпадать с g_i, так как в противном случае мы бы имели $\deg(p_j g_j) > \deg(g_i)$, и по той же причине каждый p_j лежит в алгебре, порождённой всеми g_j, кроме g_i. Поэтому тот факт, что (4) лежит в ядре f_1, означает, что a_i лежит в алгебре, порождённой остальными a_j, что противоречит минимальности множества (a_j).

И обратно, не минимальность (a_j) означает, что некий a_i лежит в алгебре, порождённой остальными a_j, откуда найдётся элемент ядра f_1 вида (4), выражающий собой способ разложения a_i по остальным порождающим. □

Пусть теперь зафиксирован набор порождающих (a_i), и пусть (b_{ni}) это множество однородных элементов L таких, что для каждого n

$$\sum_i b_{ni} a_i = 0, \tag{5}$$

и $\deg(b_{ni}) + \deg a_i = N_n$ не зависит от i. Положим в качестве R свободный L-модуль на элементах r_n степеней N_n. Определим $f_2 : R \to G$ как $f_2(r_n) = \sum_i b_{ni} g_i$.

Лемма 4. *Последовательность* $G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} L$ *точна тогда и только тогда, когда (5) есть набор определяющих соотношений* L, *и* f_2 *минимален тогда и только тогда, когда набор соотношений минимален.*

Доказательство. Мы имеем $f_1 f_2(r_n) = f_1 \sum_i b_{ni} g_i = \sum_i b_{ni} a_i = 0$, так что $f_1 f_2 = 0$ и $\operatorname{Im} f_2 \subseteq \ker f_1$.

Пусть (5) есть набор определяющих соотношений L. Для каждого элемента x в $\ker f_1$ справедливо $x = \sum_i x_i g_i$, где $\sum_i x_i a_i = 0$. Выберем некую запись для x_i как лиевских полиномов от a_i, и получим некоторое соотношение на a_i. Оно должно следовать из определяющих соотношений, так что имеется полиномиальное тождество

$$\sum_i x_i a_i = \sum_m p_m \left(\sum_i b_{n(m),i} a_i \right).$$

Заменим в каждом мономе последний множитель a_i на g_i, так как тождество полиномиальное (в лиевском смысле), то мы получим уравнение, верное в G.

Так как $\sum_i p_m b_{n(m),i} a_i = f_2(p_m r_{n(m)})$, то $x = f_2(\sum_m p_m r_{n(m)})$. Поэтому $\ker f_1 \subseteq \operatorname{Im} f_2$.

Обратно, пусть последовательность точна. Каждое соотношение между a_i можно записать в виде $\sum_i x_i a_i = 0$ для $x_i \in L$ или $x_i \in k$. Тогда $\sum_i x_i g_i$ содержится в $\ker f_1 = \operatorname{Im} f_2$, поэтому для некоторых p_n

$$\sum_i x_i g_i = f_2 \left(\sum_n p_n r_n \right) = \sum_{n,i} p_n b_{ni} g_i,$$

а в силу того, что G есть свободный модуль, $x_i = \sum_n p_n b_{ni}$. Это соотношение меньшей степени, чем $\sum_i x_i a_i = 0$, поэтому индукцией по степени мы можем положить, что оно следует из соотношений (5). Но тогда то же самое справедливо для $\sum_i x_i a_i = 0$.

Утверждение о минимальности доказывается, как в лемме 3. □

Так же мы получим важный результат о связи произвольных резольвент с минимальными. Мы называем L *конечно представимой*, если она имеет конечные множества порождающих и определяющих соотношений.

Предложение 3. *Пусть задана свободная резольвента* L*-модулей градуированной конечно представимой алгебры Ли* L *вплоть до степени 2*

$$R \xrightarrow{f_2} G \xrightarrow{f_1} L \longrightarrow 0$$

Тогда она изоморфна прямой сумме минимальной резольвенты L *и резольвенты нулевого* L*-модуля.*

Доказательство. Над базисом (g_i) (который занумерован числами от 1 до n) L-модуля G можно производить элементарные операции: заменить g_i на λg_i, где $\lambda \in k \backslash \{0\}$; заменить g_i на $g_i + \lambda g_j$, где $i \neq j$, $\lambda \in L$ или $\lambda \in k$. Произведение этих операций над базисом не меняет его свойства быть базисом.

