Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Когомологическая жесткость торических многообразий над кубом со срезанной вершиной

Лежнев В.А.
303 уч. группа
Научный руководитель:
Панов Т.Е.

Москва
2024

Содержание

1. Введение

Торическим алгебраическим многообразием V комплексной размерности n называется коплексное *нормальное* алгебраическое многообразие, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^\times)^n$ как открытое по Зарисскому подмножество, при этом действие тора на себе продолжается до действия на всем V.

Мы будем рассматривать только *неособые полные* торические многообразия, и будем говорить, что многообразие M над многогранником P, если пространство орбит M по действию компактного тора гомеоморфно P как многообразие с углами.

Будем говорить, что семейство замкнутых многообразий называется *когомологически жестким*, если изоморфизм колец когомологий $H^*(M) \cong H^*(M')$ влечет диффеоморфизм $H \cong H'$ для любых двух многобразий из этого семейства.

Примерами таких многобразий служат многобразия Ботта, которые являются торическими многообразиями наб кубами I^n. Кроме этого известно, что семейство торических многообразий над кубами I^n когомологически жесткое [2].

Мы задаемся вопросом: Является ли семейство торических многообразий над 3-многогранниками когомологически жестким? В данной работе, опираясь на [1], представлен ответ на данный вопрос в случае семейства торических многообразий над трехмерным кубом со срезанной вершиной, который мы будем обозначать $\mathrm{vc}\, I^3$.

2. Веера

Как известно торические многобразия хороши тем, что их алгебро-геометрические свойства выражаются на языке комбинаторики и выпуклой геометрии.

Определение 2.1. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ - евклидовое пространство, а $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ - целочисленная решетка. *Конусом* σ порожденным векторами $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n$ назовем

$$\sigma = \{r_1\mathbf{v}_1 + \cdots + r_s\mathbf{v}_s \in \mathbb{R}^n \mid r_i \in \mathbb{R}^n_{\geq}\}$$

Конус называется *рациональным*, если порождающие вектора можно выбрать из $\mathbb{Z}^n$, и *неособым*, если он порождается частью базиса решетки $\mathbb{Z}^n$. Мы будем рассматривать только *строго выпуклые* конусы, т.е. такие которые не содержат в себе прямой.

Определение 2.2. *Веер* это набор Σ конусов $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ такой, что грани конусов снова конусы из Σ и любые два конуса либо не пересекаются, либо пересекаются по общей грани.

Веер называется *полным*, если объединение всех конусов из него равно всему $\mathbb{R}^n$. Веер называется *неособым*, если все его конуса неособые.

Контрукция 2.1. По вееру Σ с m одномерными конусами можно сопоставить симплициальный комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ на множестве вершин $[m]$. По определению будем считать, что $\{i_1, \cdots, i_k\} \subseteq [m]$ - симплекс в $\mathcal{K}_\Sigma$ тогда и только тогда, когда $\{\mathbf{v}_{i_1}, \cdots, \mathbf{v}_{i_k}\}$ - определяет конус в Σ. Такой комплекс $\mathcal{K}_\Sigma$ будем называть симплициальным комплексом веера Σ.

Далее мы будем рассматривать только *неособые* (гладкие) *полные* (компактные в обычной топологии) торические многообразия, они соответсвуют неособым полным веерам, и мы будем говорить, что многообразие M над многогранником P, если пространство орбит M по действию компактного тора гомеоморфно P как многообразие с углами.

3. Кольца когомологий

3.1. **Классификация характеристических матриц.** Составим характеристическую матрицу для торического многообразия M над $\mathrm{vc}(I^3)$. Для этого рассмотрим веер Σ_M соответсвующий M, его симплициальный комплекс изоморфен граничному комплексу симлициального многогранника, который двойственнен к $\mathrm{vc}(I^3)$. Обозначим его через $\mathcal{K}$ и занумеруем вершины как на картинке.

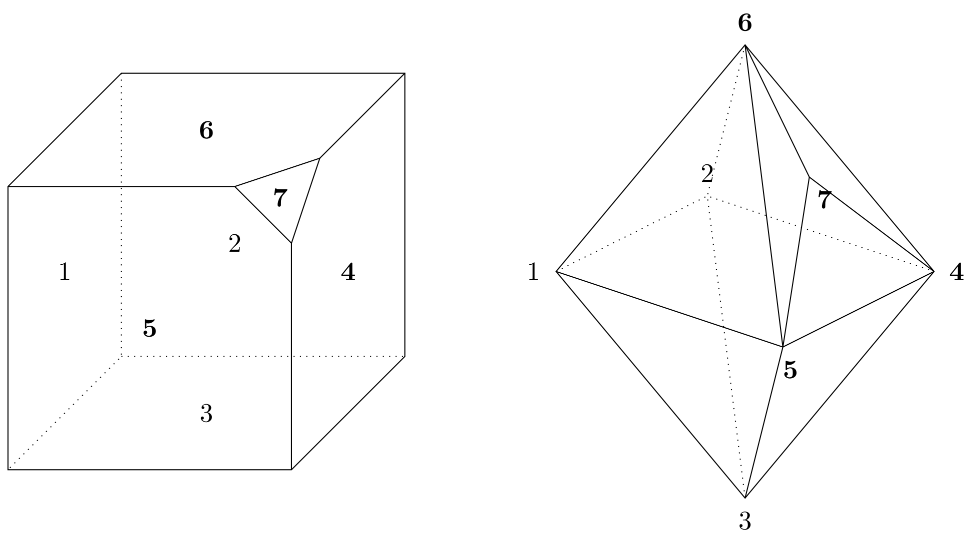

Рис. 1. $\mathrm{vc}(I^3)$ и $\mathcal{K} = \partial(\mathrm{vc}(I^3)^*)$

Для составления характеритической матрицы рассмотрим примитивные вектора вдоль ребер веера Σ_M, обозначим их через $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_7\}$. Первые 3 из них образуют базис решетки $N \cong \mathbb{Z}^3$, так как $\{1, 2, 3\}-$ симплекс в $\mathcal{K}$. Поэтому можно разложить оставшиеся через них:

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\Lambda^* \tag{3.1}$$

Рассмотрим подматрицу A выражающую $\{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ через $\{-\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_3\}$, т.е.

$$(\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)A \tag{3.2}$$

Таким образом $\Lambda^* = (A \mid \lambda)$, где $\mathbf{b}$ - приписанный к A вектор-столбец, выражающий $\mathbf{v}_7$ через $\{-\mathbf{v}_1, -\mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_3\}$, т.е.

$$\mathbf{v}_7 = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{b} \tag{3.3}$$

Далее будем работать с матрицей A и вектором $\mathbf{b}$.

Утверждение 3.1. *Все собственные главные миноры матрицы A равны* 1.

Доказательство. Рассмотим $I \subset \{1, 2, 3\}$ и определим

$$i(I) = \begin{cases} 3 + i & \text{если } i \in I, \\ i & \text{если } i \notin I. \end{cases}$$

Если $I \neq [3]$, то $\{1(I), 2(I), 3(I)\}$ является симплексом в $\mathcal{K}$, а значит $\{\mathbf{v}_{1(I)}, \mathbf{v}_{2(I)}, \mathbf{v}_{3(I)}\}$ образуют базис решетки N. Поэтому, матрица A_I определенная как

$$(\mathbf{v}_{1(I)}, \mathbf{v}_{2(I)}, \mathbf{v}_{3(I)}) = -(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)A_I$$

является унимодулярной, когда $I \subset \{1, 2, 3\}$.

Теперь, если $I \subsetneq J \subsetneq \{1, 2, 3\}$ и $J \backslash I$ состоит только из одного элемента, тогда $\mathrm{cone}(\{1(I), 2(I), 3(I)\})$ и $\mathrm{cone}(\{1(J), 2(J), 3(J)\})$ смежные и их пересечение является гранью коразмерности 1 для каждого. Из этого следует, что $\det A_I$ и $\det A_J$ имеют разные знаки.

Отметим, что $A_\emptyset = E$, а $A_{\{i\}}$ является E с i-ым столбцом замененным на i-ый столбец матрицы A. Поскольку $\det A_\emptyset = (-1)^3$ и $\det A_{\{i\}} = (-1)^{3-1}a_{ii}$, где a_{ii} является (i,i)-элементом матрицы A, и они имеют разные знаки, следовательно $a_{ii} = 1$.

