МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа
на тему

“Топология момент-угол многообразия пятиугольника”

Студент 1 курса магистратуры: Хрулёв Руслан Александрович

Научный руководитель: профессор Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2021

1. Предварительные сведения.

1. Момент-угол многобразия $\mathscr{Z}_P$.

Пусть многогранник P задан системой неравенств в $\mathbb{R}^n$:

$$(x, a_i) + b_i \geq 0, \quad x, a_i \in \mathbb{R}^n, i = 1 \dots m.$$

Пусть A_P — матрица размера $m \times n$, строками которой являются вектора a_i, и b_P — вектор-столбец, состоящий из b_i. Тогда P можно отождествить с пересечением положительного ортанта $\mathbb{R}^m_{\geq}$ и образа вложения

$$i_{A,b} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad i_{A,b}(x) = A_P(x) + b_P.$$

Определение 1.1. *Момент-угол многобразием* $\mathscr{Z}_P$, соответствующим многограннику P, называется топологическое пространство, определяемое из коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Z}_p \arrow[r, "i_z"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\mu"] \\
P \arrow[r, "i_{A,b}"'] & \mathbb{R}^m_{\geq}
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

где $\mu : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^m_{\geq}$ — отображение такое, что $\mu(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$.

То есть, на самом деле $\mathscr{Z}_p$ — это прообраз многогранника P при проекции $\mathbb{C}^m$ на пространство орбит покоординатного действия $m-$мерного тора. Таким образом на $\mathscr{Z}_p$ есть естественное действие тора, пространство орбит которого отождествляется с многогранником P.

Для того, чтобы перейти от параметрического задания момент-угол многообразия к заданию уравнениями, определим следующий объект:

Определение 1.2. Матрица Γ размерности $(m-n) \times m$ максимального ранга называется матрицей *преобразования Гейла* набора $a_1, \dots, a_m$, если

$$\Gamma A^t = 0.$$

Пусть $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ — матрица преобразования Гейла. Обозначим $y = A^t x + b$. Тогда

$$\Gamma y = \Gamma(A^t x + b) = \Gamma b.$$

Из коммутативной диаграммы видим, что:

$$i_{A,b}(\mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \Gamma y = \Gamma b\}$$

Тогда получаем, что

$$i_z(\mathscr{Z}_P) = \{z \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk} |z_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{jk} b_k, \ j = 1, \dots, m-n\}. \tag{1.2}$$

Другими словами, момент-угол многобразие $\mathscr{Z}_P$ задаётся системой уравнений (1.2). Попытаемся привести нашу систему уравнений к более удобному виду. Заметим также, что матрица Γ показывает, каким линейным зависимостям удовлетворяют столбцы матрицы A. Можно так переименовать a_i, что они будут удовлетворять соотношению $\sum_{i=1}^{m} a_i = 0$.

Это соотношение мы и возьмём в качестве последней строки матрицы Г. Тогда уравнения будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{1k}|z_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{1k}b_k \\ \dots \\ \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{(m-n-1)k}|z_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{m} \gamma_{(m-n-1)k}b_k \\ \sum\limits_{i=1}^{m}|z_i|^2 = s \end{cases}$$

Можно считать, что $s > 0$, так как иначе множество, задаваемое системой, будет точкой или пустым множеством. Тогда, вычитая последнее уравнение, можно добиться того, что свободные коэффициенты уйдут. Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} C_i|z_i|^2 = 0, \qquad C_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}|z_i|^2 = 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

2. Вещественный аналог момент-угол многообразий.

Определение 2.1. *Вещественным момент-угол многообразием* $\mathscr{R}_P$, соответствующим многограннику P, называется многообразие, определяемое из следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{R}_p \arrow[r, "i_R"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mu"] \\ P \arrow[r, "i_{A,b}"'] & \mathbb{R}^m_{\geq} \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

где $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m_{\geq}$ — отображение, такое что $\mu(x_1, \dots, x_m) = (|x_1|^2, \dots, |x_m|^2)$.

