Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа
студента 303 группы
Ковыршиной Виктории Алексеевны

Гомотопический тип момент-угол-комплексов для графов

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, май 2021

1 Введение

Гомотопические свойства момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ представляют большой интерес, в этой области есть уже много результатов и ещё много вопросов [3]. С этой точки зрения довольно важен класс B_{Δ} симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Полного комбинаторного описания симплициальных комплексов из этого класса пока нет, но известно, например, что B_{Δ} содержит направленные MF-комплексы [5], сдвинутые (shifted) и полностью заполняемые (totally fillable) комплексы [6, 7].

В одномерном же случае, то есть если Γ — граф, можно дать исчерпывающий ответ[1] на вопрос, когда $\Gamma \in B_{\Delta}$, а именно тогда и только тогда, когда Γ — хордовый (теорема 4.1). Более того, гомотопический тип $\mathcal{Z}_{\Gamma}$ для хордового Γ можно легко вычислить явно (следствие 4.5).

2 Хордовые графы

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, мы по умолчанию полагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ содержатся в $\mathcal{K}$.

Графом мы называем симплициальный комплекс, не содержащий симплексов размерности ≥ 2.

Определение 2.1. *Граф Γ называется хордовым, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними в цикле).*

Однако нам будет удобнее ещё одно описание хордовых графов:

Теорема 2.2 (см. [4]). *Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить таким образом, что для каждой вершины $\{i\}$ множество всех ее соседей, которые меньше ее, образует клику.*

Порядок вершин, описываемый теоремой 1.2, называется *совершенным порядком исключения.*

Введём несколько обозначений:
- для $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ обозначим за $\mathcal{K}_I$ (или же $\mathcal{K}_{\{i_1,\ldots,i_k\}}$) полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на вершинах $i_1, \ldots, i_k$, через $\mathcal{K} \setminus \{m\}$ обозначим $\mathcal{K}_{\{1,\ldots,m-1\}}$.
- определим симплициальный комплекс $\mathcal{K}'$ на $[m-1]$ как $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \setminus \{m\}$.

[1]Примечание: любой хордовый граф — это *вполне заполняемый* симплициальный комплекс, поэтому результат уже известен.

- будем обозначать как $\mathcal{K}_m$ полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на множестве, состоящем из $\{m\}$ и всех её соседей, и соответственно $\mathcal{K}'_m := \mathcal{K}_m \setminus \{m\}$.
- за n будем обозначать число соседей $\{m\}$ в $\mathcal{K}$.

Сформулируем несколько очевидных (с учётом теоремы 2.2) свойств хордового графа:

Предложение 2.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — хордовый граф на $[m]$, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения. Тогда:*

1°. *$\mathcal{K}'$ — тоже хордовый граф, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения;*

2°. *$\mathcal{K}_m$ и $\mathcal{K}'_m$ — клики в $\mathcal{K}$;*

3°. *$\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} = \mathrm{sk}^0(\mathcal{K}'_m)$, то есть $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$ — это n дизъюнктных точек.*

Далее по умолчанию считаем, что у всех хордовых графов вершины расположены в совершенном порядке исключения.

Теперь перейдём к рассмотрению момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

3 Несколько вспомогательных лемм

Следующие два факта будут нам полезны в дальнейшем.

Предложение 3.1. *Для пространств с отмеченной точкой A, B имеем:*

1°. *$\Sigma A \wedge B \simeq \Sigma(A \wedge B) \simeq A * B$;*

2°. *$\Sigma(A \times B) \simeq \Sigma A \vee \Sigma B \vee (\Sigma A \wedge B)$.*

Лемма 3.2 ([3], лемма 8.2.3)**.** *Пусть A, B, C, D — топологические порстранства. Определим Q из гомотопического кодекартова квадрата*

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\epsilon_A \times \mathrm{id}_B} & C \times B \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_A \times \epsilon_B}\downarrow & & \downarrow \\ A \times D & \longrightarrow & Q \end{array}$$

Тогда $Q \simeq (A * B) \vee (C \rtimes B) \vee (A \ltimes D)$.