С их помощью из (g_i) получим базис (g'_i) с тем свойством, что $f_1(g'_i) \neq 0$ для $i \leqslant k$ и $f_1(g'_i) = 0$ для $k < i \leqslant n$, причём k с этим свойством минимально среди всех базисов (g'_i), получаемых из (g_i). Тогда $G = G_1 \oplus G_2$, где G_1 есть модуль с базисом $(g'_i)_{i \leqslant k}$, а G_2 — модуль на оставшихся базисных элементах. Ясно, что $f_1(G_2) = 0$. Также в силу минимальности k имеем, что $\ker(f_1|_{G_1}) \subseteq L \cdot G_1$, ибо иначе базис G_1 можно было бы привести к виду, когда значение f_1 на одном из базисных элементов равнялось бы нулю.

Рассмотрим теперь R. В G зафиксируем базис, полученный на предыдущем шаге. Выбрав базис в R мощности m, отображение f_2 запишется матрицей A размера $n \times m$. Так как $\operatorname{Im} f_2 \subseteq \ker f_1$, базисные элементы $g'_{k+1}, \dots, g'_n$ можно разбить на две части: пусть $g'_{k+1}, \dots, g'_s$ лежат в $\operatorname{Im} f_2$, а остальные не лежат (с точностью до их перенумерации). В силу этого матрица A приводится к виду

$$A = \begin{pmatrix} B_{k \times (n-s+k)} & 0 \\ 0 & I_{(s-k)\times(s-k)} \\ 0 & 0_{(n-s)\times(s-k)} \end{pmatrix}$$

причём только операциями, не меняющими того факта, что значение f_1 на первых k элементах нового базиса (g''_i) ненулевые, а на остальных нулевые.

Матрицу B приведём элементарными операциями к виду $B = (B'_{k\times r}|0)$, где нулевая матрица имеет максимально возможное количество столбцов. В матрице A переставим нулевые столбцы в крайние правые позиции. Обозначим как (r_i) соответствующий такой записи A базис R. Получим, что $R = R_1 \oplus R_2$, где R_1 свободный модуль на первых r базисных элементах, R_2 на всех остальных, $f_2(R_2) \subseteq G_2$, $f_2(R_1) \subseteq G_1$, и $\ker(f_2|_{R_1}) \subseteq L \cdot R_1$. $\square$

Замечание 4. Это предложение также справедливо для локально конечно представимых алгебр Ли, у которых множества порождающих и соотношений в каждой степени конечны.

3.4. **A_∞-структуры и соотношения в рациональных гомотопических алгебрах Ли.** Для нас наибольший интерес результаты настоящего раздела представляют в топологическом контексте. Предположим, что X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа, и L_X — его минимальная модель Квиллена. В таком случае, как известно, L_X свободна как алгебра Ли и имеет разложимый дифференциал (т.е. она действительно минимальна как DGL), а также существует изоморфизм коалгебр $sQL_X \cong \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ (это можно доказать, исходя из рассмотрения спектральной последовательности для $\mathcal{C}(L_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]), причём стандартное коумножение на гомологиях совпадает с коумножением, построенным методом теоремы 11. Индуцируем посредством этого строгого изоморфизма A_∞-коалгебраическую структуру на $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$, то есть дополним коумножение в когомологиях до A_∞-структуры, пользуясь теоремой 11.

Напомним, что компонента длины k элемента x свободной алгебры Ли $F(V)$ это образ x под действием канонической проекции $F(V) \to F(V)^{[k]}$. Элемент x есть сумма всех своих компонент.

Итак, мы можем доказать следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ существует структура минимальной A_∞-коалгебры $\Delta = (\Delta_2, \Delta_3, \dots)$, где Δ_2 есть стандартное гомологическое коумножение, или двойственным образом структуру A_∞-алгебры на*

$\tilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$, причём Δ_n соответствует n-ой компоненте в разложении дифференциала L_X в смысле теоремы 11.

Более того, справедливо следующее.

(1) *Нетривиальность операции Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ влечёт наличие соотношения степени $l-2$ в представлении алгебры Ли $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q} \cong ZL_X/BL_X$, в котором имеются слагаемые длины k. Здесь ZL_X, BL_X есть соответственно циклы и границы в минимальной модели Квиллена L_X.*

(2) *Наоборот, пусть операция Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ равна тождественно нулю. Для любого соотношения r степени $l-2$ в BL_X пусть I — идеал в L_X, порожденный всеми соотношениями с максимальными длинами меньше, чем у r. Для всякого такого r существует соотношение $r' \in I$ степени $l-2$ такое, что компонента длины k элемента $r-r'$ равна нулю.*

(3) *Если Δ_k на $\tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$ равна тождественно нулю и (G,R) — минимальное представление алгебры Ли $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$. Тогда для всякого определяющего соотношения $r \in R$ степени $l-2$ справедливо заключение пункта (2).*

Все длины в формулировке измеряются как у элементов свободной алгебры Ли L_X.

