Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Алгебры Понтрягина момент-угол комплексов.

Студента 3го курса
Корюкин Григорий

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Тарас Евгеньевич Панов

1 Предварительные сведения

Все необходимое можно найти в [1] [2] [3] [4] Часто будет использоваться обозначение $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Определение 1. Симплициальным комплексом на конечном множестве вершин M называется совокупность $\mathcal{K} \subset 2^M$ подмножеств множества M, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1. если $I \in \mathcal{K}$ и $J \subset I$, то $J \in \mathcal{K}$; 2. $\varnothing \in \mathcal{K}$.

Элементы множества M называются вершинами симплициального комплекса $\mathcal{K}$, элементы $I \in \mathcal{K}$ - его симплексами, а если $i \in I$, то говорят, что i есть вершина симплекса I. Число $|I| - 1$ называется размерностью симплекса I и обозначается $\dim I$. Размерность симплициального комплекса $\mathcal{K}$ есть по определению максимальная размерность его симплексов. Формально, пустой симплекс имеет размерность -1.

Симплекс $I \in \mathcal{K}$ называется максимальным по включению, если не существует такого $J \in \mathcal{K}$, что J строго содержит I.

Определение 2. Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2-$ симплициальные комплексы на множествах M_1 и M_2 соответственно. Джойном $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$ называется симплициальный комплекс на несвязном объединении $M_1 \sqcup M_2$, чьи симплексы имеют вид $I_1 \sqcup I_2 \subset M_1 \sqcup M_2$, где $I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2$.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K} * pt$ называется конусом над $\mathcal{K}$ (с вершиной конуса pt) и обозначается $\mathrm{Cone}\,\mathcal{K}$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}*(2pt)$ называется надстройкой над $\mathcal{K}$ и обозначается $\Sigma\mathcal{K}$.

Есть и топологические определения введенных понятий для произвольных пространств.

Символ I обозначает единичный отрезок $[0, 1]$. Цилиндром над X называется произведение $X \times I$; подпространства $X \times 1$ и $X \times 0$ называются (верхним и нижним) основаниями цилиндра.

Конус CX над X - это факторпространство цилиндра по его верхнему основанию: $CX = (X \times I)/(X \times 1)$. Образ основания $X \times 1$ называется вершиной конуса, а образ основания $X \times 0$ - основанием конуса.

Надстройкой ΣX над X называется факторпространство конуса по его основанию: $\Sigma X = CX/(X \times 0)$. (Обратите внимание, что это - не то же самое, что факторпространство $(X \times I)/(X \times 1 \cup X \times 0)$.) Пространство X вкладывается в надстройку ΣX в качестве $X \times \frac{1}{2}$.

Джойн (или соединение) $X * Y$ пространств X и Y удобно представлять себе как объединение отрезков, соединяющих каждую точку пространства X с каждой точкой пространства Y. Формально джойн определяется как факторпространство

$$X * Y = X \times Y \times I/\left(x, y_1, 0\right) \sim \left(x, y_2, 0\right), \left(x_1, y, 1\right) \sim \left(x_2, y, 1\right)$$

при любых $x, x_1, x_2 \in X$ и $y, y_1, y_2 \in Y$. Произведение, $X \times Y$ вкладывается в джойн в качестве $X \times Y \times \frac{1}{2}$.

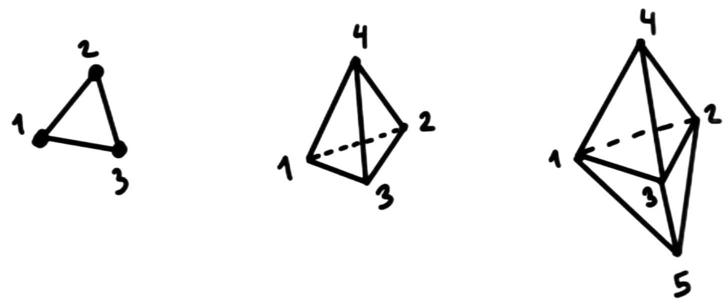
Легко видеть, что применение для комплексов и для произвольных пространств дают "одинаковый" результат

Пример 1. $\mathcal{K} = \partial\Delta^2$, граница треугольника, полный граф на трёх вершинах. Рассмотри конус над $\mathcal{K}$. По определению конус над комплексом $\mathcal{K} * pt$. В нашем случае получим

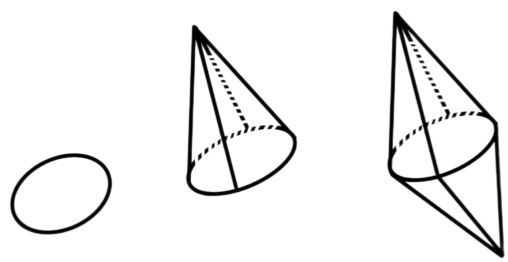
$$\mathcal{K} * pt = (\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}) * pt =$$

$$\{\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

Аналогично можно расписать надстройку, полученные комплексы изобразим:



Если взять $X = S^1$, то конус и надстройка будут выглядеть следующим образом



В конусе и надстройке над пространствами с отмеченными точкамим(X, x_0) дополнительно стягивается подпространство $x_0 \times I$. Например, в букетах.

Имеются следующие две дополнительные операции над пространствами с отмеченными точками.

Букетом пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \vee Y$, получаемое склейкой X и Y по отмеченным точкам x_0 и y_0 :

$$X \vee Y = X \sqcup Y / (x_0 \sim y_0) .$$

Букет $X \vee Y$ естественным образом вкладывается в произведение $X \times Y$ в качестве подпространства $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$; при этом отмеченная точка букета переходит в (x_0, y_0).