В общем случае, $\det(A_I)$ - главный минор матрицы A умноженный на $(-1)^{3-|I|}$. Тогда, рассмотрев случай $|I| = 2$ и пользуясь соображениями выше, получаем, что все собственные главные миноры матрицы A равны 1. □

Заметим, что в $\mathcal{K}$ есть особая вершина $\{7\}$, она является единственной вершиной степени 3, $\{1, 2, 3\}$ является единственным симплексом, который не пересекается с линком этой вершины. Рассмотрим произвольный автоморфизм $\mathcal{K}$, он обязан оставлять вершину $\{7\}$ неподвижной, а симплекс $\{1, 2, 3\}$ соответственно переводить в себя. Более того, любой такой автоморфизм $\mathcal{K}$ индуцирован некоторой перестановкой σ из S_3: $\sigma\colon 3 + i \mapsto 3 + \sigma(i)$.

Для каждой перестановки $\sigma \in S_3$ определим A_σ следующим образом:

$$(\mathbf{v}_{3+\sigma(1)}, \mathbf{v}_{3+\sigma(2)}, \mathbf{v}_{3+\sigma(3)}, \mathbf{v}_7) = -(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \mathbf{v}_{\sigma(3)})A_\sigma \tag{3.4}$$

Матрицу A_σ будем называть сопряженной к A перестановкой σ.

Теперь мы можем воспользоваться следующей леммой:

Лемма 3.2. [3, Лемма 7.8.9] *Пусть R- коммутативное целостное кольцо с 1 и пусть A - некоторая $(n \times n)$-матрица с элементами из R. Предположим, что каждый собственный главный минор матрицы A равен* 1. *Если* $\det(A) = 1$, *то матрица A - сопряжена при помощи перестановки унипотентной нижнетреугольной матрице. В противном случае матрице вида*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

где $\det(A) = 1 + (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} a_i$ *и все a_i-ые ненулевые поскольку* $\det(A) \neq 1$.

Веер Σ_M определяет матрицу A с точностью до сопряжения перестановкой σ. В частности значение $\det(A)$ является инвариантом веера Σ_M. Можно сказать больше.

Утверждение 3.3. *Пусть* $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b})$ *- матрица, которая определяет веер над* $\mathcal{K}$*. Тогда матрицы* Λ^* *делятся на четыре типа, в зависимости от значения* $\det(A)$*.*
1. $(\det(A) = 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \textit{с} \;\; b_1 + b_2 + b_3 = 1.$$

2. $(\det(A) = 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 1 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

где $\mathbf{a}_i$ *-* $i-$*ый столбец матрицы* A*.*
3. $(\det(A) = 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 0 & a_3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{2},$$

где $\mathbf{a}_i$ *-* $i-$*ый столбец матрицы* A*, а* $a_i = \pm 1$ *и число* a_i*-ых равных* 1 *нечетно.*
4. $(\det(A) \neq 0, 1, 2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad a \neq 0, \pm 1, \qquad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{\det(A)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{a}_i$ *-* $i-$*ый столбец матрицы* A*.*

Доказательство. Заменим i-ый столбец матрицы A на вектор-столбец $\mathbf{b}$ и разложим определитель полученной матрицы A_i по i-ому столбцу:

$$\det(A_i) = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + b_3 A_{3i} \tag{3.6}$$

Так как каждый 3-мерный конус содержащий $\mathbf{b}$ является неособым, то определитель выше равен 1 с точностью до знака, без ограничения общности можем считать, что он действительно равен 1. Теперь, если мы обозначим через $\tilde{A}$ квадратную матрицу чей (i, k)-элемент равен алгебраическому дополнению A_{ki}, то получим

$$\tilde{A}\mathbf{b} = \mathbf{1}, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{1} = (1, 1, 1)^T$. Заметим, что $A\tilde{A} = (\det A)E$

Сначала разберемся со случаем $\det(A) = 0$. Согласно Лемме 3.2 A имеет вид (3.5) и $A\tilde{A}$ является нулевой матрицей размера 3×3. Обозначив через $\mathbf{r}_i$ i-ую вектор-строку матрицу $\tilde{A}$, получим

$$\mathbf{r}_1 + a_1 \mathbf{r}_3 = 0$$
$$\mathbf{r}_2 + a_2 \mathbf{r}_1 = 0$$
$$\mathbf{r}_3 + a_3 \mathbf{r}_2 = 0$$

Следовательно добавляя $(i-1)$-ую строку умноженную на a_i к i-ой строке в $(\tilde{A} \mid \mathbf{1})$ от $i = 3$ до $i = 2$, мы получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + a_3 \end{pmatrix},$$

где $*$ - целые. $\operatorname{rank}(\tilde{A} \mid \mathbf{1}) = \operatorname{rank} \tilde{A}$, поскольку $\mathbf{b}$ - решение $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{1}$. Следовательно $a_2 = a_3 = -1$. При этом $a_1 = -1$, поскольку $\det(A) = 1 + a_1 a_2 a_3 = 0$. Следовательно, $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = b_1 b_2 b_3$ и $b_1 b_2 b_3 = 1$.

Теперь разберемся со случаем $\det(A) \neq 0$. Поскольку $A\tilde{A} = (\det(A))E$, то из (3.7) следует, что $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3}{\det(A)}$ вне зависимости от значения $\det(A)$.

Когда $\det(A) = 1$, Лемма 3.2 дает вид матрицы из утверждения.

Если $\det(A) = 2$, то из того, что $\det(A) = 1 + a_1 * a_2 * a_3 = 2$ и a_i-ые целые, получаем $a_i = \pm 1$ для $i = 1, 2, 3$ и число a_i-ых равных 1 нечетно.

Теперь разберем случай $\det(A) \neq 0, 1, 2$ Докажем следующее: При $\det(A) \neq 0, 1, 2$ число a_i-ых равных -1 равно 2 и ровно один не равен $0, \pm 1$.

Спроецируем веер Σ на $\mathbb{Z}^3/\langle \mathbf{a}_1 \rangle$. Тогда полученный веер Σ' определяется по матрице

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det(A') = \det(A) \neq 0, \pm 1$. Утверждение свелось к двумерному случаю.

В двумерном случае мы имеем

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_4) = (-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & b_1 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 & b_2 & 1 \end{bmatrix},$$

и

$$\det(\mathbf{a}_1 \mathbf{b}) = b_2 - a_2 b_1 = 1 \text{ и } \det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2) = b_1 - a_1 b_2 = 1$$

из (3.6). Это означает, что примитивные векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_4$ расположены против часовой стрелки и любая пара последовательных векторов в нем образует базис $\mathbb{Z}^2$, они образуют двумерный полный неособый веер. Значит, согласно [5, pages 42–44], существуют целые $c_1, \ldots, c_5$ удовлетворяющие равенствам

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = c_2 \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5 = c_3 \mathbf{v}_3, \\ &\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = c_4 \mathbf{v}_5,\ \mathbf{v}_5 + \mathbf{v}_1 = c_5 \mathbf{v}_4,\ \mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_2 = c_1 \mathbf{v}_1, \\ &\sum_{i=1}^{5} c_i = 3 \times 5 - 12 = 3. \end{aligned}$$

Учитывая выше сказанное, находим:

$$c_1 = -a_1,\ c_2 = -a_2,\ c_3 = b_1,\ c_4 = 1 - a_1 a_2,\ c_5 = b_2, \tag{3.8}$$

что вместе с последним равенством показывает, что $a_1 a_2 (a_1 + 1)(a_2 + 1) = 0$. Теперь из условия $\det(A) = 1 - a_1 a_2 \neq 0, 1, 2$, получаем, что ровно один из $\{a_1, a_2\}$ равен -1, а другой отличается от $0, \pm 1$.

Повторяя эту процедуру для $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$, получим, что в множествах $\{a_3, -a_1 a_2\}, \{a_1, -a_2 a_3\}$ и $\{a_2, -a_3 a_1\}$ равно по одной (-1), а другие отличаются, от $0, \pm 1$. Из этого следует утверждение, которые хотели доказать.