Теперь рассмотрим произвольный хордовый граф $\mathcal{K}$. Заметим, что разложение $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \bigcup_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \mathrm{star}_{\mathcal{K}}\{m\}$ даёт кодекартов квадрат в категории симплициаьных комплексов.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{star}_{\mathcal{K}}\{m\} \arrow[d] \\ \mathcal{K}' \arrow[r] & \mathcal{K} \end{tikzcd}$$

Он индуцирует кодекартов квадрат полиэдральных произведений: (частный случай диаграммы (8) из [1])

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \times S^1 \arrow[r, "1\times i"] \arrow[d, "j\times 1"'] & \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \times D^2 \arrow[d] \\ \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \times S^1 \arrow[r] & \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \end{tikzcd} \tag{1}$$

Здесь i — вложение $S^1 \to D^2$, а $j : \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ — отображение момент-угол-комплексов, индуцированное вложением $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} \to \mathcal{K}'$ симплициальных комплексов на $[m-1]$.

Лемма 3.3. *Отображение $j : \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ гомотопно тривиальному для любого хордового графа $\mathcal{K}$.*

Доказательство этой леммы будет приведено позже, а сейчас рассмотрим её следствие.

Предложение 3.4. *$\mathcal{K}$ — хордовый граф, тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq \Sigma^2 \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \vee (\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \rtimes S^1)$.*

Доказательство. Так как отображение $i : S^1 \to D^2$ гомотопно тривиальному, то, с учётом леммы 3.3, можем применить лемму 3.2 к диаграмме (1), откуда получаем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \simeq (\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} * S^1) \vee (\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \rtimes S^1) \vee (\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \ltimes D^2)$.
Так как $A \ltimes D^2 \simeq pt$ и $A * S^1 \simeq \Sigma^2 A$, получаем желаемое. □

Будем обозначать как $\mathcal{Z}_{[m]^i}$ момент-угол-комплекс для симплициального комплекса $\mathrm{sk}^i(\Delta^{m-1})$ на $[m]$. По теореме 4.7.7 из [3] имеем, что

$$\mathcal{Z}_{[m]^i} \simeq \bigvee_{k=i+2}^{m} (S^{i+k+1})^{\vee C_m^k C_{k-1}^{i+1}}\,. \tag{2}$$

Тогда из пунктов 2° и 3° предложения 2.3 получаем

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \cong T^{m-1-n} \times \mathcal{Z}_{[n]^0} \quad \text{и} \quad \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'_m} \cong T^{m-1-n} \times \mathcal{Z}_{[n]^1}\,, \tag{3}$$

где $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$ и $\mathcal{K}'_m$ рассматриваются на множестве $[m-1]$.

Перейдём к доказательству леммы 3.3.

Доказательство. Рассмотрим вложение $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} \to \mathcal{K}'$, его можно разложить в композицию вложений

$$\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} \to \mathcal{K}'_m \to \mathcal{K}', \quad \text{где все комплексы рассматриваем на } [m-1].$$

Тогда с учётом (3) отображение $j : \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ раскладывается в композицию

$$j : T^{m-1-n} \times \mathcal{Z}_{[n]^0} \xrightarrow{1\times f} T^{m-1-n} \times \mathcal{Z}_{[n]^1} \xrightarrow{g} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} ,$$

где $f : \mathcal{Z}_{[n]^0} \to \mathcal{Z}_{[n]^1}$ — отображение, индуцированное вложением $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} \to \mathcal{K}'_m$ как симплициальных комплексов на множестве соседей $\{m\}$, т.е. на $\mathrm{sk}^0(\mathcal{K}'_m)$ без призрачных вершин.

Заметим, что $g = (g \circ \pi_1) \times (g \circ \pi_2)$, причём $g \circ \pi_1 : T^{m-1-n} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ гомотопно тождественному. Действительно, $\mathcal{Z}_{\varnothing} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопно тождественному для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ без призрачных вершин.

Теперь, чтобы доказать желаемое, достаточно доказать, что $f : \mathcal{Z}_{[n]^0} \to \mathcal{Z}_{[n]^1}$ гомотопно тождественному.

Из (2) мы знаем, что $\mathcal{Z}_{[n]^0}$ — букет сфер. Обозначим его через $\mathcal{Z}_{[n]^0} \simeq \bigvee_{\alpha} S^{n_\alpha}$, $n_\alpha \geq 3$, и через $i_\alpha : S^{n_\alpha} \to \mathcal{Z}_{[n]^0}$ обозначим вложение α-го слагаемого в этот букет. Тогда можно разложить f в букет отображений $f = \bigvee_\alpha f_\alpha$, где $f_\alpha = f \circ i_\alpha$. Докажем, что класс $[f_\alpha] = 0$ в $\pi_{n_\alpha}(\mathcal{Z}_{[n]^1})$ для всех α; это будет означать, что f гомотопно тривиальному.