Доказательство. Существование структуры Δ следует из теоремы 11 и из изоморфизма $sQL_X \cong \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$.

Покажем утверждение (1). Запишем $L_X = F(V)$ для некого DG-векторного пространства V. Так как Δ_k нетривиальна на $(sQL_X)_l \cong \tilde{H}_l(X;\mathbb{Q})$, существует $x \in L_{l-1}$ такой, что $d^k(x) \neq 0$. Поэтому dx содержит компоненту длины k, имеет степень $l-2$ и является соотношением, будучи дифференциалом.

Перейдём к утверждению (2). Пусть $r \in BL_X$ есть соотношение степени $l-2$ с ненулевой компонентой длины k (мы так считаем, так как иначе можно было бы положить $r' = 0$). Тогда в силу того, что $r \in BL_X$, запишем $r = d(x+y)$, где x неразложимый, а y разложим, то есть, $y \in [L_X, L_X]$ (x или y могут быть нулевыми). В силу равенства нулю операции Δ_k, мы имеем, что $d(x)$ имеет нулевую компоненту длины k. Поэтому компонента длины k элемента $d(y) = r - r'$, равна нулю. Но можно записать $y = \sum_{y',y''}[y', y'']$, где y', y'' имеют максимальные длины меньше, чем y, а, значит, и чем r. Поэтому $r' = d(y) = \sum_{y',y''}([y', d(y'')] \pm [d(y'), y'']) \in I$, что и требовалось.

Наконец, пункт (3) следует из пункта (2) и того факта, что, согласно предложению 3, всякое минимальное представление вкладывается в любое другое в том смысле, что имеются вложения свободных алгебр Ли $F(R) \subseteq BL_X$, и $F(G) \subseteq ZL_X$, так что всякое определяющее соотношение можно считать элементом BL_X.

□

Ранее в этой работе нами было произведено вычисление соотношений в алгебрах Понтрягина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, соответствующим флагизациям всех восьми графов, найдены все соотношения в степенях не более шесть (среди которых есть и кубические, что подтверждало неформальность пространств), однако вопрос об отсутствии других соотношений оставался открытым. При помощи результатов, описанных в этом разделе, этот вопрос можно разрешить (и доказать тем самым теорему 9) следующим образом.

Доказательство теоремы 9. Мы прежде всего напомним о стандартном построении минимальной модели Квиллена для $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$. Порождающие a_σ этой модели находятся во взаимно-однозначном соответствии с клетками CW-структуры пространства, так что индексы представляют собой всевозможные непустые мультимножества

$$\sigma = \{\underbrace{1,\dots,1}_{k_1},\underbrace{2,\dots,2}_{k_2},\dots,\underbrace{m,\dots,m}_{k_m}\},$$

такие, что их суппорты $\operatorname{supp}\sigma = \{i \in [m] : k_i \neq 0\}$ являются симплексами $\mathcal{K}$. Степень $|a_\sigma|$ элемента a_σ на единицу меньше размерности соответствующей клетки, то есть $|a_\sigma| = 2(k_1 + \dots + k_m) - 1$.

Построим теперь модель для $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Пусть $L_{(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}}$ — минимальная модель Квиллена $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$, и $L_m = \bigoplus_{i=1}^m L_{\mathbb{C}P^\infty}$ — модель $(\mathbb{C}P^\infty)^m$ (не минимальная), являющаяся прямой суммой m копий минимальной модели для $\mathbb{C}P^\infty$. Пусть $p : L_{(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}} \to L_m$ — рациональный представитель стандартного клеточного вложения $(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$. Тогда, в силу того, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ есть гомотопический слой этого вложения (теорема 4), то тогда, согласно результату [14, предложение 24.8], ядро p есть DG-алгебра Ли, являющаяся лиевой моделью для $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Итак, ранее нами были вычислены соотношения степеней не более шесть. Из формулы Хохстера для подсчёта когомологий [18], применённой к результату Бухштабера—Панова [10, Теорема 4.5.4] следует, что для всех восьми $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ ненулевые приведённые рациональные когомологии могут быть ненулевыми только в степенях $3 \leqslant k \leqslant 8$, поэтому для всякой A_∞-структуры на $\widetilde{H}^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$ по причинам градуировки справедливо $m_i = 0$, $i \geqslant 4$, а m_3 может быть нетривиально только на тройке классов из $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{Q})$.