Наконец, мы можем переставить циклической перестановкой элемент $a \neq 0, \pm 1$ на $(1, 3)$ позицию, ведь циклическая перестановка из S_3 сохраняет вид матрицы A из (3.5) и переставляет a_i-ые циклично. Это доказывает случай 4. □

3.2. **Необходимые сведения про кольца когомологий.** Для подсчета колец когомологий будем пользоваться теоремой Данилова-Юркевича.

Теорема 3.4 (Данилов - Юркевич)**.** [3, Теорема 5.3.1] *Кольцо когомологий $H^*(M)$ изоморфно $\mathbb{Z}[\mu_1, \ldots, \mu_m]/\mathcal{I}$ как градуированное кольцо, где $\mu_i \in H^2(M)$ - классы когомологий, двойственные к ивариантным дивизорам соответсвующим одномерным конусам веера Σ_M, а $\mathcal{I}$ - идеал порожденный следующими двумя элементами:*

(1) $\prod_{i \in I} \mu_i \quad (I \notin \mathcal{K})$, *и*

(2) $\sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle \mu_i$ *для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^n$, где $\mathbf{v}_i$ - примитивные вектора вдоль ребер веера Σ_M, где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает стандартное скалярное произведение на $\mathbb{Z}^n$.*

Так как веер Σ определяется матрицей $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b})$, далее мы будет обозначать торическое многообразие M через $M(\Lambda^*)$ или $M(A \mid \mathbf{b})$.

Обозначим через $x_i := \mu_{3+i}$ для $i = 1, 2, 3$ и $x := \mu_7$ в Теореме 3.4 т.е., x_1, x_2, x_3, x соответствуют $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}$. Тогда имеем изоморфизм градцированных колец

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]/\mathcal{I}(\Lambda^*),$$

где $\mathcal{I}(\Lambda^*)$ является идеалом порожденным элементами: $x_1x_2x_3$,

$$x_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_ix), \text{ и } x(a_{i1}x_2 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_ix) \quad i = 1, 2, 3, \tag{3.9}$$

где a_{ij} обозначает (i, j)-элемент A.

Лемма 3.5. *Для x_1, x_2, x_3, x из $H^2(M(\Lambda^*))$ справедливо следующее:*

(1) $xx_1 = xx_2 = xx_3$, *и*
(2) $x^2 = -(\det A)xx_1$.

Доказательство. Рассмотрим 4 случая, в соотвествии с каждым из видов A.

При $\det(A) = 0$, имеем

$$x(x_1 - x_3 + b_1x) = 0, \quad x(x_2 - x_1 + b_2x) = 0, \quad x(x_3 - x_2 + b_3x) = 0 \tag{3.10}$$

Суммируя равенства в (3.10), мы получаем $(b_1+b_2+b_3)x^2 = 0$, а следовательно $x^2 = 0$ поскольку $b_1 + b_2 + b_3 = 1$. Это доказывает (2). Подставив $x^2 = 0$ в (3.10), мы получим (1).

Для случая $\det(A) = 1$, $b_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ для $i = 1, 2, 3$. Следовательно, из (3.9) получаем

$$x\,(x_1 + x) = 0, \quad x\,(x_2 + a_{21}x_1 + (1 + a_{21})x) = 0, \quad x\,(x_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (1 + a_{31} + a_{32})x) = 0.$$

Преписывав эти равенства, получим

$$(xx_1 + x^2) = 0, \quad (xx_2 + x^2) + a_{21}(xx_1 + x^2) = 0, \quad (xx_3 + x^2) + a_{31}(xx_1 + x^2) + a_{32}(xx_2 + x^2) = 0.$$

Отсюда видно, что $x^2 + xx_i = 0$ для любого i, что доказывает оба (1) и (2).

Теперь пусть $\det(A) = 2$. Положим $I = \{i \mid a_i = 1\}$, мощность $|I|$ нечетна, т.е. либо 3, либо 1. Из (3.9) и вида матрицы A следует, что

$$x(x_{i-1} + x_i + x) = 0 \text{ для } i \in I, \text{ и} \tag{3.11}$$

$$x(-x_{i-1} + x_i) = 0 \text{ для } i \notin I. \tag{3.12}$$

, где $a_0 = a_3$.

Предположим, что $I = \{1, 2, 3\}$. Тогда (3.11) имеет место для любого i. Вычитая $x(x_{i-1} + x_i + x) = 0$ из $x(x_i + x_{i+1} + x) = 0$, мы получаем $xx_{i-1} = xx_{i+1}$ для всех $i = 1, 2, 3$. Это доказывает (1). Тогда из (3.11) следует $x^2 = -2x_ix$.

Теперь пусть $I = \{i\}$. Без ограничения общности положим $i = 1$. Тогда из (3.11) и (3.12) получаем:

$$x(x_3 + x_1 + x) = 0, \quad x(-x_1 + x_2) = 0, \quad x(-x_2 + x_3) = 0. \tag{3.13}$$

откуда следует (1) и (2).

Для $(\det(A) \neq 0, 1, 2)$, из (3.9) получаем:

$$x(x_1 + ax_3 + x) = 0 \quad \text{и} \quad x(-x_1 + x_2) = 0, \quad x(-x_2 + x_3) = 0$$

Последние равенства означают (1). Тогда из первого равенства выше следует, что $x^2 = -(1 + a)xx_1$, это доказывает (2) поскольку $\det(A) = 1 + a$. $\square$

Следствие 3.6. *Для x_1, x_2, x_3, x из $H^2(M(\Lambda^*))$ справедливо следующее:*

(1) $x^3 = (det(A))^2xx_1x_2$ *- порождающая* $H^6(M(\Lambda^*))$.
(2) x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 *и* xx_1 *составляют базис по сложению для* $H^4(M(\Lambda^*))$.

Для элемента $z \in H^2(M(\Lambda^*))$, определим аннулятор над $H^*(M(\Lambda^*))$ как

$$\mathrm{Ann}(z) = \{w \in H^2(M(\Lambda^*)) \mid zw = 0 \text{ в } H^*(M(\Lambda^*))\}.$$

Поскольку $\{1,7\}, \{2,7\}, \{3,7\}$ являются негранями $\mathcal{K}$, то $xx_1 = xx_2 = xx_3 = 0$, откуда получаем, что $\mathrm{Ann}(cx)$ имеет ранг 3 для ненулевой константы c. Докажем обратное.

Лемма 3.7. *Если для $z \in H^2(M(\Lambda^*))$ $\mathrm{Ann}(z) := \{w \in H^2(M(\Lambda^*)) \mid zw = 0$ в $H^*(M(\Lambda^*))\}$ ранга 3, тогда z является ненулевой константой кратной x.*

Доказательство. Положим $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + cx$. Покажем, что $c_i = 0$ для $i = 1, 2, 3$, когда $\mathrm{Ann}(z)$ ранга 3. Если элемент $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + dx$ принадлежит $\mathrm{Ann}(z)$, то по определению

$$(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + cx)(d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + dx) = 0. \tag{3.14}$$

Когда $\det(A) = 1$, матрица A - унипотентная и нижнетреугольная, тогда

$$x_1^2 = -b_1x_1x, \quad x_2^2 = -a_{21}x_1x_2 - b_2x_2x, \quad x_3^2 = -a_{31}x_1x_3 - a_{32}x_2x_3 - b_3x_3x.$$

Подставив это в (3.14) получим, что коэффициенты перед x_2x_1, x_3x_2 и x_3x_1 удовлетворяют равенству

$$\begin{pmatrix} c_2 & c_1 - c_2a_{21} & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 - c_3a_{32} \\ c_3 & 0 & c_1 - c_3a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{Ann}(z)$ ранга 3, матрица выше имеет ранг не больше 1, откуда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Если же $\det(A) \neq 1$,то матрица A имеет вид (3.5) и справедливы соотношения

$$x_1^2 = -a_1x_1x_3 - b_1x_1x, \quad x_2^2 = -a_2x_2x_1 - b_2x_2x, \quad x_3^2 = -a_3x_3x_2 - b_3x_3x.$$

Снова подставляя их в (3.14), получаем, что коэффициенты перед x_ix_{i-1} равны $c_{i-1}d_i - a_ic_id_i + c_id_{i-1}$, где $1 \leq i \leq 3$ и отсюда получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} c_3 - c_1a_1 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 - c_2a_2 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 - c_3a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\mathrm{Ann}(z)$ имеет ранг 3, ранг матрицы выше не больше 1. Откуда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. $\square$

4. Классы изоморфизмов колец когомологий в каждом случае

Теперь приступим к изучению колец когомологий $H^*(M(\Lambda^*))$ в каждом отдельном типе, а именно установим изоморфизм колец когомологий для каждого значения $\det(A)$.

