Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа
студентки 403 группы
Ковыршиной Виктории Алексеевны

Момент-угол-комплексы, простые многогранники и связные суммы произведений сфер

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, май 2021

Введение

Момент-угол-комплексы — интересный и важный класс пространств, отдельный интерес среди которых представляют те, которые соответствуют простым многогранникам P. Такие момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_P$ являются гладкими многообразиями с комплексной структурой; более того, они могут быть заданы как пересечение эрмитовых квадрик.

В своей работе я сосредоточу внимание на многогранниках P, которым соответствуют $\mathcal{Z}_P$, диффеоморфные или гомотопически эквивалентные связным суммам произведений сфер. Известны широкие классы многогранников (например, двойственные стековым, циклические), которым соответствуют момент-угол-комплексы, диффеоморфные связной сумме *пар* сфер (см. [1], [3]), однако пример P такого, что $\mathcal{Z}_P \cong M_1 \# M_2 \# \ldots \# M_k$, где все M_i это произведения сфер и хотя бы одно M_i содержит *более двух* слагаемых, появился относительно недавно (см. [4], [5]).

В этом направлении остаётся ещё много интересных вопросов. Основной результат моей курсовой сформулирован в теореме 3.3, где я доказываю, что в случае трехмерных многогранников $\mathcal{Z}_P$ является связной суммой произведений сфер тогда и только тогда, когда P^* стековый, и что это эквивалентно хордовости 1-остова нерв-комплекса $\mathcal{K}_P$.

1 Предварительные сведения и обозначения

Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, мы по умолчанию полагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ содержатся в $\mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ будем обозначать $\mathcal{K}_I$ (или же $\mathcal{K}_{\{i_1,\ldots,i_k\}}$) полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на вершинах $i_1, \ldots, i_k$.

$\mathcal{K}^i$ будем обозначать i-й остов симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующий $\mathcal{K}$, можно определить следующим образом (см. параграф 4.1 [1]):

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \subset \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right).$$

Графом мы называем симплициальный комплекс, не содержащий симплексов размерности ≥ 2.

Определение 1.1. *Граф* Γ *называется* <u>*хордовым*</u>*, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними в цикле).*

Нам будет удобнее ещё одно описание хордовых графов:

Теорема 1.2 (см. [2]). *Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить таким образом, что для каждой вершины* $\{i\}$ *множество всех ее соседей, которые меньше ее, образует клику.*

Порядок вершин, описываемый в данной теореме, называется <u>совершенным порядком исключения</u>.

Сформулируем несколько очевидных с учётом теоремы 1.2 свойств хордового графа:

Предложение 1.3. *Пусть* Γ *— хордовый граф на* $[m]$*, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения. Тогда:*

1°. $\Gamma \setminus \{m\}$ *— тоже хордовый граф, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения;*

2°. $\mathrm{link}_\Gamma\{m\}$ *— это дизъюнктное объединение вершин, а* $\Gamma_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}$ *— клика в* Γ*.*

Многогранник P размерности n называется <u>простым</u>, если каждая его вершина принадлежит ровно n его гиперграням. Соответственно, если P простой, то двойственный к нему многогранник P^* будет симплициальным; его границу ∂P^* можно рассматривать как симплициальный комплекс, который мы будем обозначать $\mathcal{K}_P$ (нерв-комплекс простого многогранника P). Соответствующий $\mathcal{K}_P$ момент-угол-комплекс обозначается $\mathcal{Z}_P$.

Простой многогранник Q является <u>стековым</u>, если он получается из симплекса цепочкой последовательных звёзных подразбиений гиперграней. Соотвественно, двойственный к стековому многогранник P получается из симплекса цепочкой последовательных срезок вершин.

Далее, если не оговорено противное, m будет обозначать количество гиперграней многогранника, а n — его размерность.

Теорема 1.4 ([1, теорема 4.1.4, следствие 6.2.5]). *Пусть* $\mathcal{K}$ *— триангуляция сферы размерности* $(n-1)$ *с* m *вершинами. Тогда* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ *— замкнутое топологическое многообразие размерности* $m+n$*.*

Пусть P — простой n-мерный многогранник с m гипергранями, тогда $\mathcal{Z}_P$ — гладкое многообразие размерности $m+n$.