Вспомним расслоение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ из теоремы 4.3.2 [3] и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_{[n]^0} \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "f"'] & (\mathbb{C}P^\infty)^{[n]^0} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & (\mathbb{C}P^\infty)^n \arrow[d, equal] \\
\mathcal{Z}_{[n]^1} \arrow[r, "h_1"] & (\mathbb{C}P^\infty)^{[n]^1} \arrow[r] & (\mathbb{C}P^\infty)^n
\end{tikzcd}$$

Так как $(\mathbb{C}P^\infty)^n \simeq K(\mathbb{Z}^n, 2)$, то из длинной точной последовательности расслоения получаем, что для $i = 0, 1$ отображение $(h_i)_* : \pi_k(\mathcal{Z}_{[n]^i}) \to \pi_k((\mathbb{C}P^\infty)^{[n]^i})$ есть изоморфизм при всех $k \geq 3$. Тогда для доказательства $[f_\alpha] = 0$ достаточно доказать, что $\widetilde{f} \circ h_0 \circ i_\alpha$ гомотопно тривиальному.

Гомотопическая группа $\pi_2((\mathbb{C}P^\infty)^{[n]^0}) \cong \mathbb{Z}^n$ имеет n канонических образующих, представленных отображениями

$$\widehat{\mu}_i : S^2 \to \mathbb{C}P^\infty \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\vee n} = (\mathbb{C}P^\infty)^{[n]^0}, \quad i = 1, \ldots, n ,$$

где отображение слева — вложение двумерной клетки, а отображение справа — вложение в i-е слагаемое букета.

Так как $\mathrm{sk}^1(\Delta^{n-1})$ содержит все рёбра $\{i,j\}$, то из предложения 8.4.2 [3] следует, что $\widetilde{f}_*[\widehat{\mu}_i,\widehat{\mu}_j]_w = 0$ для всех $i,j = 1,\dots n$, где $[\widehat{\mu}_i,\widehat{\mu}_j]_w$ — произведение Уайтхеда. Тогда $\widetilde{f}_*$ отображает в ноль и любые итерированные произведения Уайтхеда от образующих $\widehat{\mu}_i$.

Осталось доказать только, что $h_0 \circ i_\alpha$ есть какое-то итерированное произведение Уайтхеда. Однако это следует из работы [2] (так как $\mathcal{Z}_{[n]^0}$ удовлетворяет условию леммы 6.1 из [2]), что и завершает доказательство. □

Замечание 3.5. *Мы выяснили, что каноническое вложение момент-угол- комплексов $f : \mathcal{Z}_{[m]^i} \to \mathcal{Z}_{[m]^{i+1}}$ гомотопно тривиальному отображению при $i = 0$. Однако оно также будет гомотопно тривиальному при всех $i \geq 0$, что следует из работ* [6, 8] *(см. пример 3.5, теорему 3.6 в* [8]*).*

Действительно, любой скелет симплекса является сдвинутым (shifted) комплексом, а значит все сферы в букете $\mathcal{Z}_{[m]^i}$ представлены итерированными произведениями Уайтхеда вида $[[\dots[[\widehat{\mu}_{i_1},\dots,\widehat{\mu}_{i_p}],\widehat{\mu}_{j_1}],\dots,\widehat{\mu}_{j_{q-1}}],\widehat{\mu}_{j_q}]$, где $\{i_1,\dots,i_p\}$ — недостающая грань симплициального комплекса $[m]^i$, а $[\widehat{\mu}_{i_1},\dots,\widehat{\mu}_{i_p}]$ — соответствующее высшее произведение Уайтхеда. Так как $[m]^{i+1}$ содержит все недостающие грани $[m]^i$, то в обозначениях доказательства выше получаем $\widetilde{f}_*[\widehat{\mu}_{i_1},\dots,\widehat{\mu}_{i_p}] = 0$, откуда и следует, что f гомотопно тривиальному (в точности по аналогии с доказательством леммы 3.3).