Пусть r — определяющее соотношение степени не менее семь во всяком минимальном представлении любого из восьми комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}$. Тогда, согласно предложению 3, r можно считать элементом $BL_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}$. Поэтому r есть дифференциал от какого-то элемента. Зафиксируем $k \geqslant 3$. Запишем $r = d(x+y)$, где x неразложим в $L_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}$, а y наоборот разложим (они могут быть нулевыми). Из рассуждения выше следует, что никакой элемент в $L_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}$ степени не менее семь не лежит в образе m_i, $i \geqslant 3$. Поэтому компонента длины k элемента $d(x)$ равна нулю. Теперь, отметим, что r выражается через канонические порождающие теоремы 8, поэтому r есть сумма скобок от только a_i. Поэтому y (и x тоже) есть сумма итерированных скобок от a_i и не более одного a_σ, где $|\sigma| > 1$. Так как y разложим, то $y = \sum_{y',y''}[y',y'']$, и хотя бы один из y', y'' есть цикл модели $L_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}$ (тот, который не содержит в себе a_σ с $|\sigma|>1$). Поэтому $d(y) \in [ZL_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}, BL_{\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_i}}]$, иными словами, соотношение $d(y)$ является следствием (лежит в идеале, порождённом) соотношениями меньших степеней, которые можно считать определяющими. Поэтому $r - d(y)$ имеет нулевую компоненту длины k, то есть по модулю определяющих соотношений меньших степеней r можно привести к виду, в котором нет компонент длин $k \geqslant 3$. Компонент длины 2 в r не может быть, так как все соотношения с квадратичными слагаемыми нами были явно посчитаны и имеют степени не более шесть.

Таким образом, полностью завершено вычисление алгебр Понтрягина этих пространств, и указанное нами описание алгебр действительно было полным. $\square$

3.5. **Связь L_∞-структур, компонент дифференциала DG-коалгебры и дифференциалов спектральной последовательности.** Схожие результаты можно также получить в контексте минимальных коалгебраических моделей пространства и соотношений в гомологиях. Для связного пространства X существует минимальная алгебра M_X над $\mathbb{Q}$ и квазиизоморфизм $M_X \to A_{PL}X$, где $A_{PL}X$ — PL формы де Рама на X. Если X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа, то M_X имеет конечный тип, и определена минимальная коалгебраическая модель C_X как двойственная коалгебра к M_X.

Для случая коалгебр мы можем определить все те же понятия, что и для алгебр Ли, такие, как минимальные и максимальные длины. Мы не будем повторять здесь в полной мере все определения, относя читателя к разделу с предварительными сведениями, где даны определения свободной коалгебры $S(V)$ и длин элементов в ней.

Здесь мы отметим только, что в случае свободной симметрической коалгебры $S(V)$ всякий дифференциал d на ней также допускает разложение $\mathrm{pr}_V \circ d$ в сумму кодериваций $\bar{d}^i$, где компонента с номером i понижает степени всех элементов на $i-1$. Также мы под компонентами будем понимать отображения $d^i : S(V) \to V$, равные $\mathrm{pr}_V \circ d$ на элементах $S^i(V)$ и нулю на всех прочих. Здесь pr_V есть каноническая проекция $S(V) \to V$.

Определим также *примитивную фильтрацию* на C, определяемую индуктивно следующим образом:

(1) $F_n(C) = 0$, $n < 0$;
(2) $F_0(C) = k$;
(3) $F_{n+1}(C) = \mathrm{Im}(i_n \oplus (\vee \circ (i_{PC} \otimes i_n)) : F_n(C) \oplus (PC \otimes F_n(C)) \to C)$, где i_{PC} — вложение $PC \subseteq C$, i_n — вложение $F_n(C) \subseteq C$, $\vee$ — симметрическое умножение, определённое на $S(V)$.

Иными словами, элементы $F_n(C)$ — это элементы C, представимые в виде суммы произведений не более n примитивных элементов. Она порождает спектральную последовательность коалгебр с $E^0(C) = S(V)$, $E^1(C) = S(HV) = S(HPC)$, $E^1_{1,n} = H_{n+1}PC$.