Приведённым произведением (или смэш-произведением) пространств с отмеченными точками X и Y называется пространство $X \wedge Y$, получаемое факторизацией произведения $X \times Y$ по вложенному букету $X \vee Y$:

$$X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y) = (X \times Y)/\left(X \times y_0 \cup x_0 \times Y\right)$$

Мы не будем заострять внимание на отмеченной точке, когда понятно о какой точке идет речь.

Для пространств X, Y есть каноническая гомотопическая эквивалентность $\Sigma X \wedge Y \simeq \Sigma(X \wedge Y) \simeq X * Y$. Левым смэш-произведением будем называть $X \ltimes Y = X \times Y/(X \times pt)$, а правым $X \rtimes Y = X \times Y/(pt \times Y)$.

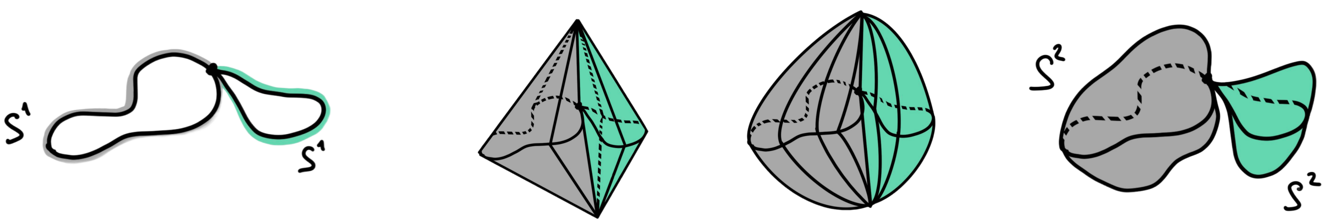
Напомним базовые свойства данных конструкций для сфер:

$$\Sigma S^n \cong S^{n+1}, S^k * S^l \cong S^{k+l+1} \text{ и } S^k \wedge S^l \cong S^{k+l}$$

Зная, что $\Sigma X \cong X \wedge S^1$, можно вывести, что $\Sigma^k X \cong X \wedge S^k$. В ходе дальнейших рассуждений нам понадобится:

Предложение 1. Надстройка над букетом сфер - снова букет сфер

Доказательство почти очевидно, и может быть получено из следующей иллюстрации:



Также нам будет нужно понятие производящий функций - они помогают работать с рекурретными формулами и приводить их к удобному виду. Напомним это понятие:

Если дана последовательность $\{a_n\}$ чисел $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, то по ним можно построить формальный степенной ряд

$$f_a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

который называется производящей функцией $f_a(t)$ этой последовательности. Иногда $f_A(t)$ можно представить в замкнутом виде, например, производящая функция для рекуррентной последовательности $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, c_0 = 0, c_1 = 1$, будет иметь вид $f_c(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$. Для удобства они могут обозначаться по-разному, в зависимости от конкретной задачи.

2 Полиэдральные произведения

Конструкция 1 (Полиэдральное произведение)**.** Пусть $\mathcal{K}$ - симплициальный комплекс на $[m]$ и пусть

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

семейство m пар пространств, $A_i \subset X_i$. Для любого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I = \left\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j : x_j \in A_j \quad \text{for } j \notin I\right\}$$

и определим полиэдральное произведение $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$ соответствующее $\mathcal{K}$ как

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} \left(\prod_{i\in I} X_i \times \prod_{i\notin I} A_i\right).$$

Чтобы понять как связаны $\mathcal{K}$ и $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$ полезно рассмотреть несколько примеров

Пример 2. Пусть $\mathcal{K}$ несвязное объединение m точек, X - отрезок I, и A - точка pt. Тогда

$$(\boldsymbol{I},\boldsymbol{pt})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{i\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{I},\boldsymbol{pt})^i = \bigcup_{i\in\mathcal{K}} \left(I_i \times \prod_{j\neq i} pt\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{K}} I_i.$$

То есть, $(\boldsymbol{I},\boldsymbol{pt})^{\mathcal{K}}$ есть стандартный репер $\mathbb{R}^m$. Если заменить отрезок на $\mathbb{R}$ мы получим, что $(\mathbb{R},\boldsymbol{pt})^{\mathcal{K}}$ координатные оси $\mathbb{R}^m$.

Из определения следует, что $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$ является подмножеством $\prod_{j=1}^m X_j$ и всегда содержит $\prod_{j=1}^m A_j$

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\varnothing} = \left\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} A_j\right\}$$

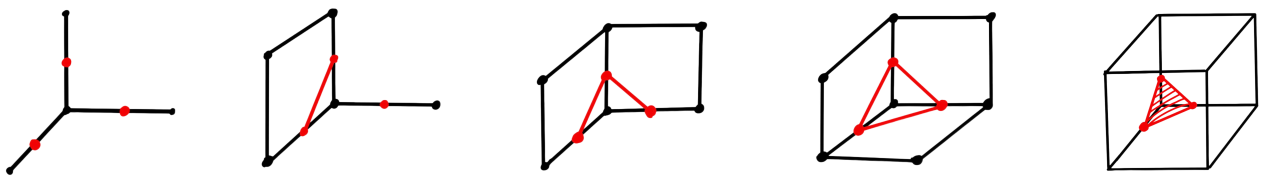
$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \left\{(x_1, \dots, x_m) \in \prod_{j=1}^{m} X_j\right\}$$

Если $J \subset I$ то $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^J \subset (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^J$, поэтому для описания полиэдральных произведений достаточно рассматривать объединения по максимальным симплексам комплекса

$$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})^I, \text{ где } I \text{ максимальные симплексы}$$

Поскольку мы работаем с произведениями пространств, то размерности растут достаточно быстро и возможность представлять полиэдральные произведения геометрически становиться проблематично даже для несложных X, A и $\mathcal{K}$. Однако общая концепция их устройтсва становится понятна, после рассмотрения следующего примера:

Пример 3. $\mathcal{K}$ - различные комплексы на трёх вершинах, будут вписаны в соответсвующие $(I,0)^{\mathcal{K}}$ (на последней картинке куб заполнен)



В примере хорошо прослеживается комбинаторное устройство $(X,A)^I$ построенного на $\mathcal{K}$. На самом деле во многих случаях этого будет достаточно для понимания того, как они выглядят.