4.1. Случай $\det(A) = 0$.

Кольцо когомологий торического многообразия $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 0$ равно:

$$H^*(M(\Lambda^*)) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]/\mathcal{I}(\Lambda^*),$$

где $\mathcal{I}(\Lambda^*)$ - идеал порожденный однородными многочленами:

(1) $x_1x_2x_3$,
(2) $x_1(-x_3 + x_1 + b_1x), \quad x_2(-x_1 + x_2 + b_2x), \quad x_3(-x_2 + x_3 + b_3x)$
(3) $x(-x_3 + x_1 + b_1x), \quad x(-x_1 + x_2 + b_2x), \quad x(-x_2 + x_3 + b_3x)$.

Лемма 4.1. *Кольца когомологий торических многообразий $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ и $H^*(M(A \mid \mathbf{b}'))$ в случае $\det(A) = 0$ изоморфны как градуированные кольца.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$, и β - некоторое наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $2b_1 + b_2 \equiv \beta \pmod 3$ Положим $\mathbf{b}' = (b_1', b_2', b_3')^T$ таким что

$$b_{3-\beta}' = 1 \quad \text{и} \quad b_i' = 0 \text{ для } i \neq 3 - \ell.$$

Тогда $2b_1' + b_2' = \beta$. Заметим, что $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b}')$ сопряжена к $\Lambda_\sigma^* = (A \mid \mathbf{b}_\sigma')$ для любой циклической перестановки σ из S_3 поскольку $A_\sigma = A$ при $\det(A) = 0$ по определению 3.3. Следовательно, для доказательства утверждения достаточно показать, что $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ изоморфно $H^*(M(A \mid \mathbf{b}'))$.

Поскольку $2b_1 + b_2 \equiv 2b'_1 + b'_2 \equiv \beta \pmod 3$, то существует целое α такое что

$$(2b_1 + b_2) - (2b'_1 + b'_2) + 3\alpha = 0$$

Тогда целые c_i-ые определенные как

$$\begin{aligned} c_1 &= (b_1 - b'_i) + \alpha \\ c_2 &= (b_1 - b'_i) + (b_2 - b'_2) + \alpha \\ c_3 &= \alpha \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad \text{и} \quad c_1 - c_3 = b_1 - b'_1, \quad c_2 - c_1 = b_2 - b'_2, \quad c_3 - c_2 = b_3 - b'_3 \tag{4.1}$$

Рассмотрим автоморфизм $\varphi\colon \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x] \to \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]$ определенный равенствами:

$$\varphi(x_i) = x_i + c_i x \quad \text{для } i = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \varphi(x) = x.$$

Проверим, что φ индуцирует изоморфизм между $H^*(M(A \mid \mathbf{b}'))$ и $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$. Во-первых, воспользуясь (4.1) заметим, что порождающие идеал многочлены: $x_1(-x_3 + x_1 + b'_1 x), x_2(-x_1 + x_2 + b'_2 x), x_3(-x_2 + x_3 + b'_3 x)$ при этом автоморфизме переходят в идеал:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1(-x_3 + x_1 + b'_1 x)) = (x_1 + c_1 x)(-x_3 + x_1 + (-c_3 + c_1 + b'_1)x) \\ &= (x_1 + c_1 x)(-x_3 + x_1 + b_1 x) = 0 \qquad \text{в } H^*(X(A, \mathbf{b})). \end{aligned}$$

Аналогично получаем ноль для многочленов $x(-x_3+x_1+b'_1 x), x(-x_1+x_2+b'_2 x), x(-x_2+x_3+b'_3 x)$:

$$\varphi(x(-x_{i-1} + x_i + b'_i x)) = x(-x_{i-1} + x_i + b_i x) = 0 \qquad \text{в } H^*(X(A, \mathbf{b})).$$

Наконец-то получаем:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1 x_2 x_3) = (x_1 + c_1 x)(x_2 + c_2 x)(x_3 + c_3 x) \\ &= (c_1 x x_2 x_3) + (c_2 x x_1 x_3) + (c_3 x x_1 x_2) \qquad (x_1 x_2 x_3 = 0, x^2 = 0 \ 3.5) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3) x x_1^2 \qquad (\forall i \quad x x_1 = x x_i \ 3.5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Это доказывает, что φ индуцирует гомоморфизм градуированных колец ψ из $H^*(M(A \mid \mathbf{b}'))$ в $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$. Аналогично, обратное отображение для φ индуцирует гомоморфизм градуированных колец в обратном направлении и дает обратное отображение для ψ. □

4.2. **Случай** $\det(A) = 1$**.** Торическое многообразие $M(A \mid \mathbf{b})$ с определителем $\det(A) = 1$ является раздутием многобразием Ботта $M(A)$ в фиксированной точке тора. Для многобразий Ботта кольцо когомологий изоморфно следующему

$$H^*(M(A)) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]/\mathcal{I}(A)$$

где $\mathcal{I}(A)$ - идеал порожденный многочленами:

$$x_1^2, \quad x_2(x_2 + a_{21}x_1), \quad x_3(x_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2)$$

Кольцо когомологий $M(A \mid \mathbf{b})$ изоморфно:

$$H^*(M(A \mid \mathbf{b})) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]/\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b}),$$

где $\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b})$ - идеал порожден однородными многочленами

(1) $x_1 x_2 x_3$
(2) $x_1(x_1 + b_1 x), \quad x_2(x_2 + a_{21}x_1 + b_2 x), \quad x_3(x_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 x)$ и
(3) $x(x_1 + b_1 x), x(x_2 + a_{21}x_1 + b_2 x), x(x_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + b_3 x)$

Лемма 4.2. *Кольца когомологий торических многообразий* $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ *и* $H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$ *в случае* $\det(A) = \det(A') = 1$ *изоморфны как градуированные кольца тогда и только тогда, когда* $H^*(M(A))$ *и* $H^*(M(A'))$ *изоморфны как градуированные кольца.*

Доказательство. Докажем необходимость: Так как $M(A \mid \mathbf{b})$ является раздутием многообразия Ботта $M(A)$ в точке, получаем: $M(A \mid \mathbf{b}) \simeq M(A)\sharp\mathbb{C}P^3$. Отсюда получаем, что если кольца $H^*(M(A))$ и$H^*(M(A'))$ изоморфны, то кольца $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ и $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ также изоморфны.

Докажем достаточность. Пусть имеется ψ: $H^*(M(A \mid \mathbf{b})) \to H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$ - изоморфизм колец когомологий. Так как $\{x_1, x_2, x_3, x\}$ является аддитивным базисом в $H^2(M(A \mid \mathbf{b}))$, то ψ индуцирует автоморфизм φ: $: \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x] \to \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]$, такой что $\varphi(\mathcal{I}(A|\mathbf{b})) = \mathcal{I}(A'|\mathbf{b}')$. Из Леммы 3.7 получаем, что $\varphi(x) = \pm x$, поэтому φ индуцирует автоморфизм $\bar{\varphi} : \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3] \to \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, такой что $\bar{\varphi}(\mathcal{I}(A)) = \mathcal{I}(A')$. □

4.3. **Случай** $\det(A) = 2$**.** Кольцо когомологий торического многообразия $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 2$ изоморфно:

$$H^*(M(A \mid \mathbf{b})) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]/\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b}),$$

где $\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b})$ - идеал порожденный многочленами

(1) $x_1x_2x_3$,
(2) $x_1(x_1 + a_1x_3 + b_1x)$, $\quad x_2(x_2 + a_2x_1 + b_2x)$, $\quad x_3(x_3 + a_3x_2 + b_3x)$ $\quad$ и
(3) $x(x_1 + a_1x_3 + b_1x)$, $\quad x(x_2 + a_2x_1 + b_2x)$, $\quad x(x_3 + a_3x_2 + b_3x)$

где $b_i = (1 + a_i)/2 \quad i = 1, 2, 3$.