2 Несколько вспомогательных утверждений

Следующая несложная лемма сыграет существенную роль в дальнейших доказательствах:

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, а $\mathcal{K}_J$ — полный подкомплекс, соответствующий $J \subset [m]$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ — ретракт $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, а $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$.*

Доказательство. Если профакторизовать $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ по всем координатам из множества $[m] \setminus J$, мы получим в точности $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$. Действительно, пусть $i : \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow (D^2)^m$ — каноническое вложение, а $q : (D^2)^m \to (D^2)^{|J|}$ — отображение факторизации слагаемых с номерами из множества $[m] \setminus J$, тогда $r = q \circ i : \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ и есть нужная ретракция. □

Теорема 2.2 (Теорема 4.5.8 из [1])**.** *Имеются изоморфизмы групп*

$$H^l(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J)$$

и изоморфизм колец $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus\limits_{J \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$, где структура умножения в кольце справа задается каноническими отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \otimes H^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \longrightarrow H^{k+l-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I \cup J}),$$

индуцированными симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I\cup J} \to \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ в случае $I \cap J = \varnothing$ и нулем иначе.

Следствие 2.3. *Если размерности всех симплексов $\mathcal{K}$ не превосходят n, то когомологическая длина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ не превосходит $n+1$.*

Доказательство. Пусть есть r элементов $c_i \in H^{l_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ таких, что $c_1 \cdot \ldots \cdot c_r = c \neq 0$. Тогда по теореме выше каждому c_i соответствует элемент $\hat{c}_i \in \widetilde{H}^{l_i-|J_i|-1}(\mathcal{K}_{J_i})$ для некоторого $J_i \subset [m]$, а элементу c соответствует $\hat{c} \in \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$, причём $\hat{c}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{c}_r = \hat{c} \neq 0$ и соответственно $l = (\Sigma_{i=1}^r l_i - |J_i|) - 1$, а $J = J_1 \sqcup \ldots \sqcup J_r$. Заметим, что $l_i - |J_i| - 1 \geq 0$ (так как это размерности $\hat{c}_i$), при этом по условию $\mathcal{K}$ не содержит симплексов размерности больше n, следовательно $l \leq n$. Получаем неравенство $n \geq j = (\Sigma_{i=1}^{r} l_i - |J_i|) - 1 \geq r - 1$, а значит $n + 1 \geq r$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2.4 (Теорема 4.6.12 из [1]). *Пусть $\mathcal{K}$ — граница стекового многогранника размерности n с $m > n+1$ вершинами. Тогда соответствующее момент-угол многообразие гомеоморфно связной сумме произведений сфер,*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-n+1} (S^k \times S^{m+n-k})^{\#(k-2)C_{m-n}^{k-1}}$$

Заметим, что любой двумерный многогранник является двойственным к стековому, поэтому соответствующие многоугольникам момент-угол-комплексы являются связными суммами произведений пар сфер.

3 Основные результаты

Определение 3.1. *Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ называется <u>голодовым</u>, если умножение и все высшие операции Масси в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ тривиальны.*

Определение 3.2. *Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ называется <u>минимально неголодовым</u>, если $\mathcal{K}$ не является голодовым, однако для любой вершины $v \in [m]$ комплекс $\mathcal{K} \setminus \{v\}$ уже голодовый.*

Основным результатом моей курсовой работы является следующая теорема:

Теорема 3.3. *Пусть P — трёхмерный простой многогранник, не являющийся кубом; тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *P получается из симплекса Δ^3 последовательной срезкой вершин, то есть P^* — стековый многогранник;*

(b) *$\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.*

(c) *$H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер.*

(d) *1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф.*

(e) *$\mathcal{K}_P$ минимально неголодов.*

Доказательство теоремы разобьем на леммы.

Лемма 3.4. *Пусть P — трёхмерный простой многогранник такой, что 1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф. Тогда P^* является стековым, то есть P получается из симплекса некоторым количеством срезок вершин.*

Доказательство. Докажем это индукцией по m — количеству граней P. База при $m = 4$ очевидна (тогда P — симплекс).

Сделаем шаг индукции: пусть P имеет m граней, а для многогранников с меньшим числом граней мы уже всё доказали. Докажем, что P тоже получается из Δ^3 некоторым количеством срезок вершин.

Считаем, что вершины $\mathcal{K}_P$ пронумерованы в совершенном порядке исключения. Пусть вершина со старшим номером m имеет s смежных с ней вершин. Докажем, что при $\dim(P) = 3$ обязательно должно быть $s = 3$.

Обозначим $j_1, \ldots, j_s$ номера соседей вершины $\{m\}$. Все вершины $\{j_r\}$ попарно соединены ребрами, то есть образуют клику (пункт 2° предложения 1.3). Вершина $\{m\}$ соответствует какой-то грани Γ_m многогранника P, эта грань s-угольная и смежна с гранями Γ_{j_r}, соответствующими вершинам $\{j_r\}$, $r = 1, \ldots, s$. При этом все грани Γ_{j_r} также попарно смежны.