Аналогичными рассуждениями можно получить, что вещественное момент-угол многообразие $\mathscr{R}_P$ задаётся системой в $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} C_i x_i^2 = 0, \qquad C_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 = 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Рассмотрим связь вещественных и комплексных момент-угол многообразий. Пусть комплексное момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_P$ задано системой (1.3) в $\mathbb{C}^m$. Отождествим $\mathbb{C}^m$ с $\mathbb{R}^{2m}$, то есть зафиксируем в качестве координат действительную и мнимую части $z_j = x_j + iy_j$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} C_i(x_i^2 + y_i^2) = 0, \qquad C_i \in \mathbb{R}^{m-n-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{m}(x_i^2 + y_i^2) = 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Заметим, что эта система имеет вид системы вещественного момент-угол многообразия (1.5). То есть мы получили, что любое многообразие $\mathscr{Z}_P$ является также и вещественным момент-угол многообразием.

2. Момент-угол многообразие пятиугольника.

1. Задание момент-угол многообразия системой эрмитовых квадрик

Пусть $n = 2$. Рассмотрим пятиугольник $P \subset \mathbb{R}^2$, который задаётся следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ -x_1 + 2 \geq 0 \\ -x_2 + 2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 + 3 \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Целями данной курсовой работы являются:

1. Задать соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ системой эрмитовых квадрик.
2. Доказать, что соответствующее момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфно
$$\#_{i=1}^{5}(S^3 \times S^4),$$
где $\#$ — связная сумма.

Для нашего пятиугольника P матрица A и столбец b имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования Гейла имеет вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, пользуясь (1.2), имеем, что момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ задаётся следующими тремя уравнениями:

$$\begin{cases} |z_1|^2 + |z_3|^2 = 2 \\ |z_2|^2 + |z_5|^2 = 3 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_4|^2 = 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

Таким образом, первая нами поставленная цель выполнена.

Приведём получившуюся систему (2.2) к удобному виду (1.3). Если вместо a_1 и a_2 взять $2a_1$ и $2a_2$ соответственно, то матрица преобразования Гейла и система уравнений будут иметь вид:

$$\Gamma^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} |z_1|^2 + 2|z_3|^2 = 4 \\ |z_2|^2 + 2|z_5|^2 = 4 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 7 \end{cases}$$

Вычитая из первых двух уравнений третье и переименовывая z_i, получаем:

$$\begin{cases} 3|z_1|^2 - 4|z_2|^2 + 10|z_3|^2 - 4|z_4|^2 - 4|z_5|^2 = 0 \\ -4|z_1|^2 + 3|z_2|^2 - 4|z_3|^2 - 4|z_4|^2 + 10|z_5|^2 = 0 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2 + |z_5|^2 = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

2. Топология пересечения двух квадрик с единичной сферой в $\mathbb{R}^n$

Пусть в $\mathbb{R}^n$ заданы две квадрики:

$$\begin{matrix} a_1x_1^2 + \ldots + a_nx_n^2 = 0 \\ b_1x_1^2 + \ldots + b_nx_n^2 = 0 \end{matrix} \tag{2.4}$$

Обозначим множество M как пересечение (2.4) с единичной сферой. Тогда M определяется *конфигурацией* точек $A_i = (a_i, b_i)$. Причём мы будем рассматривать M такое, что никакая выпуклая оболочка пары A_i не содержала 0. При таком условии M является гладким многообразием размерности $n-3$. Разобьём n на нечётное количество натуральных чисел:

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

Сопоставим такому разбиению *каноническую конфигурацию* следующим образом: рассмотрим правильный $k-$угольник с центром в точке 0, и конфигурация будет содержать вершины этого многоугольника с точностью до количества точек n_i в вершине. Покажем, что любая конфигурация S может быть деформирована в единственную каноническую.

Определение 2.1**.** Будем говорить, что элементы конфигурации S эквивалентны $A \sim B$, если ни для какого элемента C из S выпуклая оболочка A, B, C не содержит 0.