Лемма 4.3. *Кольца когомологий торических многообразий* $H^*M(A' \mid \mathbf{b}')$ *и* $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ *в случае* $\det(A) = 2$ *изоморфны как градуированные кольца.*

Доказательство. Матрица $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 2$ определяется своими элементами $\{a_1, a_2, a_3\}$ 3.3 и имеет вид

$$(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & \frac{1+a_1}{2} \\ a_2 & 1 & 0 & \frac{1+a_2}{2} \\ 0 & a_3 & 1 & \frac{1+a_3}{2} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Обозначим через m_A число a_i-ых равных -1, оно равно либо 0 либо 2. В первом случае матрица Λ^* примет вид:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Во втором случае без ограничения общности будем считать что $a_i = 1$ при $i = 1$, тогда матрица A примет вид:

$$(A \mid \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Достаточно показать, что $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ и $H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$ изоморфны друг другу как градуированные кольца, когда $m_A = 2$, а $m_{A'} = 0$.

В таком случае матрица A имеет вид (4.4), а матрица A' вид (4.3). В таком случае многочлены, порождающие идеал примут вид:

$$\begin{aligned} x_1 + a_1x_3 + b_1x &= x_1 + x_3 + x \\ x_2 + a_2x_1 + b_2x &= x_2 - x_1 \\ x_3 + a_3x_2 + b_3x &= x_3 - x_2, \end{aligned}$$

для первого случая, и

$$\begin{aligned} x_1 + a_1x_3 + b_1x &= x_1 + x_3 + x \\ x_2 + a_2x_1 + b_2x &= x_2 + x_1 + x \\ x_3 + a_3x_2 + b_3x &= x_3 + x_2 + x, \end{aligned}$$

для второго. Рассмотрим автоморфизм $\varphi\colon \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x] \to \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]$:

$$\varphi(x_k) = \begin{cases} x_k & k \equiv i+1 \pmod 3 \\ -(x_k + x) & \text{в противном случае} \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi(x) = x.$$

В нашем случае, при $i = 1$ φ действует так:

$$\varphi(x_1) = -(x_1 + x), \quad \varphi(x_2) = x_2, \quad \varphi(x_3) = -(x_3 + x).$$

Покажем, что φ индуцирует изоморфизм градуированных колец $H^*(M(A' \mid \mathbf{b}')) \to H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$. Для этого рассмотрим:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1 + x_3 + x) = -(x_1 + x) - (x_3 + x) + x = -(x_1 + x_3 + x) \\ &\varphi(x_2 + x_1 + b_2 x) = x_2 - (x_1 + x) + x = x_2 - x_1 \\ &\varphi(x_3 + x_2 + x) = -(x_3 + x) + x_2 + x = -(x_3 - x_2) =, \end{aligned}$$

это показывает, что образы порождающих многочленов вида (2) и (3) лежат в $\mathcal{I}(A, \mathbf{b})$.

Теперь проверим, что $\varphi(x_1x_2x_3) = x_1x_2x_3$ в $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$. Получаем:

$$\varphi(x_1x_2x_3) = (x_1 + x)x_2(x_3 + x) = x_1x_2x_3 + xx_2x_3 + xx_1x_2 + x^2x_2.$$

Вспомним, что по Лемме 3.5 $x^2 = -2xx_k$ и $xx_1 = xx_k$ для любого k. Тогда в $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ мы имеем

$$\varphi(x_1x_2x_3) = x_1x_2x_3$$

Таким образом, φ индуцирует гомоморфизм градуированных колец

$$\psi\colon H^*(M(A' \mid \mathbf{b}')) \to H^*(M(A \mid \mathbf{b})).$$

Аналогично, обратное отображение к φ индуцирует гомоморфизм градуированных колец в обратном направлении и дает обратное отображение к ψ. $\square$

4.4. **Случай** $\det(A) \neq 0, 1, 2$. Кольцо когомологий $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) \neq 0, 1, 2$ изоморфно:

$$H^*(M(A \mid \mathbf{b})) \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, x]/\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b}),$$

где $\mathcal{I}(A \mid \mathbf{b})$ - идеал порожденный однородными многочленами

(1) $x_1x_2x_3$, $x_1(x_1 + ax_3 + x)$, $x(x_1 + ax_3 + x)$,
(2) $x_2(x_1 - x_2)$, $x_3(x_2 - x_3)$
(3) $x(x_1 - x_2)$, $x(x_2 - x_3)$

Утверждение 4.4. *Кольца когомологий торических многообразий* $H^*(M(A \mid \mathbf{b}))$ *и* $H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$ *в случае* $\det(A) \neq 0, 1, 2$ *изоморфны как градуированные кольца тогда и только тогда, когда* $(A, \mathbf{b}) = (A', \mathbf{b}')$.

Доказательство. Матрица A при $\det(A) \neq 0, 1, 2$ определяется своим $(1, 3)$-ым элементом a 3.3.. Пусть имеем A и A' с элементами a и a' на $(1, 3)$ позиции, соответственно.

Докажем от противного. Пусть $a \neq a'$ и существует изоморфизм градуированных колец $\varphi\colon H^*(M(A \mid \mathbf{b})) \to H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$. Поскольку φ является изоморфизмом, то из Следствия 3.6 получаем

$$|1 + a| = |\det A| = |\det A'| = |1 + a'|.$$

Отсюда получаем, что $a + a' = -2$. Выразим $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_3)$ как

$$\varphi(x_1) \equiv r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 \pmod x \qquad \text{и} \qquad \varphi(x_3) \equiv q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 \pmod x$$

где $\{q_i\}$ и $\{r_i\}$ - целые чисела, удовлетворяющие условию

$$\gcd(q_1, q_2, q_3) = \gcd(r_1, r_2, r_3) = 1. \tag{4.5}$$

Из Леммы 3.7 следует, что $\varphi(x) = \pm x$, поэтому

(4.6)

$$\varphi\big(x_1(x_1 + ax_3 + x)\big) \equiv \Big(r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3\Big)\Big((aq_1 + r_1)x_1 + (aq_2 + r_2)x_2 + (aq_3 + r_3)x_3\Big) \pmod x.$$

Где

$$x_1^2 \equiv -a'x_3x_1 \pmod x, \quad x_2^2 \equiv x_2x_1 \pmod x \quad x_3^2 \equiv x_3x_2 \pmod x$$

в $H^*(M(A' \mid \mathbf{b}'))$. Подставив это в (4.6) и приведя кооэффициенты при x_ix_j, получим

$$\begin{aligned} r_3(aq_1+r_1)+r_1(aq_3+r_3)-r_1(aq_1+r_1)a' = 0,\\ r_2(aq_1+r_1)+r_1(aq_2+r_2)+r_2(aq_2+r_2) = 0\\ r_3(aq_2+r_2)+r_2(aq_3+r_3)+r_3(aq_3+r_3) = 0 \end{aligned}$$

Пусть p - произвольный делитель целого a. Поскольку $a+a' = -2$, равенства выше сводятся к

$$2r_1(r_3+r_1) \equiv 0 \pmod p, \tag{4.7}$$

$$r_2(2r_1+r_2) \equiv 0 \pmod p \tag{4.8}$$

$$r_3(2r_2+r_3) \equiv 0 \pmod p \tag{4.9}$$

Предположим, что a четно. Тогда r_2 и r_3 четно из (4.8)-(4.9), а следовательно r_1 нечетно (4.5). Поэтому $2r_1(r_3+r_1) \not\equiv 0 \pmod 4$. Тогда из (4.7) получаем, что a не делится на 4, т.е. $a \equiv 2 \pmod 4$. Поскольку $a+a' = -2$, то a' также четно и те же рассуждения что и для a показывают, что $a' \equiv 2 \pmod 4$. Однако, это противоречит предположению $a+a' = -2$. Значит, оба a и a' должны быть нечетными.

Предположим, что $|a| \geq 3$ и пусть p - нечетное простое число, делящее a. В таком случае, (4.7) и (4.8) имеют нетривиальное общее решение только при $p = 5$. Поскольку a нечетно, отсюда следует, что $a = \pm 5^u$ для некоторого $u \geq 1$. Поэтому $|a'| \geq 3$ поскольку $a+a' = -2$. Тогда те же рассуждения, что и для a показывают, что $a' = \pm 5^v$ для некоторого $v \geq 1$. Однако, это противоречит предположению $a+a' = -2$. Таким образом, $|a| = |a'| = 1$. Однако, это снова противоречит $a+a' = -2$ потому что $a \neq a'$. Следовательно $a = a'$. □

5. Гладкая классификация в каждом случае

Теперь приведем гладкую классификацию в каждом случае.