Определение 3 (Момент-угол комплекс)**.** Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс. Тогда полиэдральное произведение диска D^2 и окружности S^1 называется момент-угол комплексом на $\mathcal{K}$ и записывается:

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$$

Следующий пример показывает естественность определения момент-угол комплексов:

Пример 4. Пусть $\mathcal{K}$ - дизъюнктное объединение двух вершин. Тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = \left(D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2\right) = \partial\left(D^2 \times D^2\right) \cong S^3,$$

стандартное представление S^3 в объединение двух полноториев, пересекающихся по граничному тору.
Обобщим, если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$ (граница симплекса), то

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &= \left(D^2 \times \cdots \times D^2 \times S^1\right) \cup \left(D^2 \times \cdots \times S^1 \times D^2\right) \cup \cdots \cup \left(S^1 \times \cdots \times D^2 \times D^2\right)\\ &= \partial\left(\left(D^2\right)^m\right) \cong S^{2m-1}.\end{aligned}$$

Пример 5. Пусть $\mathcal{K}$ граница четырех-угольника. Тогда мы имеем 4 максимальных симплекса $\{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}$ и $\{2,4\}$, т.е.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} &= \left(D^2 \times S^1 \times D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2 \times D^2 \times S^1\right)\\ &\quad \cup \left(D^2 \times S^1 \times S^1 \times D^2\right) \cup \left(S^1 \times D^2 \times S^1 \times D^2\right)\\ &= \left(\left(D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2\right)\right) \times D^2 \times S^1 \cup \left(\left(D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2\right)\right) \times S^1 \times D^2\\ &= \left(\left(D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2\right)\right) \times \left(\left(D^2 \times S^1\right) \cup \left(S^1 \times D^2\right)\right) \cong S^3 \times S^3\end{aligned}$$

В последнем примере, $\mathcal{K}$ является джойном $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$. Тот же результат может быть получен, применяя

Предложение 2. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2$; тогда

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}.$$

Доказательство. По определению джойна:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2} = \bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2} \left(D^2, S^1\right)^{I_1 \sqcup I_2} \cong \bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1, I_2 \in \mathcal{K}_2} \left(D^2, S^1\right)^{I_1} \times \left(D^2, S^1\right)^{I_2}$$
$$= \left(\bigcup_{I_1 \in \mathcal{K}_1} \left(D^2, S^1\right)^{I_1}\right) \times \left(\bigcup_{I_2 \in \mathcal{K}_2} \left(D^2, S^1\right)^{I_2}\right) = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}.$$

□

2.1 Пространства, связанные с полиэдральным произведением

Определение 4 (Пространство Дэвиса-Янушкевича)**.**

$$DJ(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}P^\infty, *)^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}$$

обычно называют пространством Дэвиса-Янушкевича или пространством Стенли-Райснера.

Похожий принцип был использован в построении кольца граней для многонранника $\mathcal{K}$:

Определение 5. Кольцом Стенли-Райснера (или кольцом граней) комплекса $\mathcal{K}$ называется факторкольцо $\mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m]$ по идеалу, порожденному мономами, которые не входят в $\mathcal{K}$

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = \mathbf{k}[v_1, \ldots, v_m] / (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}).$$

Естественная градуировка возникает, если положить $\deg v_i = 2$.

Легко заметить связь кольца Стенли-Райснера и пространства Дэвиса-Янушкевича, если расписать его по определению, после чего довольно естетсвенно выглядит

Теорема 1 ([[2], Prop. 3.4.3])**.** *Имеет место изоморфизм градуированных коммутативных алгебр:*

$$H^*(DJ(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]$$

для любого кольца коэффициентов $\mathbf{k}$.

Так же нам потребуется следующее понятие:

Определение 6 (Коалгебра Граней)**.** Коалгеброй граней назовем $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ - градуированное двойственное к кольцу граней $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ свободный $\mathbf{k}$-модуль на порождающих v_σ соответсвующих множествам на m элементах, вида:

$$\sigma = \{\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1},\underbrace{2,\ldots,2}_{k_2},\ldots,\underbrace{m,\ldots,m}_{k_m}\}$$

такие, что носитель σ (т.е. множество $I_\sigma = \{i \in [m] : k_i \neq 0\}$) является симплексом $\mathcal{K}$. Элемент v_σ двойственен к моному $v_1^{k_1}v_2^{k_2}\cdots v_m^{k_m} \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]$.

Определение 7. Дополнение к комплексным координатным подпространствам, соответствующее $\mathcal{K}$

$$U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C},\mathbb{C}^*)^{\mathcal{K}} = \mathbb{C}^m \backslash \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_k\}\notin\mathcal{K}} \{z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\}$$

- Если $\mathcal{K} = \Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m$.
- Если $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$, то $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m\backslash\{0\}$.
- Пусть $\mathcal{K}$ дискретный набор m вершин. Тогда

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \backslash \bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant m} \{z_i = z_j = 0\}$$

В последнем случае $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и $U(\mathcal{K})$ гомотопически эквивалентны. Более того, имеет место

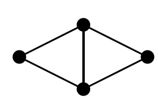
Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ i-остов симплекса Δ^{m-1}. Значит $U(\mathcal{K})$ является дополнением до всех координатных плоскостей коразмерности $i+2$ в $\mathbb{C}^m$. Тогда $U(\mathcal{K})$ гомотопически эквивалентно букету сфер:*

$$U(\mathcal{K}) \simeq \bigvee_{k=i+2}^{m} \left(S^{i+k+1}\right)^{\vee\binom{m}{k}\binom{k-1}{i+1}}$$