Нам понадобится техническая лемма.

Лемма 5. *Пусть дан цикл $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_l$ в DG-коалгебре C, без учёта дифференциала являющейся свободной коалгеброй $S(V)$, причём каждый x_k имеет длину k для всех индексов k (x_k может быть равен нулю). Пусть n — минимальное натуральное число такое, что $d^n(x) \neq 0$. Тогда $d^i(x_l) = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. Зафиксируем $1 \leqslant i \leqslant n$, и пусть $d^i(x_l) \neq 0$. Тогда $d^i(x_l)$ это ненулевой элемент длины $l - i + 1$. Так как $d(x) = 0$, то $d(x_0 + \cdots + x_{l-1})$ должен иметь ненулевую компоненту длины $l - i + 1$. Учитывая тот факт, что $x_0 + \cdots + x_{l-1}$ содержит только слагаемые длины меньше l, мы заключаем, что должно найтись $j \leqslant i - 1$, для которого $d^j(x_0 + \cdots + x_{l-1}) \neq 0$. Так как $j < i \leqslant n$, то $d^j(x) = 0$ в силу предположения минимальности n. Но тогда $d^j(x_0 + \cdots + x_{l-1}) \neq 0$ может быть выполнено только когда $d^j(x_l) \neq 0$.

Мы показали, что из $d^i(x_l) \neq 0$ следует $d^j(x_l) \neq 0$ для некоторого $j < i$. Применив это же свойство к d^j, и так далее, мы получим неограниченно убывающую последовательность чисел $\{i_m\}$ такую, что $d^{i_m}(x_l) \neq 0$, что невозможно. Значит, $d^i(x_l) = 0$. □

В нашем новом контексте коалгебр аналогом теоремы 10 служит следующее утверждение.

Теорема 12. *Пусть C — DG-коалгебра над полем, без учёта дифференциала совпадающая с симметрической коалгеброй $S(V)$ на DG-векторном пространстве V, и $(E^r_{*,*}, d_r)$ — спектральная последовательность L, построенная по примитивной фильтрации. Пусть для $x \in C$ определён его класс $[x]_r$ в E^r. Тогда $d([x]_r) = [d^{r+1}(x)]_r$, где d^{r+1} есть соответствующая компонента дифференциала на C.*

Доказательство. Обозначим как d дифференциал на C. Как и в теореме 10, мы вычислим сначала дифференциалы d_r спектральной последовательности. В данном случае фильтрация возрастающая, так что

$$E^r_{p,q} = \frac{\{x \in F_pC_{p+q} : dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\}}{\{x \in F_{p-1}C_{p+q} : dx \in F_{p-r}C_{p+q-1}\} + \{x \in F_pC_{p+q} : x = dy, y \in F_{p+r-1}C_{p+q+1}\}}.$$

Вычислим $E^r_{1,n+r-1}$ и $E^r_{r+1,n}$ для всех $r \geqslant 1, n \geqslant 0$. Из определения $E^r_{p,q}$ следует, что

$$E^r_{1,n+r-1} = \frac{\{x \in F_1C_{n+r} : dx \in F_{1-r}C_{n+r-1}\}}{\{x \in F_0C_{n+r} : dx \in F_{1-r}C_{n+r-1}\} + \{x \in F_1C_{n+r} : x = dy, y \in F_rC_{n+r+1}\}},$$

а также

$$E^r_{r+1,n} = \frac{\{x \in F_{r+1}C_{n+r+1} : dx \in F_1C_{n+r}\}}{\{x \in F_rC_{n+r+1} : dx \in F_1C_{n+r}\} + \{x \in F_{r+1}C_{n+r+1} : x = dy, y \in F_{2r}C_{n+r+2}\}}.$$

Дифференциал спектральной последовательности отображает $E^r_{r+1,n}$ в $E^r_{1,n+r-1}$. Он индуцирован на листе E^r дифференциалом d на C. Пусть x лежит в множестве $\{x \in F_{r+1}C_{n+r+1} : dx \in F_1C_{n+r}\}$, тогда $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_{r+1}$, где x_i имеет длину i. Имеем

$$dx = d(x_0 + x_1 + \cdots + x_{r+1}) = y_0 + y_1,$$

где длина y_j равна j. Так как dx выжил до E^r, то для всякого $s \leqslant r-1$

$$[d^{s+1}(dx)]_s = d_s[dx]_s = [d \circ d(x)]_s = [0]_s \in E^s_{1-s,n+r+s-2}.$$