При $s \geq 4$ рассмотрим грани $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \Gamma_{j_3}, \Gamma_{j_4}$. Можем считать, что они расположены вокруг Γ_m "по часовой стрелке", то есть Γ_{j_2} лежит между Γ_{j_1} и Γ_{j_3}, а Γ_{j_3} лежит между Γ_{j_2} и Γ_{j_4}, а следовательно $\Gamma_m \cap \Gamma_{j_1} \cap \Gamma_{j_3} = \varnothing$ и $\Gamma_m \cap \Gamma_{j_2} \cap \Gamma_{j_4} = \varnothing$. Покажем, что Γ_{j_1} с Γ_{j_3} и Γ_{j_2} с Γ_{j_4} не могут быть смежны одновременно: предположим, что Γ_{j_1} смежна с Γ_{j_3}, тогда грани $\Gamma_m, \Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_3}$ образуют 3-пояс, удаление которого из P разделит P на две компоненты связности (теорема Жордана или см. пункт 4 леммы 4 из [6]), причём Γ_{j_2} и Γ_{j_4} будут лежать в разных компонентах, а значит они не могут быть смежны — противоречие.

Итак, получили, что $s = 3$, а значит Γ_m треугольная. Если Γ_m смежна хоть с одной треугольной гранью, то P — симплекс, а если нет, то существует многогранник P', из которого P получается срезкой вершины с образованием грани Γ_m (см. лемму 1 из [6]). Так как $\mathcal{K}_{P'}$ получается из $\mathcal{K}_P$ удалением вершины $\{m\}$ и добавлением симплекса $\{j_1, j_2, j_3\}$, то 1-остов $\mathcal{K}_{P'}$ снова хордовый согласно пункту 1° предложения 1.3.

При этом P' имеет $m - 1 < m$ граней, а значит, для него верно предположение индукции и P' получается из симплекса несколькими срезками вершин; так как P получается из P' срезкой вершины, то получается, что это утверждение верно и для P, шаг индукции сделан. □

Лемма 3.5. *Пусть P — простой многогранник размерности $n > 2$ такой, что кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$ совпадает с кольцом когомологий связной суммы произведений <u>пар</u> сфер. Тогда 1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф.*

Доказательство. Пусть m — число граней P. По условию теоремы $H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*(M_1 \# M_2 \# \ldots \# M_k)$, где $M_i = S^{l_i} \times S^{m+n-l_i}$, а значит $H^*(\mathcal{Z}_P)$ порождено образующими $\{(a_i, b_i) \mid \deg(a_i) = l_i,\ \deg(b_i) = m + n - l_i,\ i = 1, \dots, k\}$, соответствующими слагаемым-сферам, и фундаментальным классом c, $\deg(c) = m+n$. Оно имеет k соотношений: $a_i \cdot b_i = c$ для $i = 1, \dots, k$, а все остальные умножения в этом кольце нулевые.

Предположим, что в $\mathcal{K}_P$ есть бесхордовый цикл C на $p > 3$ вершинах. Тогда C — полный подкомплекс в $\mathcal{K}_P$, следовательно $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ по лемме 2.1. По теорме 2.4 $\mathcal{Z}_C$ тоже является связной суммой пар сфер и соответственно в кольце $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть нетривиальные умножения $a'_j \cdot b'_j = c'$, где c' соответствует фундаментальному классу $\mathcal{Z}_C$ и $\deg(c') = |C| + 2 \leq m + 2 < m + n = \deg(c)$, чего не может быть в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ — получаем противоречие с тем, что $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_P)$.

Значит, в $\mathcal{K}_P$ нет бесхордовых циклов более чем с тремя вершинами, а это и означает, что $(\mathcal{K}_P)^1$ — хордовый граф. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.3.

Доказательство. Лемма 3.4 даёт нам $(d) \Rightarrow (a)$, теорема 2.4 даёт $(a) \Rightarrow (b)$, а следствие $(b) \Rightarrow (c)$ очевидно.

Докажем $(c) \Rightarrow (d)$:
пусть $H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*(M_1 \# M_2 \# \dots \# M_k)$, где все M_i это произведения сфер.

Больше $dim(P) = 3$ слагаемых ни в каком M_i быть не может, так как этого не позволяет когомологическая длина $\mathcal{Z}_P$ (см. следствие 2.3). Если же какое-то M_i имеет ровно три слагаемых, то P — куб: это следует из доказательства пункта (a) теоремы 4.3 из [4] (в случае $n = 2$ оттуда получаем, что $\mathcal{K}_P$ — граница октаэдра, а $\mathcal{Z}_P \simeq S^3 \times S^3 \times S^3$).

Значит, все M_i содержат только по два слагаемых, тогда мы можем применить лемму 3.5, это завершает доказательство $(c) \Rightarrow (d)$.