3 Момент-угол комплексы и букеты сфер

Теорема 3 ([1])**.** *Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup_I \mathcal{K}_2$ сиплициальный комплекс, склеенный из $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ по грани I (в т.ч. $\varnothing$). Если $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$ гомотопически эквивалентны букетам сфер, то $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ тоже будет гомотопически эквивалентен букету сфер.*

Пример 6. Найти $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$:



В ходе доказательства теоремы 3 можно получить явное представление для $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(T^{m-m_2} * T^{m-m_1}\right) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rtimes T^{m-m_1}\right) \vee \left(T^{m-m_2} \ltimes \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}\right)$$

Применяя эту конструкцию и зная $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1}$ и $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}$ для $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_2 = \partial\Delta^2$:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} = \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2} = S^{2\cdot 3-1} = S^5$$

Получим:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(T^1 * T^1\right) \vee \left(S^5 \rtimes T^1\right) \vee \left(T^1 \ltimes S^5\right), \text{ где } T^1 \simeq S^1$$

Согласно теореме $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ будет букетом сфер, убедимся в этом:

$$T^1 * T^1 \simeq S^1 * S^1 \simeq S^{1+1+1} = S^3$$

$$S^5 \rtimes T^1 = \Sigma S^4 \rtimes T^1 \simeq \Sigma S^4 \vee \left(\Sigma T^1 \wedge S^4\right) \simeq S^5 \vee \left(\Sigma T^1 \wedge S^4\right) \simeq$$
$$\simeq S^5 \vee \left(S^2 \wedge S^4\right) \simeq S^5 \vee S^6$$

Значит:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq S^3 \vee S^5 \vee S^6 \vee S^5 \vee S^6$$

Теорема 4.

$$\Sigma T^n \simeq \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^k\right)^{\vee \binom{n}{k-1}}.$$

Доказательство.

$$\Sigma T^1 = \Sigma S^1 = S^2$$

$$\Sigma T^2 = \Sigma(S^1 \times S^1) = \Sigma S^1 \vee \Sigma S^1 \vee \Sigma(S^1 \wedge S^1) = S^2 \vee S^2 \vee S^3$$

$$\Sigma T^n = \Sigma(T^{n-1} \times S^1) = \Sigma T^{n-1} \vee \Sigma S^1 \vee \Sigma(T^{n-1} \wedge S^1) = \Sigma T^{n-1} \vee S^2 \vee \Sigma\Sigma T^{n-1}$$

Исходя из этой формулы уже видно, каким будет букет сфер, но для наглядности мы это докажем. Для начала посчитаем еще несколько надстроек:

$$\Sigma T^3 = \Sigma T^2 \vee S^2 \vee \Sigma\Sigma T^2 = S^2 \vee (S^2 \vee S^2 \vee S^3) \vee (S^3 \vee S^3 \vee S^4) = (S^2)^{\vee 3} \vee (S^3)^{\vee 3} \vee (S^4)^{\vee 1}$$

$$\Sigma T^4 = \Sigma T^3 \vee S^2 \vee \Sigma\Sigma T^3 = S^2 \vee ((S^2)^{\vee 3} \vee (S^3)^{\vee 3} \vee (S^4)^{\vee 1}) \vee ((S^3)^{\vee 3} \vee (S^4)^{\vee 3} \vee (S^5)^{\vee 1}) =$$
$$= (S^2)^{\vee 4} \vee (S^3)^{\vee 6} \vee (S^4)^{\vee 4} \vee (S^5)^{\vee 1}$$

Поскольку у нас получаются букеты, состоящие исключительно из сфер, то каждый такой букет можно охарактеризовать последовательностью, например для ΣT^4 последовательность будет выглядеть так: $0, 0, 4, 6, 4, 1, 0, 0...$, где на каждом месте стоит целое число, соответствующее количеству сфер данной размерности в букете.

Тогда подсчет последовательности ΣT^n из последовательности ΣT^{n-1} будет выглядеть так: складываем последовательность с такой же, но сдвинутой на 1, и прибавляем единицу на третье место последовательности. Данная схема упрощает подсчёт, и после этого найти ΣT^5 не составляет труда:

$$\begin{aligned} & 0,0,4,6,4,1,0,0,... \\ + \quad & 0,0,0,4,6,4,1,0,0,... \\ + \quad & 0,0,1,0,0,0,0,0,0,... \\ = \quad & 0,0,5,10,15,10,5,1,0,... \end{aligned}$$

Эта схема рекуррентного поиска коэффициентов в точности совпадает с тем, как ищуться коэффициенты в треугольнике паскаля, а значит в общем случае последовательность для ΣT^n будет выглядет так:

$$0,0,\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3},...,\binom{n}{n-1},\binom{n}{n},0,...$$

Откуда букет сфер выражается следующим образом:

$$\Sigma T^n \simeq \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^k\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}.$$

$\square$

Следствие 1.

$$\Sigma^m T^n \simeq \Sigma^{m-1}\left(\Sigma T^n\right) \simeq \Sigma^{m-1}\left(\bigvee_{k=2}^{n+1}\left(S^k\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}\right) = \bigvee_{k=2}^{n+1}\left(S^{k+m-1}\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}$$

Теорема 5. *Обозначим за $\mathcal{K}_0$ границу $m-$симплекса, а за $\mathcal{K}_{n+1}$ результат приклеивания к $\mathcal{K}_n$ границы $m-$симплекса (т.е. $\mathcal{K}_0$) вдоль любой грани коразмерности. Тогда гомотопический тип $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ имеет следующий вид:*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \simeq \bigvee_{k=1}^{n-1}\left(S^{k+1}\right)^{\vee\left(n\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k}\right)} \vee \left(S^{n+2}\right)^{\vee n} \vee \bigvee_{k=1}^{n+1}\left(S^{k+2m}\right)^{\vee(n+1)\binom{n}{k-1}}$$