Грубо говоря, это значит, что A можно деформировать в B, оставляя остальные точки конфигурации на месте и не нарушая условия, что никакая выпуклая оболочка пары точек не содержит 0. То есть теперь мы имеем отношение эквивалентности, в которой каждый класс может быть деформирован в точку с учётом их количества. Выпуклую оболочку точек будем обозначать $Conv$.

Лемма 2.1**.** Пусть $A_1, \ldots, A_k$ — точки, лежащие на единичной окружности, и каждая в своём классе. Тогда $k = 2l + 1$. Если $k > 1$ и A_i, A_{i+1} две соседние точки, тогда существует единственная точка A_j, где $j = i + l + 1 (mod\, k)$, такая что $0 \in Conv\{A_i, A_{i+1}, A_j\}$.

Доказательство. Рассмотрим точки A_k и A_1. Так как все точки соответствуют разным классам, то существует точка A_{l+1}, такая что $0 \in Conv\{A_k, A_1, A_{l+1}\}$. Для $i = 1, \ldots, l$ существует по крайней мере одно значение $s(i)$, такое что $0 \in Conv\{A_i, A_{i+1}, A_{s(i)}\}$, причём $s(i)$ должны быть разным для разных i, и $s(i)$ находятся в интервале $[l + 2, k]$. Отсюда следует, что $l \leq k - l - 1$. Аналогичными рассуждениями для $i = l + 1, \ldots, k - 1$ получаем, что $l \geq k - l - 1$. Тогда $k = 2l + 1$. Отсюда также следует, что для $s(i)$ есть только один выбор: $i + l + 1$. □

По лемме 2.1 мы как раз и получаем, что любую конфигурацию S можно деформировать в вершины правильного многоугольника с $2l + 1$ сторонами. То есть S может быть деформирована в единственную каноническую форму, с точностью до поворота.

Пусть конфигурация S в канонической форме имеет точки $V_1, \ldots, V_k$ в вершинах правильного многоугольника с $k = 2l + 1$ сторонами, с количеством точек в вершинах: $n_1, \ldots, n_k$, где $n_1 + \ldots + n_k = n$. Обозначим $K = M \cap \mathbb{R}^n_{\geq}$. Гомеоморфизм $\mathbb{R}^n_{\geq}$, имеющий вид: $x_i \to x_i^2$, отправляет K в множество K', которое определяет выпуклый многогранник так:

$$\begin{gathered} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n = 0 \\ x_1 + \ldots + x_n = 1, \end{gathered}$$

где $x_i \geq 0$. Гранями этого многогранника является пересечение его с координатными гиперплоскостями в $\mathbb{R}^n$. Тогда M представляется в виде объединения 2^n копий K, полученных отражением относительно гиперплоскостей $x_i = 0$. Другими словами, мы получили клеточное разбиение M.

Определение 2.2. Будем говорить, что конфигурация S называется *конфигурацией Пуанкаре*, если 0 не лежит в выпуклой оболочке A_i. Иначе конфигурацию S будем называть *конфигурацией Зигеля.*

Пусть g_i — отражение относительно гиперплоскости $x_i = 0$. Тогда определим g_R для $R \subset S$: $g_R = \prod\limits_{A_i \in R} g_i$. Тогда все клетки M можно представить в виде $g_R K(R')$, где $R \subset R' \subset S$. То есть цепи будут иметь вид:

$$C_* = \{\sum s g_R K(R') \mid s \in \mathbb{Z}, \quad R \subset R'\}.$$

Пусть $G(R)$ — группа, порождённая элементами g_i для $A_i \in R$, и $\mathbb{Z}G(R)$ — соответствующее групповое кольцо. Обозначим $h_i = 1 - g_i \in \mathbb{Z}G(S)$ и $h_R = \prod\limits_{A_i \in R} h_i$. Очевидным образом получаем, что $\mathbb{Z}G(S)$ свободно порождена элементами $h_{R'}$, $R' \subset R$. Тогда C_* разлагается на прямую сумму подкомплексов $h_R C_I(K)$. Обозначим $L(S, A_i) = K(S \setminus \{A_i\})$ — грань $K(S)$ и $L(S, R) = \bigcup\limits_{A_i \in R} L(S, A_i)$. Так как на грань $L(S, A_i)$ g_i действует тождественно, тогда h_R уничтожит все цепи в $L(S, R)$. Тогда мы имеем

$$H_*(M) \cong \bigoplus_{R \subset S} H_*(K, L(S, R)). \tag{2.5}$$

Обозначим U_i— множество точек, концентрированных в вершине V_i. То есть U_i это класс эквивалентности.