5.1. **Гладкая классификация в случае $\det(A) = 0$.** Матрица $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 0$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & 1 & b_3 \end{pmatrix} \text{ с } b_1+b_2+b_3 = 1.$$

У характеристической матрицы $\Lambda = (-E \mid A \mid \mathbf{b})$ сначала прибавим ко второй строке первую, затем к третьей вторую, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & c_1 = b_1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & c_2 = b_1+b_2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Далее без ограничения общности мы будем рассматривать веер заданный матрицей (5.1), соотвествующее торическое многообразие обозначим через $M_{\mathbf{c}}$, где $\mathbf{c} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2})^{\mathbf{T}}$. Заметим, что

$$c_1 + c_2 = 2b_1 + b_2.$$

С другой стороны, для циклической перестановки $\sigma(i) = i+\beta$ из S_3, мы имеем

$$\begin{aligned} &(2b_{\sigma(1)} + b_{\sigma(2)}) - (2b_1+b_2) \equiv -(b_{\sigma(1)} + 2b_{\sigma(2)} + 3b_{\sigma(3)}) - (-(b_1+2b_2+3b_3))\\ &\equiv -(b_{1+\beta} + 2b_{2+\beta} + 3b_{3+\beta}) + (b_1+2b_2+3b_3)\\ &\equiv -((1-\beta)b_1 + (2-\beta)b_2 + (3-\beta)b_3) + (b_1+2b_2+3b_3)\\ &\equiv \beta(b_1+b_2+b_3) \equiv \beta \pmod 3. \end{aligned}$$

Следовательно, без ограничения общности можно ограничиться случаем с $\mathbf{c}$, удовлетворящим условию $c_1 + c_2 \equiv 0 \pmod 3$.

Построим торическое многообразие $M_{\mathbf{c}}$ ассоциированное с $\mathbf{c}$ используя фактор конструкцию торического многообразия.

Минимальными негранями симплициального комплекса $\mathcal{K}$ являются $\{i, 3+i\}, \{i, 7\}$ для $i = 1, 2, 3$ и $\{4, 5, 6\}$. Пусть $(z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w)$ - координаты $\mathbb{C}^7$, зададим координатную конфигурацию

$$Z = \bigcup_{i=1}^{3}\{z_i = w_i = 0\} \cup \{w_1 = w_2 = w_3 = 0\} \cup \bigcup_{i=1}^{3}\{z_i = w = 0\}.$$

И пусть $\lambda_{\mathbf{c}} : (\mathbb{C}^{\times})^7 \to (\mathbb{C}^{\times})^3$ гомоморфизм определенный матрицей (5.1), а именно:

$$\lambda_{\mathbf{c}}(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3, h) = (g_1^{-1}h_1h_3^{-1}h^{c_1}, g_1^{-1}g_2^{-1}h_2h_3^{-1}h^{c_2}, g_1^{-1}g_2^{-1}g_3^{-1}h).$$

Тогда ядро $\lambda_{\mathbf{c}}$ задается как:

$$\{(g_1, g_2, g_3, g_1h_3h^{-c_1}, g_1g_2h_3h^{-c_2}, h_3, h) \mid h = g_1g_2g_3\}.$$

Наконец, получаем:

$$M_{\mathbf{c}} = (\mathbb{C}^7 \setminus Z)/\ker\lambda_{\mathbf{c}}.$$

Обозначим

$$M_{\mathbf{c}}^- = M_{\mathbf{c}} \cap \{w \neq 0\}, \quad M_{\mathbf{c}}^+ = M_{\mathbf{c}} \cap \bigcap_{i=1}^{3}\{z_i \neq 0\}.$$

Тогда очевидно имеем $M_{\mathbf{c}} = M_{\mathbf{c}}^- \cup M_{\mathbf{c}}^+$.

В дальнейшем нам потребуется утверждение:

Утверждение 5.1. [6, Теорема 2.23] *Пусть M и N - гладкие многообразия и $f : M \to N$ - непрерывное отображение. Если f - гладкое на замкнутом подмножестве A в M, тогда отображение f ограниченное на A продолжается до гладкого отображения.*

Докажем следующее:

Утверждение 5.2. *Все торические многобразия $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае* $\det(A) = 0$ *диффеоморфны друг другу.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $M(A \mid \mathbf{b})$ диффеоморфно $M(A \mid \mathbf{b}')$, где $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ с $b_1 + b_2 + b_3 = 1$ и $\mathbf{b}' = (0, 0, 1)^T$, поэтому в выше озвученных терминах задача сводится к следующему:

$$M_{\mathbf{c}} \text{ диффеоморфно } M_{\mathbf{0}}, \text{ где } \mathbf{0} := (0, 0)^T,$$

Рассмотрим диффеоморфизм $\varphi_{\mathbf{c}}\colon M_{\mathbf{c}}^- \to M_{\mathbf{0}}^-$ заданный следующим образом:

$$\varphi_{\mathbf{c}}((z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w)) = (z_1, z_2, z_3, w^{c_1}w_1, w^{c_2}w_2, w_3, w)$$

попытаемся продолжить этот диффеоморфизм до диффеоморфизма из $M_{\mathbf{c}}$ в $M_{\mathbf{0}}$. Заметим, что имеется диффеоморфизм из $M_{\mathbf{c}}^+$ в $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}$:

$$\psi_{\mathbf{c}}((z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w)) = ((z_1^{-1}(z_1z_2z_3)^{c_1}w_1, (z_1z_2)^{-1}(z_1z_2z_3)^{c_2}w_2, w_3), (z_1z_2z_3)^{-1}w).$$

аналогичным обзом, $M_{\mathbf{0}}^+$ диффеоморфно $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}$:

$$\psi_{\mathbf{0}}((z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w)) = ((z_1^{-1}w_1, (z_1z_2)^{-1}w_2, w_3), (z_1z_2z_3)^{-1}w).$$

Следовательно, $\psi_{\mathbf{0}} \circ \varphi_{\mathbf{c}} \circ \psi_{\mathbf{c}}^{-1}$ является диффеоморфизмом $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}^*$ в себя:

$$\psi_{\mathbf{0}} \circ \varphi_{\mathbf{c}} \circ \psi_{\mathbf{c}}^{-1}((w_1, w_2, w_3), w) = \psi_{\mathbf{0}} \circ \varphi_{\mathbf{c}}((1, 1, 1, w_1, w_2, w_3, w))$$
$$= \psi_{\mathbf{0}}((1, 1, 1, w^{c_1}w_1, , w^{c_2}w_2, w_3, w)) = ((w^{c_1}w_1, w^{c_2}w_2, w_3), w).$$

Иными словами, $\psi_{\mathbf{0}} \circ \varphi_{\mathbf{c}} \circ \psi_{\mathbf{c}}^{-1}$ действует следующим образом:

$$((w_1, w_2, w_3), w) \longmapsto ((w^{c_1}w_1, w^{c_2}w_2, w_3), w). \tag{5.2}$$

Ограничим отображение (5.2) на $\mathbb{C}P^2 \times (\mathbb{C} \setminus \operatorname{Int} D^2)$, где D^2 - единичный диск в $\mathbb{C}$, и найдем продолжение этого диффеоморфизма до диффеоморфизма $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}$ в себя.