Доказательство. В ходе доказательства теоремы 3 была получена следующая эквивалентность:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(T^{m-m_2} * T^{m-m_1}\right) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \rtimes T^{m-m_1}\right) \vee \left(T^{m-m_2} \ltimes \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_2}\right)$$

В нашем случае $\mathcal{K}_0$ имеет $m+1$ вершину, а $\mathcal{K}_n$ $m+n$, а $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_0} \simeq S^{2m+1}$

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n+1}} \simeq \left(T^1 * T^n\right) \vee \left(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \rtimes T^1\right) \vee \left(T^n \ltimes S^{2m+1}\right)$$

$$T^1 * T^n \simeq S^1 * T^n \simeq (S^0 * S^0) * T^n \simeq S^0 * (S^0 * T^n) \simeq \Sigma\Sigma T^n \simeq \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^{k+1}\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}$$

$$T^n \ltimes S^{2m+1} \simeq \Sigma S^{2m} \rtimes T^n \simeq \Sigma S^{2m} \vee (\Sigma T^n \wedge S^{2m}) \simeq$$

$$\simeq S^{2m+1} \vee \Sigma^{2m} T^n \simeq S^{2m+1} \vee \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^{k+2m}\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}$$

$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} = \Sigma W$,

$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \rtimes T^1 \simeq \Sigma W \rtimes T^1 \simeq \Sigma W \vee (\Sigma T^1 \wedge W) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee (S^2 \wedge W) \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n}$

Итого:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n+1}} \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \vee S^{2m+1} \vee \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^{k+1}\right)^{\vee\binom{n}{k-1}} \vee \bigvee_{k=2}^{n+1} \left(S^{k+2m}\right)^{\vee\binom{n}{k-1}}$$

Чтобы найти общий вид этого букета воспользуемся производящими функциями $f_n(x) = f_n$ соответствующих последовательностей количества сфер в букете: $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_0} \simeq S^{2m+1}$ соответсвует последовательность 0,0,...,0,1,0,... и ей соответствует производящая функция $f_0 = x^{2m+1}$
$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_1} \simeq S^3 \vee (S^{2m+1})^{\vee 2} \vee (S^{2m+2})^{\vee 2}$ соответствует производящая функция $f_1 = x^3 + 2x^{2m+1} + 2x^{2m+2}$

Аналогично будем выражать следующие функции из предыдущих исходя из $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n-1}} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_{n-1}} \vee S^{2m+1} \vee \bigvee_{k=2}^{n} \left(S^{k+1}\right)^{\vee\binom{n-1}{k-1}} \vee \bigvee_{k=2}^{n} \left(S^{k+2m}\right)^{\vee\binom{n-1}{k-1}}$

В терминах производящих функциях это будет записываться так:

$$f_n = f_{n-1} + x f_{n-1} + x^{2m+1} + x^2((1+x)-1)^n + x^{2m+1}((1+x)-1)^n$$

$$f_n = (x+1) f_{n-1} + (x^2 + x^{2m+1})(1+x)^n - x^2$$

Сделаем замену $f_n = h_n(1+x)^n$, получим

$$(1+x)^n h_n = (x+1)^n h_{n-1} + (x^2 + x^{2m+1})(1+x)^n - x^2$$

$$h_n = h_{n-1} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^n}$$

Напишем теперь остальные выражения производящих функций:

$$h_{n-1} = h_{n-2} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^{n-1}}$$

$$h_{n-2} = h_{n-3} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^{n-2}}$$

$$...$$

$$h_2 = h_1 + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$h_1 = h_0 + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)}$$

А значит

$$h_n = h_{n-1} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^n} =$$
$$= h_{n-2} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^{n-1}} + (x^2 + x^{2m+1}) - \frac{x^2}{(1+x)^n} = ... =$$
$$= h_0 + n(x^2 + x^{2m+1}) - x^2 \left(\frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} + ... + \frac{1}{(1+x)^n} \right) =$$
$$= h_0 + n(x^2 + x^{2m+1}) - x^2 (\frac{1}{(1+x)} \frac{1 - \frac{1}{(1+x)^n}}{1 - \frac{1}{(1+x)}}) =$$
$$= x^{2m+1} + n(x^2 + x^{2m+1}) - x^2 (\frac{(1+x)^n - 1}{x(1+x)^n}) = h_n$$

Вернемся к f_n, т.е. домножим обе части на $(1+x)^n$:

$$f_n = x^{2m+1}(1+x)^n + n(x^2 + x^{2m+1})(1+x)^n - x((1+x)^n - 1) =$$
$$= nx^2(1+x)^n + (n+1)x^{2m+1}(1+x)^n - x((1+x)^n - 1)$$

Откуда сдедует, что соответвующий букет имеет вид:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_n} \simeq \bigvee_{k=1}^{n-1} \left(S^{k+1}\right)^{\vee (n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k})} \vee (S^{n+2})^{\vee n} \vee \bigvee_{k=1}^{n+1} \left(S^{k+2m}\right)^{\vee (n+1)\binom{n}{k-1}}$$

$\square$

4 Алгебры Понтрягина

Градуированная алгебра, лежащая в основе кобар-конструкции $\Omega_* \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ это тензорная алгебра $T\left(s^{-1}\overline{\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle}\right)$ приведенного $\mathbf{k}$-модуля $\overline{\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle} = \mathrm{Ker}(\varepsilon : \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle \to \mathbf{k})$; Дифференциал определен на порождающих элементах следующим образом:

$$d\left(s^{-1}v_\sigma\right) = \sum_{\sigma=\tau\sqcup\tau';\tau,\tau'\neq\varnothing} s^{-1}v_\tau \otimes s^{-1}v_{\tau'}$$