Определение 2.3. Подмножество $R \subset S$ будем называть *минимально необходимым (m.i.)*, если R — это в точности объединение l последовательных классов U_i. Будем также обозначать R^* — объединение R и по одной точке из двух соседних классов с R.

Определение 2.4. Подмножество $R \subset S$ будем называть *максимальным Пуанкаре (M.P.)*, если R — это дополнение $m.i.$, то есть объединение $l + 1$ последовательных классов U_i. Будем также обозначать R^* — объединение R и одной точки из соседнего класса с R.

Заметим, что, если R —$m.i.$ или $M.P.$, то $\partial K(R^*) \subset L(S, R)$. Для того, чтобы посчитать гомологии M, докажем несколько лемм.

Лемма 2.2. Если R — не является объединением классов U_i, тогда $L'(S, R)$ — стягиваемо.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \in U_1$, $A_1 \in R$, но $A_2 \notin R$. Рассмотрим отображение $F : K(S) \times I \to K'(S)$, определённое следующим образом:

$$F(x_1, \ldots, x_n, t) = ((1 - t)x_1, x_2 + tx_1, x_3, \ldots, x_n).$$

Это отображение определяет деформацию $K'(S)$ на $K'(S \setminus A_1) = L'(S, A_1)$, причём каждая $L'(S, A_i)$, кроме $L'(S, A_2)$, деформируется внутрь себя. То есть мы получаем, что $L'(S, A_1)$ — деформационная ретракция $L'(S, R)$. $\square$

Лемма 2.3. Если R или $S \setminus R$ — конфигурации Зигеля, тогда $L'(S,R)$ является $(n-4)$-клеткой.

Доказательство. Пусть $S \setminus R$ — конфигурация Зигеля. Значит, $K(S \setminus R)$ непусто. Следовательно, $L'(S,R)$ ретрагируется на любую точку $K'(S \setminus R)$. Но $L'(S,R)$ также представляет собой объединение клеток, приклеенных вдоль клеток по их границам. По индукции получаем, что это тоже клетки. Пусть R — конфигурация Зигеля. Тогда $L'(S,R)$ — это дополнительная клетка $L'(S, S \setminus R)$. $\square$

Лемма 2.4. Если R — *m.i.*, тогда $\partial K'(R^*) \subset L'(S,R)$ — гомотопическая эквивалентность.

Доказательство. Пусть $R^* = R \cup \{P_1, P_2\}$ и $(u_1, u_2, \bar{x}, \bar{y})$ — представление точки K', где $\bar{x}$ обозначаются координаты, соответствующие точкам в R, $\bar{y}$ обозначаются координаты, соответствующие точкам в $S \setminus R^*$, и u_i соответствуют координатам P_i. Тогда для набора $(u_1, u_2, \bar{x}, \bar{y})$ существует единственная точка $\frac{1}{v}(u_1', u_2', \bar{x}, 0) \in K'(R^*)$, где $v = u_1' + u_2' + \sum \bar{x}$. Это верно, так как, во-первых, можем найти уникальные u_1', u_2' такие, что $(u_1', u_2', \bar{x}, 0)$ удовлетворяет первым двум уравнениям для K'. Во-вторых, u_1', u_2' положительные, так как иначе конфигурация, соответствующая K', станет конфигурацией Пуанкаре. В-третьих, нормализуем делением на $v > 0$. Тогда мы получаем ретракцию $L'(S,R)$ на $\partial K'(R^*)$, которая меняется линейно до тождественного отображения $L'(S,R)$ в себя. $\square$

Лемма 2.5. Если R — *P.M.*, тогда $\partial K'(R^*) \subset L'(S,R)$ — гомотопическая эквивалентность.