Докажем $(e) \Rightarrow (d)$ от противного:
$\mathcal{K}_P$ минимально неголодов, пусть он содержит бесхордовый цикл C на $p > 3$ вершинах. Заметим, что C — полный подкомплекс в $\mathcal{K}_P$ и что $p < m$ (потому что $p = m$ означало бы, что $\mathcal{K}_P = C$). Возьмем произвольную вершину $v \in [m] \setminus C$, тогда C — полный подкомплекс в том числе и в $\mathcal{K}_P \setminus \{v\}$. Значит, $H^*(\mathcal{Z}_C)$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P \setminus \{v\}})$ по лемме 2.1. Однако в $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть нетривиальные умножения (см. 2.4), а в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P \setminus \{v\}})$ все умножения должны быть нулевыми, так как комплекс $\mathcal{K}_P \setminus \{v\}$ голодов — противоречие.
Значит, таких циклов в $\mathcal{K}_P$ быть не может, то есть $(\mathcal{K}_P)^1$ — хордовый граф.

Утверждение $(a) \Rightarrow (e)$ следует из доказанного в работе [7] критерия минимальной неголодовости обобщенных многогранников усечения (т.е. многогранников, получаемых срезками вершин из произведения симплексов), согласно которому для стекового $P^* \neq \Delta^n$ комплекс $\mathcal{K}_P$ всегда минимально неголодов. $\square$

Замечание 3.6. *В случае* $\dim(P) = 3$ *идейно несложным упражнением является доказательство* (d) $\Rightarrow$ (e) *напрямую (его можно провести по индукции), однако технически это было бы громоздко, поэтому я ссылаюсь на общий критерий из [7], который интересен сам по себе.*

Закономерно возникает вопрос: а в случае $\dim(P) > 3$ достаточно ли хордовости 1-остова $\mathcal{K}_P$ для того, чтобы $\mathcal{Z}_P$ было гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер?

Предложение 3.7. *В размерности* 5 *и выше условие хордовости* 1*-остова* $\mathcal{K}_P$ *<u>недостаточно</u> для того, чтобы* $\mathcal{Z}_P$ *было связной суммой произведений сфер.*

Доказательство. Обозначим через Q многогранник, получаемый из Δ^3 срезкой двух вершин (Q называют также 5-книжкой). Тогда из теоремы нам известно, что

$$\mathcal{Z}_Q \cong (S^3 \times S^6)^{\#3} \# (S^4 \times S^5)^{\#2}\,.$$

Рассмотрим многогранники вида $P_d = Q \times \Delta^d$, где $d \geq 2$; размерность P_d равна $3 + d$, соответственно многогранники такого вида существуют в любой размерности, начиная с пяти.

Так как $\mathcal{Z}_{P_d} = \mathcal{Z}_Q \times \mathcal{Z}_{\Delta^d} = \mathcal{Z}_Q \times S^{2d-1}$, то $\mathcal{Z}_{P_d}$ очевидно не является связной суммой произведений сфер; но тем не менее, $(\mathcal{K}_{P_d})^1$ — хордовый граф. Действительно, $\mathcal{K}_{P_d} = \mathcal{K}_Q * \partial\Delta^d$, поэтому множество недостающих ребер $(\mathcal{K}_{P_d})^1$ совпадает с множеством недостающих ребер $(\mathcal{K}_Q)^1$, а $(\mathcal{K}_Q)^1$ имеет всего три недостающих ребра, причем никакие два из них в $(\mathcal{K}_{P_d})^1$ не образуют бесхордовый 4-цикл, а наличие бесхордового цикла с бóльшим числом вершин требует хотя бы пять недостающих рёбер. $\square$

Вопрос для размерности 4 пока что остаётся открытым.

4 Благодарности

Выражаю огромную благодарность моему научному руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за чуткое руководство, помощь и поддержку, за постановку задач и продуктивное обсуждение.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, «Toric Topology», Mathematical Surveys and Monographs 204, American Mathematical Society, 2015.

[2] D. R. Fulkerson, O. A. Gross, «Incidence matrices and interval graphs» , Pacific J.Math, 15:3 (1965), 835–855.

[3] Samuel Gitler, Santiago López de Medrano, «Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums». Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.

[4] Feifei Fan, Liman Chen, Jun Ma, Xiangjun Wang, «Moment-angle manifolds and connected sums of sphere products» arXiv:1406.7591.pdf

[5] Kouyemon Iriye, «On the moment-angle manifold constructed by Fan, Chen, Ma, and Wang» arXiv:1608.02673.pdf

[6] Н. Ю. Ероховец, «k-пояса и рёберные циклы трёхмерных простых многогранников с не более чем шестиугольными гранями», Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 197–213

[7] И. Ю. Лимонченко, «Кольца Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент–угол-многообразия», Алгебраическая топология, выпуклые многогранники и смежные вопросы, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 286, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2014, 207–218; Proc. Steklov Inst. Math., 286 (2014), 188–197, doi