Рассмотрим отображение заданное через (5.2) как гомоморфизм

$$\rho : \mathbb{C}^* \to \mathrm{PU}(3), \quad w \mapsto \begin{pmatrix} w^{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & w^{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\mathrm{PU}(3) \cong \mathrm{U}(3)/Z(\mathrm{U}(3))$, т.е. это фактор унитарной группой $\mathrm{U}(3)$ по центру. Достаточно показать, что ρ ограниченное на $(\mathbb{C} \setminus \mathrm{Int}\, D^2)$ продолжается до непрерывного отображения из $\mathbb{C}$ на $\mathrm{PU}(3)$, ведь в таком случае можно применить теорему 5.1 к $M = \mathbb{C}$, $N = \mathrm{PU}(3)$ и $A = \mathbb{C} \setminus \mathrm{Int}\, D^2$. Для каждого целого m имеем,

$$\begin{pmatrix} w^{c_1} & 0 & 0 \\ 0 & w^{c_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{c_1+m} & 0 & 0 \\ 0 & w^{c_2+m} & 0 \\ 0 & 0 & w^m \end{pmatrix} \text{ в } \mathrm{PU}(3).$$

Поскольку $c_k + c_2 \equiv 0 \pmod 3$, получаем, что гомоморфизм ρ указанный выше, пропускается через специальную унитарную группу $\mathrm{SU}(3)$. Поскольку $\mathrm{SU}(3)$ односвязно, ограничение $p|_{(\mathbb{C}\setminus \mathrm{Int}\, D^2)}$ на границу D^2 - гомотопно постоянному отображению. Поэтому, $p|_{(\mathbb{C}\setminus \mathrm{Int}\, D^2)}$ продолжается до непрерывного отображения $\mathbb{C} \to \mathrm{PU}(3)$. □

5.2. **Гладкая классификация в случае** $\det(A) = 1$**.** Известно, что многообразия Ботта $M(A)$ в случае комплексной размерности равной 3 являются когомологически жестким см. [2], тогда из Леммы 4.2 следует:

Следствие 5.3. *Торические многообразия* $M(A \mid \mathbf{b})$ *и* $M(A' \mid \mathbf{b}')$ *в случае* $\det(A) = \det(A') = 1$ *диффеоморфны, если их кольца когомологий изоморфны как градуированные кольца.*

5.3. **Гладкая классификация в случае** $\det(A) = 2$**.** Для начала дадим необходимые определения и утверждения, которые понадобятся для доказательства.

Рассмотрим трехмерный простой многогранник

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{n}_i, \mathbf{x} \rangle + \gamma_i \geq 0 \quad \text{для } i = 1, \ldots, m\},$$

где $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ и $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$. Здесь m - кол-во гиперграней P. Определим отображение

$$i_P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m, \quad i_P(\mathbf{x}) = (\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{x} \rangle + \gamma_1, \ldots, \langle \mathbf{n}_m, \mathbf{x} \rangle + \gamma_m).$$

Оно переводит P в $\mathbb{R}^m_{\geq 0}$. Тогда момент-угол многообразие $\mathcal{Z}_P$ ассоциированное с P определяется как расслоенное произведение коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}^m_{\geq 0} \end{array}$$

где $\pi(z_1, \ldots, z_m) = (|z_1|^2, \ldots, |z_m|^2)$. $\mathcal{Z}_P$ ивариантен относительно стандартного действия $T^m = (S^1)^m$ на $\mathbb{C}^m$.

Теперь рассмотрим многогранник P представленый следующим образом:

$$P = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq x_i \leq 1,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 - \frac{1}{2} \right\}. \tag{5.3}$$

P является трехмерным кубом с одной срезанной вершиной $\mathrm{vc}(I^3)$, поэтому граничный комплекс симплициального многогранника двойственного к P изоморфен нашему симплициальному комплексу $\mathcal{K}$. Тогда момент-угол многобразие $\mathcal{Z}_P$ ассоциированное к P описывается следующим образом:

$$\left\{ (z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w) \in \mathbb{C}^7 \,\middle|\, |z_i|^2 + |w_i|^2 = 1,\ |w_1|^2 + |w_2|^2 + |w_3|^2 = |w|^2 + \frac{1}{2} \right\}. \tag{5.4}$$

Как известно, $\mathcal{Z}_P$ является деформационным ретратом $\mathbb{C}^7\backslash Z$, где

$$Z = \bigcup_{i=1}^{3}\{z_i = w_i = 0\} \cup \{w_1 = w_2 = w_3 = 0\} \cup \bigcup_{i=1}^{3}\{z_i = w = 0\}$$

.

Рассмотрим матрицу $\Lambda^* = (A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 2$. Она имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 & \frac{1+a_1}{2} \\ a_2 & 1 & 0 & \frac{1+a_2}{2} \\ 0 & a_3 & 1 & \frac{1+a_3}{2} \end{pmatrix} \text{ где } a_i = \pm 1 \text{ и число } a_i\text{-ых равных 1 нечетно.}$$

Характеристическая матрица $\Lambda = (-E \mid A \mid \mathbf{b})$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 & b_1 = \frac{1+a_1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & a_2 & 1 & 0 & b_2 = \frac{1+a_2}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_3 & 1 & b_3 = \frac{1+a_3}{2} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Определим гомоморфизм $\lambda_A\colon (\mathbb{C}^\times)^7 \to (\mathbb{C}^\times)^3$ как

$$\lambda_A(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3, h) = (g_1^{-1}h_1h_3^{a_1}h^{b_1}, g_2^{-1}h_1^{a_2}h_2g^{b_2}, g_3^{-1}h_2^{a_3}h_3h^{b_3}).$$

Тогда ядро λ_A задается как:

$$\{(h_3^{a_1}h_1h^{b_1}, h_1^{a_2}h_2h^{b_2}, h_2^{a_3}h_3h^{b_3}, h_1, h_2, h_3, h)\} \tag{5.6}$$

Из фактор конструкции получаем

$$M(A \mid \mathbf{b}) = (\mathbb{C}^7\backslash Z)/\ker\lambda_A.$$

Утверждение 5.4. *Торическое многообразие $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 2$ $(S^1)^3$-эквивариантно диффеоморфно $\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S$, где λ_A^S ограничение λ_A на $(S^1)^7$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Lambda^*(t) = (A(t) \mid \mathbf{b}(t))$:

$$A(t) = (\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1t \\ a_2t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_3t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{a}_1(t) + \mathbf{a}_2(t) + \mathbf{a}_2(t)}{2}.$$

Оно задает гладкое семейство симплициальных вееров.

Для $\mathcal{K}$ определим

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^7 \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{K}}\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^7 \mid z_i = 0 \ (i \in I)\}.$$

Обозначим через $\lambda^{\mathbb{R}}\colon (\mathbb{R}_{>0})^7 \to (\mathbb{R}_{>0})^3$ гомоморфизм:

$$(y_1, \dots, y_7) \mapsto y_1^{\mathbf{n}_1}\cdots y_7^{\mathbf{n}_7},$$

где $y^{\mathbf{u}} = (y^{u_1}, y^{u_2}, y^{u_3}) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$ для $y \in \mathbb{R}_{>0}$ и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, тогда справедливо следующее [7, [Теорема 3.3]]:

> Группа $\ker\lambda^{\mathbb{R}}$ действует на $U(\mathcal{K})$ свободно и прообраз компактного подмножества при этом действии - компакт. Более того, вложение $\mathcal{Z}_P \to \mathbb{C}^m$ индуцирует $(S^1)^7$-эквивариантный диффеоморфизм $\mathcal{Z}_P \to U(\mathcal{K})/\ker\lambda^{\mathbb{R}}$.

Теперь рассмотрим фактор-пространство $U(\mathcal{K}) \times [0,1]/\!\sim$, по отношению эквивалентности $\sim$:

$$(\boldsymbol{z}, t) \sim (\boldsymbol{z}', t') \iff t = t' \text{ и } \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}' \text{ принадлежат одной орбите действия } \ker\lambda^{\mathbb{R}}(t)$$

Тогда, легко проверяется, что проекция на вторую компоненту индуцирует $(S^1)^m$-эквивариантное гладкое расслоение $Y \to [0,1]$. Отсюда получаем, что если $\mathbf{n}_i(t)$ $(i = 1, \dots, m)$ - гладкие функции $[0,1] \to \mathbb{R}^3$ и веер Σ, построенный на векторах $\{\mathbf{n}_i(t)\}$ над симплициальных комплексом $\mathcal{K}$, является симплициальным для любого $t \in [0,1]$, тогда $U(\mathcal{K})/\ker\lambda^{\mathbb{R}}(0)$ $(S^1)^7$-эквивариантно диффеоморфно $U(\mathcal{K})/\ker\lambda^{\mathbb{R}}(1)$.

Отсюда получаем, что если имеется гладкое преобразование между полным неособым веером Σ и нормальным веером простого многогранника P зависящее от $t \in [0,1]$ и для каждого t получается симплициальный веер, тогда торическое многообразие M_Σ $(S^1)^3$-эквивариантно диффеоморфно $\mathcal{Z}_P/\ker\lambda^S$, где λ^S - ограничение $\lambda^{\mathbb{R}}$ на $(S^1)^7$.