так как $d = 0$ на $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$. Для удобства будем записывать $s^{-1}v_\sigma$ как χ_σ для любого мультмножества σ. (s^{-1} понижает градуировку на 1)

Переходя к пространствам петель в расслоении

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to DJ(\mathcal{K}) \to (\mathbb{C}P^{\infty})^{m}$$

получаем расслоение

$$\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \Omega DJ(\mathcal{K}) \longrightarrow T^{m}$$

Из которого следует гомотопиеская эквивалентность

$$\Omega DJ(\mathcal{K}) \xrightarrow{\simeq} \Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \times T^{m}$$

Так как $H_*(T^m;\mathbf{k}) = \Lambda[u_1,\ldots,u_m]$ свободный конечно порожденный $\mathbf{k}$-модуль, то по формуле Кюннета для гомологий получим следующий изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей

$$H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right) \cong H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \otimes \Lambda[u_1,\ldots,u_m]$$

Следовательно, имеется точная последовательность алгебр Понтрягина:

$$0 \longrightarrow H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \longrightarrow H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right) \longrightarrow \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \longrightarrow 0$$

для любого коммутативного кольца $\mathbf{k}$ с единицей.

Пример 7. Пусть $\mathcal{K}$ - две точки. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq S^3, DJ(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}} = (pt \times \mathbb{C}P^{\infty}) \cup (\mathbb{C}P^{\infty} \times pt) = \mathbb{C}P^{\infty} \vee \mathbb{C}P^{\infty}$ Тогда расслоение примет вид:

$$\Omega S^3 \longrightarrow \Omega(\mathbb{C}P^{\infty} \vee \mathbb{C}P^{\infty}) \longrightarrow T^2$$

И соответствующие алгебры Понтрягина:

$$0 \longrightarrow \mathbf{k}[w] \xrightarrow{i} T(u_1,u_2)/\left(u_1^2,u_2^2\right) \xrightarrow{j} \Lambda[u_1,u_2] \longrightarrow 0$$

Пример 8. Пусть $\mathcal{K}$ это 1-остов тетраэдра (или полный граф на четырёх вершинах):

Похожими рассуждениями можно получить, что алгебра Понтрягина $H_*\left(\Omega(\mathbb{C}P^{\infty})^{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right)$ содержит одномерные классы $u_1,\ldots,u_4$ и четырехмерные классы $w_{123}, w_{124}, w_{134}, w_{234}$, соответствующие четырем недостающим граням. w_{123} это класс ψ_{123} который соответствует границе несуществующего элемента χ_{123}. u_i коммутируют с w_{jkl} если какой-то индекс совпал ($i \in \{j,k,l\}$). Действительно, проверим, коммутируют ли u_1 и w_{123} явно:

$$\chi_1\psi_{123} = \chi_1 d(\chi_{123}), \text{ где } \chi_{123} \text{ - несуществующий элемент}$$

$$d\chi_{1123} = \chi_1\chi_{123} + \chi_{123}\chi_1 + \beta$$

$$0 = dd\chi_{1123} = \chi_1 d\chi_{123} + d\chi_{123}\chi_1 + d\beta \quad (d\chi_1 = 0)$$

$$\chi_1\psi_{123} + \psi_{123}\chi_1 = -d\beta$$

Осталось всего 4 нетривиальных коммутатора: $[u_i, w_{jkl}]$, где все i, j, k, l различны.

Из точной последовательсти алгебр Понтрягина следует, что коммутаторная подалгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ содержит четыре старших коммутатора $w_{jkl} = [u_j, u_k, u_l]$. С другой стороны, теорема 2 даёт нам гомотопическую эквивалентность

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \left(S^5\right)^{\vee 4} \vee \left(S^6\right)^{\vee 3}$$

Возьмём в качестве W букет $(S^5)^{\vee 4} \vee (S^6)^{\vee 3}$.
W получается применением надстройки к букету $(S^4)^{\vee 4} \vee (S^5)^{\vee 3}$ (обозначим это пространство за $\Sigma^{-1}(W)$). Используя тот факт, что $H_*(\Omega\Sigma X) \simeq T\widetilde{H}_*(X)$ тензорной алгебре, получим, что каждая сфера в букете будет давать по одному порождающему элементу размерности сферы -1, так как $X = \Sigma^{-1}(W)$ тоже букет сфер размерностей на одну ниже, чем было у исходного букета. Отсюда следует, что $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ свободная алгебра на четырех четырехмерных, и трех пятимерных порождающих. Число порождающих найденных из алгебраического и топологического подходов не совпало.

Всё дело в том, что среди $[u_i, w_{jkl}]$ есть еще одно соотношение.

$$d\chi_{1234} = (\chi_1\chi_{234} + \chi_{234}\chi_1) + \cdots + (\chi_4\chi_{123} + \chi_{123}\chi_4) + \beta$$

в $\Omega_*\mathbf{k}\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$, где β состоит из мономов $\chi_\sigma\chi_\tau$ таких, что $|\sigma| = |\tau| = 2$. Обозначим первые слагаемые суммы справа за $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, α_4 соответственно, и продифференцируем обе части. Заметим, что $d\alpha_1 = -\chi_1\psi_{234} + \psi_{234}\chi_1 = -[\chi_1, \psi_{234}]$, и так же для $d\alpha_2, d\alpha_3$ и$d\alpha_4$, получим, что

$$[\chi_1, \psi_{234}] + [\chi_2, \psi_{134}] + [\chi_3, \psi_{124}] + [\chi_4, \psi_{123}] = d\beta\text{- цикл}$$