Поэтому

$$d^{s+1}(dx) \in Z^{s-1}_{-s,n+r+s-1} + B^{s-1}_{1-s,n+r+s-2}.$$

Первое слагаемое равно нулю, как видно из его определения и сосредоточенности фильтрации на неотрицательных целых числах. Второе также по определению равно нулю. Так что $d^{s+1}(dx) = 0$ для $s \leqslant r-1$. Если k это минимальное число такое, что $d^k(dx) = 0$ (или бесконечность), то, как показывает наше рассуждение, $k \geqslant r+1$. По лемме 5, мы получим, что $d^{r+1}(x_{r+1}) = 0$, поэтому $x_0 + \cdots + x_r$ лежит в $\{y \in F_{r+1}C_{n-1} : dy \in F_{2r}C_{n-2}\}$, так что его образ в E^r равен нулю. Получим

$$d_r([x]_r) = [dx]_r = [x_0 + x_1 + \cdots + x_{r+1}]_r = [x_{r+1}]_r = [d^{r+1}(x)]_r,$$

что и требовалось.

□

Теорема 13. *Пусть C — DG-коалгебра над полем, без учёта дифференциала совпадающая со свободной коалгеброй $S(V)$ на DG-векторном пространстве V. Тогда на $s^{-1}PC$ операции $\ell_n = s^{-1} \circ \bar{\ell}_n \circ s$, $n \geqslant 1$, где*

$$\bar{\ell}_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = d^n \left(\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)} \right)$$

задают структуру L_∞-алгебры.

Здесь $\varepsilon(\sigma)$ есть знак Кошуля, а всё выражение в скобках правой части есть просто запись симметрического монома $x_1 \vee \cdots \vee x_n$ в тензорной алгебре.

Доказательство. Если d^k — k-ая компонента дифференциала d. Она продолжается до кодеривации $\bar{d}^k : S(V) \to S(V)$ как

$$\bar{d}^k(x_1 \vee \cdots \vee x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i, n-i)} \varepsilon(\sigma) d^k(x_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee x_{\sigma(i)}) \vee x_{\sigma(i+1)} \vee \cdots \vee x_{\sigma(n)}.$$

Тогда d есть сумма по всем k кодериваций $\bar{d}^k$, понижающих длины на $k-1$. Рассмотрим отображение $d \circ d : V \to F(V)$. Мы рассматриваем первый (внешний) d как отображение $S(V) \to V$, так что он равен $\sum_{k \geqslant 1} d^k$, а второй (внутренний) d как отображение $S(V) \to S(V)$, равное $\sum_{k \geqslant 1} \bar{d}^k$. Отображение $d \circ d$, конечно, тождественно нулевое, причём в силу того, что в его образе могут быть только на элементы V длины 1, равенство нулю этого отображения равносильно равенству нулю его компонент, повышающих длину на $n-1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому

$$0 = (d \circ d)^n (x_1 \vee \cdots \vee x_n) = \sum_{i+j=n+1} d^i \circ \bar{d}^j (x_1 \vee \cdots \vee x_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sh}(i, n-i)} \varepsilon(\sigma) d^i (d^k(x_{\sigma(1)} \vee \cdots \vee x_{\sigma(i)}) \vee x_{\sigma(i+1)} \vee \cdots \vee x_{\sigma(n)}).$$

Степени отображений $\bar{\ell}_n$ равны степени d, то есть -1. По предложению 2 мы сразу можем заключить, что ℓ_n задают структуру L_∞-алгебры. □

3.6. **О порождающих и соотношениях в градуированных ассоциативных алгебрах.** Здесь мы очень кратко изложим теорию раздела 3.3 для обычных ассоциативных алгебр. Так как многие результаты и доказательства аналогичны с лиевым случаем, мы их будем опускать.

Пусть A - градуированная алгебра над полем $\mathbf{k}$, являющаяся также связной, то есть, $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$, $A_0 = \mathbf{k}$. Для такой алгебры определена аугментация $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$, задаваемая стандартной проекцией на A_0.

Определения минимальности этих множеств аналогичны таковым в случае алгебр Ли.