4 Основной результат

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый граф на $[m]$. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентен букету сфер тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ хордовый.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $\mathcal{K}$ — хордовый. Будем доказывать индукцией по числу вершин в графе, что гомотопический тип $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — букет сфер. База индукции для графа на одной вершине очевидна.

Предположим, что для любого хордового графа Γ на $(m-1)$ вершине $\mathcal{Z}_\Gamma$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Тогда из предложения 2.3 получаем, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. В качестве следствия этого получаем $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \rtimes S^1 \simeq \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \vee \Sigma\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}$.

С учётом предложения 3.4 получаем

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \Sigma^2\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\mathcal{K}\{m\}} \vee (\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \rtimes S^1) \simeq \Sigma^2\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\mathcal{K}\{m\}} \vee \mathcal{Z}_{\mathcal{K}'} \vee \Sigma\mathcal{Z}_{\mathcal{K}'}\ .$$

Чтобы доказать, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер, достаточно доказать, что $\Sigma\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер.

С учётом (3), применяя предложение 3.1, получаем, что

$$\begin{aligned}\Sigma\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} &\cong \Sigma(T^{m-1-n} \times \mathcal{Z}_{[n]^0}) \simeq \\ &\simeq \Sigma T^{m-1-n} \vee \Sigma\mathcal{Z}_{[n]^0} \vee \Sigma T^{m-1-n} \wedge \mathcal{Z}_{[n]^0}\ ,\end{aligned}$$

где $\mathcal{Z}_{[n]^0}$ — букет сфер из (2), а ΣT^{m-1-n} букет сфер как надстрока над произведением сфер.
Следовательно, $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер, что завершает шаг индукции.

($\Rightarrow$) Теперь пусть $\mathcal{K}$ не является хордовым. Предположим, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер.

Выберем бесхордовый цикл C на $p \geq 4$ вершинах. Умножение в $H^*(\mathcal{Z}_C)$ нетривиально согласно теореме 4.6 из [2].

Так как C является полным подкомплексом в $\mathcal{K}$, то $\mathcal{Z}_C$ есть ретракт $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ ([1], лемма 4.2) и $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. При этом умножение в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ тривиально, а умножение в $H^*(\mathcal{Z}_C)$ нетривиально, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ не может быть гомотопически эквивалентен букету сфер. $\square$

Замечание 4.2. *Теорема 4.6.12 из [3] даёт явный вид*

$$\mathcal{Z}_C \cong \mathop{\#}_{k=3}^{p-1} (S^k \times S^{p+2-k})^{\#(k-2)C_{p-2}^{k-1}}\ .$$

Перепишем эту связную сумму как

$$\mathcal{Z}_C \cong \left(\bigvee_{k=3}^{p-1} (S^k \vee S^{p+2-k})^{\vee(k-2)C_{p-2}^{k-1}}\right) \cup_\varphi D^{p+2} \overset{\mathrm{def}}{=\!\!:} M \cup_\varphi D^{p+2}\ ,$$

где $\varphi : D^{p+2} \to M$ — отображение приклеивания клетки D^{p+2} по сумме произведений Уайтхеда $\sum\limits_{k=3}^{p-1}\sum_{i=1}^{(k-2)C_{p-2}^{k-1}}[a_i^k, b_i^k]_w$, где $a_i^k \vee b_i^k : S_i^k \vee S_i^{p+2-k} \to M$ — вложения соответствующих слагаемых в букет M.

Это позволяет явно вычислить $H^*(\mathcal{Z}_C)$ и убедиться в нетривиальности умножения, не прибегая к теореме 4.6 из [2].

Замечание 4.3. *Заметим, что для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ (уже не обязательно графа) наличие в $\mathcal{K}^1$ бесхордового цикла C на $p \geq 4$ вершинах является препятствием к тому, чтобы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ был букетом сфер, ведь C всегда является полным подкомплексом в $\mathcal{K}$.*

Таким образом, хордовость одномерного остова $\mathcal{K}^1$ является *необходимым* условием для того, чтобы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ был гомотопически эквивалентен букету сфер.

Теперь вычислим явно гомотопический тип $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для хордового графа $\mathcal{K}$, т.е. найдём число сфер в каждой размерности. Для этого нам понадобится следующий результат.