Доказательство. Пусть $R^* = R \cup \{P_2\}$ и P_1 — точка в классе из R, противоположной точке P_2. Пусть $S' = S \setminus \{P_1\}$, $R' = R \setminus \{P_1\}$. Тогда получаем, что $L'(S,R) = L'(S,R') \cup L'(S,P_1)$ и $L'(S,R') \cap L'(S,P_1) = L'(S',R')$. Возможны 2 случая:

1) Если P_1 — это единственный элемент в своём классе, тогда P_2 в S' станет эквивалентным точкам в соседнем классе с R. Тогда по лемме 2.2 $L'(S',R')$ — стягиваемый и, следовательно, $L'(S,P_1)$ стягиваемый. Тогда $L'(S,R)$ ретрагируется на $L'(S,R')$. Но в этом случае R' — это *m.i.* в S, так как имеет ровно l последовательных классов. Тогда $R'^* = R^*$ и $\partial K'(R^*) = \partial K'(R'^*) \subset L(S,R')$ — гомотопическая эквивалентность по лемме 2.4.

2) Если в классе с точкой P_1 находится больше одного элемента, тогда мы будем действовать по индукции по числу элементов в этом классе. Тогда у нас R' всё ещё *M.P.* в S' и $R'^* = R' \cup \{P_2\}$. Воспользуемся последовательностями Майера-Вьеториса для троек:

$$(L'(S,R); L'(S,R'); L'(S,P_1)) \text{ и } (L'(R^*,R); L'(R^*,R'); L'(R^*,P_1)).$$

Заметим, что вторые члены каждой тройки стягиваемые по лемме 2.2 и третьи члены — клетки. Тогда получаем:

$$\begin{array}{ccc} H_{i+1}(L'(S,R)) & \xrightarrow{\cong} & H_i(L'(S',R')) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{i+1}(L'(R^*,R)) & \xrightarrow{\cong} & H_i(L'(R'^*,R')) \end{array} \tag{2.6}$$

Заметим также, что $L'(R^*,R) = \partial K'(R^*)$ и $L'(R'^*,R') = \partial K'(R'^*)$. Тогда вертикальная стрелка справа — изоморфизм для любого i по предположению индукции. То есть получаем, что и вертикальная стрелка слева тоже изоморфизм. $\square$

Непосредственно из предыдущих лемм получаем, что верна следующая теорема:

Теорема 2.1. 1) Если $R = \varnothing$, то $L(S,R) = \varnothing$.
2) Если $R = S$, тогда $L(S,R) = \partial K \sim S^{n-4}$.
3) Если R — *m.i.* или *M.P.*, то $\partial K(R^*) \subset L(S,R)$ — гомотопическая эквивалентность.
4) Во всех других случаях $L(S,R)$ — стягиваемая.

Теперь у нас есть все посчитанные группы гомологий M. Во-первых, они все свободные. Во-вторых, рядом с верхним и нижним классами есть один порождающий в размерности $s-1$ для каждого *m.i.* с s элементами, и один в размерности $r-2$ для каждого *M.P.* с r элементами. Это следует из теоремы 2.1, так как $H_{i+1}(K,L) \to H_i(L)$ — это изоморфизм.

Лемма 2.6. Если $k=3$, $n=n_1+n_2+n_3$, тогда $M = S^{n_1-1}\times S^{n_2-1}\times S^{n_3-1}$.