Как и в разделе 3.3, мы связываем задачу поиска порождающих и соотношений с проблемой построения свободной резольвенты тривиального A-модуля $\mathbf{k}$ до степени 2

$$G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

где G_i свободные A-модули, f_i есть A-линейные отображения. Мы говорим, что f_i минимален, если $\ker f_i \subseteq \overline{A} \cdot G_i$, где $\overline{A} = \ker \varepsilon$.

Пусть (a_i) есть некоторое множество однородных элементов A и возьмём в качестве G свободный A-модуль на порождающих g_i в биективном соответствии с a_i и тех же степеней. Определим $f_1 : G \to A$ как $f_1(g_i) = a_i$.

Мы кратко изложим результаты, аналогичные таковым для алгебр Ли.

Лемма 6. *Отображение f_1 сюръективно тогда и только тогда, когда (a_i) есть множество порождающих алгебры A, и минимально тогда и только тогда, когда (a_i) есть минимальный набор порождающих.*

Лемма 7. *Последовательность $G_2 \xrightarrow{f_2} G_1 \xrightarrow{f_1} A$ точна тогда и только тогда, когда (a_i) есть набор определяющих соотношений A, и f_2 минимален тогда и только тогда, когда набор соотношений минимален.*

Доказательства этих лемм изложены в [24] и схожи с таковыми в случае алгебр Ли.

Алгебра A *конечно представима*, если множество её порождающих и соотношений конечно.

Предложение 4. *Пусть задана свободная резольвента A-модулей градуированной конечно представимой алгебры A вплоть до степени 2*

$$R \xrightarrow{f_2} G \xrightarrow{f_1} A \longrightarrow \mathbf{k} \longrightarrow 0$$

Тогда она изоморфна прямой сумме минимальной резольвенты A и резольвенты нулевого A-модуля.

Доказательство производится по аргументу, аналогичному таковому в предложении 3. Как и в случае алгебр Ли, это предложение останется в силе для локально конечно представимых алгебр.

3.7. **L_∞-структуры и соотношения в рациональных сингулярных гомологиях.** Пусть C_X — минимальная коалгебраическая модель односвязного пространства с рациональными гомологиями конечного типа. Известный результат говорит, что имеется изоморфизм алгебр Ли $s^{-1}PC_X \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ (это доказывается рассмотрением спектральной последовательности для $\mathcal{L}(C_X)$, фильтрованного по второй компоненте бистепени, см. [2]). Минимальная алгебраическая модель M_X двойственна к C_X. Так же, как и в случае с теоремой 13 аналог следствия 3 для L_∞-структуры.

Следствие 4. *Пусть X — односвязное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Тогда на $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ существует структура минимальной L_∞-алгебры $\ell = (\ell_2, \ell_3, \dots)$, где ℓ_2 соответствует произведению Самельсона. Отображения ℓ_n связаны с компонентами d^n разложения дифференциала на C_X, как в теореме 12.*

Более того, справедливо следующее.

(1) *Нетривиальность операции ℓ_k на $\pi_l(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ влечёт наличие соотношения степени l в представлении алгебры $\tilde{H}^*(X; \mathbb{Q}) \cong ZM_X/BM_X$, в котором имеются слагаемые длины k. Здесь ZM_X, BM_X есть соответственно циклы и границы в минимальной алгебраической модели M_X.*

(2) *Наоборот, пусть операция ℓ_k на $\pi_l(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ равна тождественно нулю. Для любого соотношения r степени l в BM_X пусть I — идеал в M_X, порожденный всеми соотношениями с максимальными длинами*

меньше, чем у r. Для всякого такого r существует соотношение $r' \in I$ степени l такое, что компонента длины k элемента $r - r'$ равна нулю.

(3) *Если ℓ_k на $\pi_l(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ равна тождественно нулю и (G,R) — минимальное представление алгебры $\widetilde{H}^*(X;\mathbb{Q})$. Тогда для всякого определяющего соотношения $r \in R$ степени l справедливо заключение пункта (2).*

Все длины в формулировке измеряются как у элементов свободной алгебры M_X.

Доказательство производится аналогично следствию 3, но с использованием теоремы 13 и предложения 4.