Теорема 4.4 ([3], теорема 8.3.5)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$ и пусть $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ — последовательность пар клеточных пространств таких, что все X_i стягиваемы. Тогда есть следующая гомотопическая эквивалентность:*

$$\Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{A})^\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} \Sigma\left(\bigvee_{J \notin \mathcal{K}} |\mathcal{K}_J| * \mathbf{A}^{\wedge J}\right) \tag{4}$$

Следствие 4.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — хордовый граф, тогда есть следующая гомотопическая эквивалентность:*

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \bigvee_{J \notin \mathcal{K}} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{2+|J|})^{\vee c_J^1} \ ,$$

где $c_J^i := \operatorname{rank} \widetilde{H}^i(\mathcal{K}_J)$.

Доказательство. Применяя предыдущую теорему нашему случаю $X_i = D^2$, $A_i = S^1$, получаем $\mathbf{A}^{\wedge J} = S^{|J|}$ и $|\mathcal{K}_J| * \mathbf{A}^{\wedge J} \simeq \Sigma|\mathcal{K}_J| \wedge S^{|J|} \simeq \Sigma^{1+|J|}|\mathcal{K}_J|$.

Следовательно, $\Sigma\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \Sigma\left(\bigvee\limits_{J \notin \mathcal{K}} \Sigma^{1+|J|}|\mathcal{K}_J|\right)$.

Так как $\mathcal{K}$ это граф, то $|\mathcal{K}_J|$ гомотопически эквивален дизъюнктному объединению букетов окружностей, причём $c_J^0 + 1$ — число компонент связности $|\mathcal{K}_J|$, а c_J^1 — общее число окружностей в букетах $|\mathcal{K}_J|$.

Следовательно, $\Sigma|\mathcal{K}_J| \simeq (S^1)^{\vee c_J^0} \vee (S^2)^{\vee c_J^1}$.

Тогда $\Sigma\mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \Sigma \bigvee\limits_{J \notin \mathcal{K}} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{2+|J|})^{\vee c_J^1}$.

Наконец, $\mathcal{K}$ — это *хордовый* граф, поэтому по теореме 3.1 $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — это букет сфер. Следовательно, в предыдущем равенстве слева и справа можно снять внешние надстройки, что и даёт желаемый результат. $\square$

Замечание 4.6. *Пусть $\mathcal{K}$ — хордовый граф, $\mathcal{K}^f$ — его флагификация, а $(\mathcal{K}^f)^i$ — её i-мерный скелет. Тогда есть следующая гомотопическая эквивалентность:*

$$\mathcal{Z}_{(\mathcal{K}^f)^i} \simeq \bigvee_{J \notin \mathcal{K}} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{1+i+|J|})^{\vee c_J^i} \ , \ \text{где } c_J^j := \operatorname{rank} \widetilde{H}^j(\mathcal{K}_J) \ .$$

Из замечания 3.5 и доказательства теоремы 4.1 следует, что $\mathcal{Z}_{(\mathcal{K}^f)^i}$ гомотопически эквивалентен букету сфер для всех $i \geq 0$, также $|\mathcal{K}_J|$ гомотопически эквивалентен дизъюнктному объединению букетов i-мерных сфер для всех $J \subset [m]$, поэтому доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство следствия 4.5.

Список литературы

[1] T. E. Panov, S. Theriault, «The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes», arXiv: 1709.00388v2.pdf.

[2] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, J. Wu, «The homotopy types of moment–angle complexes for flag complexes»// Trans. Amer. Math. Soc. 2016. V. 368, N 9. P. 6663–6682, arXiv: 1211.0873.pdf.

[3] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, «Toric Topology», Mathematical Surveys and Monographs 204, American Mathematical Society, 2015.

[4] D. R. Fulkerson, O. A. Gross, «Incidence matrices and interval graphs» , Pacific J.Math, 15:3 (1965), 835–855.

[5] J. Grbić, S. Theriault, «Homotopy theory in toric topology», Russian Mathematical Surveys, 2016, 71(2):185.

[6] K. Iriye, D. Kishimoto, «Polyhedral products for shifted complexes and higher Whitehead products»: E-print,2015. arXiv:1505.04892 [math.AT].

[7] K. Iriye, D. Kishimoto, «Whitehead products in moment–angle complexes»: E-print, 2018. arXiv:1807.00087[math.AT].

[8] S.A. Abramyan, T.E. Panov, «Higher Whitehead Products in Moment—Angle Complexes and Substitution of Simplicial Complexes», Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2019, 305, 1–2.