Доказательство. Мы можем считать, что S содержит точки $(2,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Тогда уравнения, определяющие M, имеют вид:

$$\begin{cases} 2x_1^2+\ldots+2x_{n_1}^2-x_{n_1+1}^2-\ldots-x_{n_1+n_2}^2-x_{n_1+n_2+1}^2-\ldots-x_n^2=0\\ x_{n_1+1}^2+\ldots+x_{n_1+n_2}^2-x_{n_1+n_2+1}^2-\ldots-x_n^2=0\\ x_1^2+\ldots+x_n^2=1.\end{cases}$$

Эта система эквивалентна системе:

$$\begin{cases} x_1^2+\ldots+x_{n_1}^2=\frac13\\ x_{n_1+1}^2+\ldots+x_{n_1+n_2}^2=\frac13\\ x_{n_1+n_2+1}^2+\ldots+x_n^2=\frac13.\end{cases}$$

Заметим, что в уравнениях нет общих переменных. Значит, $M = S^{n_1-1}\times S^{n_2-1}\times S^{n_3-1}$. □

Лемма 2.7. Если $k>3$, то все классы гомологий размерности $\neq 0$ и $\neq n-3$ в M могут быть представлены вложенными сферами с тривиальным нормальным расслоением.

Доказательство. Если $R\subset S$, тогда $M(R)\subset M(S)$ с тривиальным нормальным расслоением. Есть два разных случая:

Если R — *m.i.*, тогда R^* — конфигурация с тремя классами: первый класс — это R и два других класса содержат по одной точке. Тогда по лемме 2.6 имеем, что $M(R^*) = S^{r-1}\times S^0\times S^0$. Тогда из теоремы 2.1 имеем, что соответствующий класс в $M(S)$ представляется одной из этих сфер.

Если R — это *M.P.*, тогда $R^* = R\cup\{P\}$ — это конфигурация с тремя классами: первый класс — это точка P, второй — это класс U из R, противоположный точке P, причём класс U имеет u элементов, и третий — остаток в R, обозначим этот класс V, причём он имеет v элементов. Тогда получаем, что $M(R^*) = S^{u-1}\times S^{v-1}\times S^0$, и класс, соответствующий R в $M(S)$, представляется вложенной $S^{u-1}\times S^{v-1}$ с тривиальным нормальным расслоением. Сейчас у нас V — *m.i.* в S, тогда S^{v-1} не тривиальна в $M(S)$. Покажем, что S^{u-1} — тривиальна в $M(S)$. Пусть $P'\in V$ точка, смежная с U, $P''\notin V$ — точка из класса, смежного с U с другой стороны. Пусть $U^* = U\cup\{P,P'\}$ и $\bar U = U^*\cup\{P''\}$. Тогда, так как $k>3$, $\bar U$ — имеет 3 класса: $U\cup\{P''\}$, $\{P\}$ и $\{P'\}$. То есть $M(\bar U) = S^u\times S^0\times S^0$. Если бы $k=3$, то P и P'' находились бы в одном классе. Тогда имеем:

$$\begin{array}{l} M(R^*) = S^{u-1}\times S^{v-1}\times S^0\\ \quad\cup\\ M(U^*) = S^{u-1}\times S^0\times S^0\\ \quad\cap\\ M(\bar U) = S^u\times S^0\times S^0.\end{array}$$

Заметим, что $M(R^*)\cap M(\bar U) = M(R^*\cap\bar U) = M(U^*)$, тогда сфера S^{u-1} в $S^{u-1}\times S^{v-1}$ ограничивает диск D^u в $M(S)$ такая, что $S^{u-1}\times S^{v-1}\cap D^u = S^{u-1}$. Таким образом, мы можем провести операцию на S^{u-1} по получению вложенной $(u+v-2)$-сферы, представляющей тот же самый класс гомологий, как $S^{u-1} \times S^{v-1}$. Для того, чтобы $(u+v-2)-$сфера имела тривиальное нормальное расслоение, должно выполняться неравенство: $u-1 < \frac{1}{2}(n-3)$. Если это не так, то начинаем всё сначала, меняя точки P и P' и считая класс U'' на другой стороне R. Тогда мы будем иметь $u''-1 \geq \frac{1}{2}(n-3)$, так как $u+u''+3 \leq n$ и существует более трёх классов в S. □