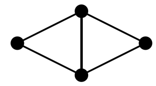
т.е. получено еще одно соотношение.
Получаем изоморфизм

$$H_*\left(\Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}\right) \cong T\left(u_1, u_2, u_3, u_4, w_{123}, w_{124}, w_{134}, w_{123}\right)/\mathcal{I},$$

где $\deg w_{ijk} = 4$ и $\mathcal{I}$ порождён тремя типами соотношений:

- соотношениями внешней алгебры для u_1, u_2, u_3, u_4;
- $[u_i, w_{jkl}] = 0$ for $i \in \{j, k, l\}$;
- $[u_1, w_{234}] + [u_2, w_{134}] + [u_3, w_{124}] + [u_4, w_{123}] = 0$.

w_{ijk} страшие коммутаторы для u_i, u_j and u_k, поэтому третье соотношение можно рассматривать как аналог равенства Якоби для обычных коммутаторов.

Пример 9. Пусть $\mathcal{K}$: 

Похожими рассуждениями можно получить, что алгебра Понтрягина $H_*\left(\Omega\left(\mathbb{C}P^\infty\right)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right)$ содержит одномерные классы $u_1,\ldots,u_4$, четырехмерные классы w_{123} и w_{234}, соответствующие двум недостающим сторонам и w_{14}, соответствующий недостающему ребру. u_4 коммутирует с w_{123}, а u_1 коммутирует с w_{234}. Проверим, коммутируют ли u_1 и w_{14}:

$$\chi_1\psi_{14} = \chi_1 d(\chi_{14}), \text{ где } \chi_{14} \text{ - несуществующий элемент}$$

$$d\chi_{114} = \chi_1\chi_{14} + \chi_{14}\chi_1 + \beta$$
$$0 = dd\chi_{114} = \chi_1 d\chi_{14} + d\chi_{14}\chi_1 + d\beta$$
$$\chi_1\psi_{14} + \psi_{14}\chi_1 = -d\beta$$

u_1 и w_{14} коммутируют. Аналогично u_4 и w_{14} коммутируют. Сделаем аналогичную проверку для u_2 и w_{14}:

$$\chi_2\psi_{14} = \chi_2 d(\chi_{14}), \text{ где } \chi_{14} \text{ - несуществующий элемент}$$

$$d\chi_{124} = \chi_1\chi_{24} + \chi_2\chi_{14} + \chi_4\chi_{12} + \chi_{24}\chi_1 + \chi_{14}\chi_2 + \chi_{12}\chi_4$$

нетривиальный, т.к. не является границей (ведь χ_{124} не существует). Аналогично u_3 и w_{14} не коммутируют.

Отсюда следует, что $H_*\left(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right)$ содержит два старших коммутатора $w_{123} = [u_1,u_2,u_3]$, $w_{234} = [u_2,u_3,u_4]$, один коммутатор $w_{14} = [u_1,u_4]$, и два итерированых коммутатора $[u_1,w_{234}]$ и $[u_4,w_{123}]$.

Ранее мы посчитали, чему гомотопически эквивалентен этот момент-угол комплекс:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq S^3 \vee S^5 \vee S^5 \vee S^6 \vee S^6$$

Получается, что $H_*\left(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}\right)$ свободная алгебра на одном двумерном, двух четырехмерных, и двух пятимерных порождающих.

Получаем изоморфизм

$$H_*\left(\Omega DJ(\mathcal{K});\mathbf{k}\right) \cong T\left(u_1,u_2,u_3,u_4,w_{123},w_{234}\right)/\mathcal{I},$$

где $\deg w_{ijk} = 4$ и $\mathcal{I}$ порождён тремя типами соотношений:

- соотн. внешней алгебры для u_1,u_2,u_3,u_4, кроме $u_1u_4 + u_4u_1 = 0$;
- $[u_i,w_{jkl}] = 0$, если какие-то индексы совпали

Доказать отсутвие других соотношений можно, например, сравнив ряды Пуанкаре полученной алгебры и пространства.

В силу расслоения имеет место следующее равенство:

$$F\left(H_*\left(\Omega DJ(\mathcal{K})\right);t\right) = F\left(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}});t\right)\cdot F(\Lambda[m];t)$$

Но мы знаем $F\left(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K});t\right)$, ведь $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ это букет сфер, а если $X = \bigvee_{k=1}^{n}\left(S^k\right)^{\vee l_k}$ то $F\left(H_*(\Omega X);t\right) = \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{n} l_k t^{k-1}}$, а $F(\Lambda[m];t)$ равна $(1+t)^4$, т.е.

$$F\left(H_*\left(\Omega DJ(\mathcal{K}\right);t\right) = \frac{(1+t)^4}{1-t^2-2t^4-2t^5}$$

Теперь найдем ряд Пуанкаре для описанной алгебры. Обозначим $u_1 = a, u_2 = b, u_3 = c, u_4 = d, w_{123} = u, w_{234} = v$. Тогда рассмотренная алгебра тогда примет вид

$$T\left(a,b,c,d,u,v\right)/\mathcal{I},$$

где $\mathcal{I}$ порожден следующими соотношениями:

$$ab+bc, ac+ca, bc+cb, bd+db, cd+dc;$$
$$\left[a,u\right], \left[b,u\right], \left[c,u\right], \left[b,v\right], \left[c,v\right], \left[d,v\right];$$
$$a^2, b^2, c^2, d^2;$$