Замечание 5. Результаты этой работы можно также распространить на неодносвязный случай. Пусть X — нильпотентное пространство с рациональными гомологиями конечного типа. Для такого X существует модель C_X, однако нет гарантии существования модели Квиллена L_X. В таком случае PC_X изоморфна

$$\mathfrak{l}(\pi_1(X)\otimes\mathbb{Q}) \oplus \bigoplus_{i\geqslant 2}(\pi_i(X)\otimes\mathbb{Q})\,, \tag{6}$$

где $\mathfrak{l}(\pi_1(X)\otimes\mathbb{Q})$ — алгебра Ли пополнения Мальцева ([4, Приложение A3]). В случае существования L_X это совпадает с sHL_X. Теоремы 11 и 13 дают A_∞-структуру на $\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Q})$ (когда существует L_X) и L_∞-структуру на (6) соответственно.

Список литературы

[1] J. Neisendorfer, T. Miller. *Formal and coformal spaces.* Illinois Journal of Mathematics, vol. 22, no. 4. (1978), 565–580.

[2] J. Neisendorfer. *Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory of nilpotent spaces.* Pacific Journal of Mathematics, vol. 74, no. 2 (1978), 429–460.

[3] B. Reinhold. *L_∞-algebras and their cohomology.* Emergent Scientist, vol. 3, no. 4 (2019).

[4] D. Quillen. *Rational homotopy theory.* Annals of Mathematics, Second Series, vol. 90, no. 2 (1969), 205–295.

[5] V. A. Lunts. *On formality of DG algebras (after Kaledin).* arXiv:0712.0996.

[6] И. В. Баскаков. *Когомологии K-степеней пространств и комбинаторика симплициальных подразбиений.* Успехи мат. наук, т. 57 (2002), № 5, 147–148.

[7] И. В. Баскаков. *Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов.* Успехи мат. наук, т. 58 (2003), № 5, 199–200.

[8] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Алгебраическая топология многообразий, задаваемых простыми многогранниками.* Успехи мат. наук, т. 53, № 3 (1998), 195–196.

[9] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. *Действия торов и комбинаторика многогранников.* Труды мат. инст. Стеклова, т. 225 (1999), 96–131.

[10] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., vol. 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[11] M. Davis and T. Januszkiewicz. *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions.* Duke Math. J., vol. 62 (1991), 417–451.

[12] T. Panov and N. Ray. *Categorical aspects of toric topology.* In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI (2008), 293–322.

[13] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663–6682.

[14] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas. *Rational homotopy theory.* Graduate Texts in Mathematics, no. 205 (2001).

[15] G. Denham, A. I. Suciu. *Moment-angle complexes, monomial ideals and Massey products.* Pure and Applied Mathematics Quarterly, vol. 3, no. 1 (2007), 25–60.

[16] B. Keller. *Introduction to A-infinity algebras and modules.* arXiv:math/9910179

[17] J. Grbić, A. Linton. *Lowest-degree triple Massey products in moment-angle complexes.* arXiv:1908.02222v2

[18] Melvin Hochster. *Cohen–Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes.* Ring Theory II (Proc. Second Oklahoma Conference). Dekker, New York (1977), 171–223.

[19] F. Belchi, U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *Higher order Whitehead products and L-infinity structures on the homology of a DGL.* Linear Algebra and Its Applications, vol. 520 (2017), 16–31.

[20] U. Buijs, J. M. Moreno-Fernández, A. Murillo. *A_∞-structures and Massey products.* arXiv:1801.03408

[21] E. S. Chibrikov. *A right normed basis for free Lie algebras and Lyndon—Shirshov words.* Journal of Algebra, vol. 302, no. 2 (2006), 593–612.

[22] C. Allday. *Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen, II.* Houston Journal of Mathematics, vol. 3, no. 3 (1977), 301–308.

[23] V. S. Retakh. *Lie-Massey brackets and n-homotopically multiplicative maps of differential graded Lie algebras.* Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 89 (1993), 217–229.

[24] C. T. C. Wall. *Generators and relations for the Steenrod algebra.* Annals of Mathematics, vol. 72, no. 3 (1960), 429–444.

[25] J. F. Adams, P. J. Hilton. *On the chain algebra of a loop space.* Comm. Math. Helv., 1956.

[26] SuperLie, a Mathematica package for calculations in Lie algebras and superalgebras. Available at `http://www.equaonline.com/math/SuperLie/`.

[27] Т. В. Кадеишвили. *Алгебраическая структура на гомологиях A_∞-алгебры.* Сообщ. Акад. наук Груз. ССР., т. 108, 249–252.

[28] Я. А. Верёвкин. *Гомотопический тип и гомологии пространств петель некоторых момент-угол комплексов.* Препринт (2014). Доступен на `http://higeom.math.msu.su/course_papers/ver5.pdf`