Покажем теперь, что в лемме 2.7 все сферы будут непересекающимися, кроме тех, которые представляют двойные классы. Для этого рассмотрим многообразие с границей $Q \subset \mathbb{R}^{n+1}$, определяемое добавлением новой точки A_0 в вершину V_1. Получим конфигурацию S^+ и соответственно многообразие $M(S^+)$. Тогда определим $Q = M(S^+) \cap \{x_0 \geq 0\}$. Получаем, что $M = \partial Q = M \cap \mathbb{R}^n$. Заметим также, что Q — объединение 2^n клеток, полученных отражением $K(S^+)$ относительно гиперплоскостей $x_i = 0,\ i = 1\dots,n$. Аналогичное доказательство предыдущих лемм даёт нам, что

$$H_*(Q) \cong \bigoplus_{R \subset S} H_*(K(S^+), L(S^+, R)).$$

Это значит, что нетривиальные классы гомологий в Q соответствуют подмножествам S, которые являются *т.i.* или *M.P.* в S^+. Тогда получаем сюръекцию $H_*(M) \to H_*(Q)$. Отсюда следует, что все гомологии Q могут быть представлены сферами с тривиальным нормальным расслоением из $\partial Q = M$. Отсюда мы и получаем, что их можно сделать непересекающимися на внутренности Q. Рассмотрим эти сферы с внутренностями и соединим их тонкой трубочкой по замкнутым окрестностям. Получим многообразие с границей M', которая является связной суммой произведения сфер. Тогда $Q \setminus intQ'$ — односвязный h-кобордизм между M и M', которые будут диффеоморфными по теореме об h-кобордизме.

Собирая все предыдущие рассуждения вместе, мы можем сказать, какому многообразию диффеоморфно M.

Теорема 2.2**.** Пусть $k = 2l+1$, $n = n_1 + \ldots + n_k$. Обозначим $d_i = n_i + \ldots + n_{i+l-1}$. Тогда:
1) Если $k = 1$, то $M = \varnothing$.
2) Если $k = 3$, то $M = S^{n_1-1} \times S^{n_2-1} \times S^{n_3-1}$.
3) Если $k = 5$ и $d_i \neq 2$, или $k > 5$ и $n \neq 7$, то M диффеоморфно связной сумме многообразий $S^{d_i-1} \times S^{n-d_i-2},\ i = 1, \ldots, k$.

3. Диффеоморфность момент-угол многообразия пятиугольника

Рассмотрим систему уравнений (2.3), которая задаёт момент-угол многообразие пятиугольника P. Представим момент-угол многообразие $\mathscr{Z}_P$ как вещественное момент-угол многообразие $\mathscr{R}_P$, то есть в виде (1.6). Получим

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3y_1^2 - 4x_2^2 - 4y_2^2 + 10x_3^2 + 10y_3^2 - 4x_4^2 - 4y_4^2 - 4x_5^2 - 4y_5^2 = 0 \\ -4x_1^2 + -4y_1^2 + 3x_2^2 + 3y_2^2 - 4x_3^2 - 4y_3^2 - 4x_4^2 - 4y_4^2 + 10x_5^2 + 10y_5^2 = 0 \\ x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + x_4^2 + y_4^2 + x_5^2 + y_5^2 = 1. \end{cases}$$

Конфигурация S задаётся точками $(A_1, \ldots, A_{10}),\ A_i \in \mathbb{R}^2,\ n = 10$. Расставляя эти точки на плоскости, становится очевидно, что уникальная конфигурация будет состоять из пяти классов, причём в каждом классе будет по 2 точки. То есть имеем $k = 5$ и $n_i = 2,\ i = 1, \ldots, 5$. Тогда по теореме 2.2 мы попали в третий случай. В итоге получаем, что

$$\mathscr{Z}_P = \#_{i=1}^5 (S^3 \times S^4). \tag{2.7}$$

Таким образом, вторая нами поставленная цель выполнена.

Список литературы

1. **В.М. Бухштабер, Т.Е. Панов,** *Торические действия в топологии и комбинаторике. Издательство МЦНМО, Москва, 2004.*

2. **Lopez de Medrano, S.,** *Topology of the intersection of quadrics in* $\mathbb{R}^n$*, in Algebraic Topology (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math., 1370, 280-292. Springer, Berlin 1989.*