Где степени a,b,c,d равны 1, а $\deg u = \deg v = 4$

Мы не будем уделять внимание смене знака при переходе от ab к ba и т.п., так как это не влияет на размерность соотвествующей градуированной компоненты. Чтобы посчитать размерность слов степени n, нам необходимо посчитать количество канонических слов, начинающихся с конкретных букв, а потом сложить их. Их можно задать следующими рекуррентными последовательностями. К примеру, за A_n мы обозначим количество канонических слов степени n, начинающиеся с буквы a и для остальных букв по аналогии. За T_n обозначим сумму всех слов степени n, т.е. размерность n-ой градуированной компоненты. Имеем $T_n = A_n + B_n + C_n + D_n + U_n + V_n$. Так как слово степени n начинающееся на a можно получить лишь приписыванием a к словам степени $n-1$, которые не начинаются на a, то получим рекуррентную формулу $A_n = T_{n-1} - A_{n-1}$. Для B_n по аналогии получаем $B_n = T_{n-1} - A_{n-1} - Bn - 1$, A_{n-1} вычли, так как при приписывании b к слову, начинающимуся на a, то при приведении слова к каноническому элементу они поменяются местами, то есть это не будет слово из B_n. Аналогично получим все остальные рекуррентные уравнения, и в итоге будем иметь:

$$A_n = T_{n-1} - A_{n-1}$$
$$B_n = T_{n-1} - A_{n-1} - B_{n-1}$$
$$C_n = T_{n-1} - A_{n-1} - B_{n-1} - C_{n-1}$$
$$D_n = T_{n-1} - B_{n-1} - C_{n-1} - D_{n-1} - B_{n-2} - C_{n-2}$$
$$U_n = T_{n-4} - A_{n-4} - B_{n-4} - C_{n-4}$$
$$V_n = T_{n-4} - B_{n-4} - C_{n-4} - D_{n-4} - B_{n-5} - C_{n-5}$$

Стоит обратить внимание, что в случае V_n мы вычитаем B_{n-5} и C_{n-5}. Легко видеть почему, хоть v и a не коммутируют, но $vab = vba = bva$. Похожая логика было использована в формуле для D_n.

При непосредственном счёте оказывается, что для всех n $U_n = V_n$ и $C_n = D_n$. Это происходит не случайно. Действительно, проверим равенство:

$$C_n = T_{n-1} - A_{n-1} - B_{n-1} - C_{n-1} \stackrel{?}{=} T_{n-1} - B_{n-1} - C_{n-1} - D_{n-1} - B_{n-2} - C_{n-2} = D_n$$

$$-A_{n-1} \stackrel{?}{=} -D_{n-1} - B_{n-2} - C_{n-2}$$

$$A_{n-1} - D_{n-1} \stackrel{?}{=} B_{n-2} + C_{n-2}$$

Подставляя рекурсивное выражение для A_{n-1} и D_{n-1}

$$T_{n-2} - A_{n-2} - (T_{n-2} - B_{n-2} - C_{n-2} - D_{n-2} - B_{n-3} - C_{n-3}) \stackrel{?}{=} B_{n-2} + C_{n-2}$$

$$T_{n-2} - A_{n-2} - (T_{n-2} - B_{n-2} - C_{n-2} - D_{n-2} - B_{n-3} - C_{n-3}) \stackrel{?}{=} B_{n-2} + C_{n-2}$$

$$D_{n-2} - A_{n-2} + B_{n-3} + C_{n-3} + B_{n-2} + C_{n-2} \stackrel{?}{=} B_{n-2} + C_{n-2}$$

$$A_{n-2} - D_{n-2} \stackrel{?}{=} B_{n-3} + C_{n-3}$$

Но при $n = 3$ имеем $A_1 - D_1 = B_0 + C_0$, а значит по индукции верно $A_{n-1} - D_{n-1} = B_{n-2} + C_{n-2}$. Подставим это в формулы для D_n и V_n. Теперь равенства $U_n = V_n$ и $C_n = D_n$ доказаны. Заметив, что $V_n = C_{n-3}$ и учитывая доказанное равенсво получим упрощенный вид рекурентных формул, а именно:

$$A_n = T_{n-1} - A_{n-1}$$
$$B_n = A_n - B_{n-1}$$
$$C_n = D_n = B_n - C_{n-1}$$
$$U_n = V_n = C_{n-3}$$

Подставив эти формулы в тождество $T_n = A_n + B_n + C_n + D_n + U_n + V_n$ и сократив всё лишнее получим

$$C_n - C_{n-1} + 2C_{n-3} = 0$$

Все рекуррентные формулы выражаются через C_n, для которого, в силу последнего равенства и учитывая $C_0 = 0, C_1 = 1, C_2 = 1, C_3 = 1$, мы можем получить производящую функцию $f_C(t) = \frac{t}{1-t-2t^4}$ последовательности $C_n, n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $T_n = 7C_{n-1} + C_{n-2} + 2C_{n-3} + 8C_{n-4}$, при $n > 4$. Выражая производящую функцию для T_n и подставляя начальные данные получим $f_T(t) = 1 + 4t + 7t^2 f_C(t) + t^3 f_C(t) + 2t^4 f_C(t) + 8t^5 f_C(t)$. Если подставить вместо $f_C(t)$ их функции, то окажется, что $f_T(t) = \frac{(1+t)^4}{1-t^2-2t^4-2t^5}$. Если бы существовало еще какое-то соотношение, то ряды Пуанкаре бы не совпали, а значит найдены все соотношения.

Список литературы

[1] V. Buchstaber and T. Panov, "Toric topology," *Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015*, 10 2012. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/1210.2368.pdf

[2] V. M. Buchstaber and T. Panov, "Torus actions determined by simple polytopes," 2000.

[3] J. Grbic, T. Panov, S. Theriault, and J. Wu, "Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes," *Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663-6682*, 11 2012. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/1211.0873.pdf

[4] T. Panov and N. Ray, "Categorical aspects of toric topology," *Contemp. Math., 460, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293-322.*, 07 2007. [Online]. Available: https://arxiv.org/pdf/0707.0300.pdf