Отсюда получаем, что поскольку векторы-столбцы матрицы

$$(-E \mid A(0) \mid \mathbf{b}(0)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_1 * 0 & b_1(0) \\ 0 & -1 & 0 & a_2 * 0 & 1 & 0 & b_2(0) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a_3 * 0 & 1 & b_3(0) \end{pmatrix}$$

являются нормальными векторами многогранника P (5.3), то утверждение получается из выше озвученного.

□

Теперь рассмотрим

$$R = A^{-1} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Очевидно, что каждая компонента A^{-1} либо $\frac{1}{2}$ либо $-\frac{1}{2}$, поэтому матрица R целочислена. Обозначим через $\mathbf{r}_i$ i-ую строку матрицы R, а через $\mathbf{u}_i$ i-ую строку матрицы A.

Лемма 5.5. *При введенных обозначениях получаем следующее:*

(1) $r_{i1}\mathbf{u}_1 + r_{i2}\mathbf{u}_2 + r_{i3}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + \mathbf{e}_i$
(2) $r_{i1}b_1 + r_{i2}b_2 + r_{i3}b_3 = \frac{1}{2}(1 + b_1 + b_2 + b_3)$ *и*
(3) $u_{i1}\mathbf{r}_1 + u_{i2}\mathbf{r}_2 + u_{i3}\mathbf{r}_3 - b_i\mathbf{1} = \mathbf{e}_i$,

где b_i - i-ый элемент $\mathbf{b}$, т.е., $b_i = \frac{1}{2}(1 + a_i)$ для $i = 1, 2, 3$.

Доказательство. Из определения матрицы R (5.7), получаем:

$$RA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} A + E_3. \tag{5.8}$$

Тогда (1) получается из сравнения строк в обеих частях равенства (5.8).

Теперь умножив каждую часть (5.7) на $\mathbf{b}$ справа, мы получим:

$$R \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + b_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

Тогда заметив, что $A\mathbf{1} = 2\mathbf{b}$ и сравнив строки обеих частей (5.9), мы получаем (2).

Из (5.7), мы имеем

$$AR - A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Поскольку $u_{i1} + u_{i2} + u_{i3} = 1 + a_i = 2b_i$, мы получаем (3) сравнивая строки обеих частей в (5.10).

□

Рассмотрим две части $\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S$:

$$(\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S) \cap \{|w| < 1/\sqrt{2}\} \qquad \text{и} \qquad (\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S) \cap \{w \neq 0\}.$$

Если $|w| < 1/\sqrt{2}$, тогда $z_i \neq 0$ для $i = 1, 2, 3$ из (5.4). Запишем

$$\boldsymbol{z}^{\mathbf{c}} = z_1^{c_1} z_2^{c_2} z_3^{c_3} \text{ и } \boldsymbol{h}^c = h_1^{c_1} h_2^{c_2} h_3^{c_3},$$

для $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Из вида ядра (5.6) получаем

$$\ker\lambda_A^S = \{(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1} h^{b_1}, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_2} h^{b_2}, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3}, h_1, h_2, h_3, h) \in (S^1)^7 \mid h_i, h \in S^1\}. \tag{5.11}$$

Определим

$$\tilde{L} = \left\{ (v_1, v_2, v_3, u) \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; |v_1| + |v_2| + |v_3| = |u|^2 + \frac{1}{2},\ |u| < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \text{ и } L = \tilde{L}/S^1,$$

где действие S^1 на $\tilde{L}$ опредляется следующим образом:

$$g \cdot (v_1, v_2, v_3, u) = (gv_1, gv_2, gv_3, g^{-2}u) \text{ для } g \in S^1. \tag{5.12}$$

Лемма 5.6. *Отображение* $\varphi_A \colon (\mathbb{C}^*)^3 \times \mathbb{C}^4 \to \tilde{L}$ *заданное следующим образом:*

$$\varphi_A(z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w) = \left(\left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}|} \right)^{-1} w_1, \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}|} \right)^{-1} w_2, \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}|} \right)^{-1} w_3, \frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}|} w \right) \tag{5.13}$$

индуцирует диффеоморфизм $\psi_A : (\mathcal{Z}_P / \ker \lambda_A^S) \cap \{|w| < 1/\sqrt{2}\} \to L$.

Доказательство. Сначала покажем, что φ_A индуцирует гладкое отображение

$$\psi_A : (\mathcal{Z}_P / \ker \lambda_A^S) \cap \{|w| < 1/\sqrt{2}\} \to L.$$

В силу (5.11) будет достаточным доказать, что для каждого $(h_1, h_2, h_3, h) \in (S^1)^4$, существует $t \in S^1$ удолветворяющий условию

$$\begin{aligned} &\varphi_A(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1} h^{b_1} z_1, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_2} h^{b_2} z_2, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3} z_3, h_1 w_1, h_2 w_2, h_3 w_3, hw) \\ &= \left(t \Big(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}|} \Big)^{-1} w_1, t \Big(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}|} \Big)^{-1} w_2, t \Big(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}|} \Big)^{-1} w_3, t^{-2} \frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}|} w \right). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Поскольку мы имеем $|h_i| = |h| = 1$ для $i = 1, 2, 3$, i-ая координата левой части уравнения (5.14) равна

$$\begin{aligned} &\left((\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1} h^{b_1} z_1/|z_1|)^{r_{i1}} (\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_2} h^{b_2} z_2/|z_2|)^{r_{i2}} (\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3} z_3/|z_3|)^{r_{i3}} \right)^{-1} h_i w_i \\ &= \left(\boldsymbol{h}^{r_{i1}\mathbf{u}_1 + r_{i2}\mathbf{u}_2 + r_{i3}\mathbf{u}_3} h^{r_{i1}b_1 + r_{i2}b_2 + r_{i3}b_3} \frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}|} \right)^{-1} h_i w_i \\ &= \left(\boldsymbol{h}^{\frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)} h_i h^{\frac{1}{2}(1 + b_1 + b_2 + b_3)} \frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}|} \right)^{-1} h_i w_i \\ &= \left(\boldsymbol{h}^{\frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)} h^{\frac{1}{2}(1 + b_1 + b_2 + b_3)} \right)^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_i}|} \right)^{-1} w_i, \end{aligned}$$

где второе равенство следует из Леммы 5.5. (4)-ая координата левой части уравнения (5.14) равна

$$\left((\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1} h^{b_1} z_1/|z_1|)(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_2} h^{b_2} z_2/|z_2|)(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3} z_3/|z_3|) \right) hw = \left(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3} h^{1 + b_1 + b_2 + b_3} \right) \frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}|} w.$$

Следовательно, (5.14) имеет место для $t = \left(\boldsymbol{h}^{\frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3)} h^{\frac{1}{2}(1 + b_1 + b_2 + b_3)} \right)^{-1} \in S^1$.

Теперь докажем биективность. Предположим, что

$$\varphi_A(z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w) = \varphi_A(z_1', z_2', z_3', w_1', w_2', w_3', w') \quad \text{в } L,$$

т.е., существует элемент $t \in S^1$ такой что

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_1}}{|\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_1}|} \right) w_1', \dots \left(\frac{\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_2}}{|\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_2}|} \right) w_2', \left(\frac{\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_3}}{|\boldsymbol{z}'^{\mathbf{r}_3}|} \right) w_3', \left(\frac{\boldsymbol{z}'^{\mathbf{1}}}{|\boldsymbol{z}'^{\mathbf{1}}|} \right) w' \right) \\ &= \left(t \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_1}|} \right) w_1, t \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_2}|} \right) w_2, t \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{r}_3}|} \right) w_3, t^{-2} \left(\frac{\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}}{|\boldsymbol{z}^{\mathbf{1}}|} \right) w \right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Положим $g_i = \left(\frac{z_i'}{|z_i'|} \right)^{-1} \left(\frac{z_i}{|z_i|} \right)$. Тогда

$$w_i' = t \boldsymbol{g}^{\mathbf{r}_i} w_i \text{ и } w' = t^{-2} \boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}} w$$

для (5.15). Положив $h_i = t\boldsymbol{g}^{\mathbf{r}_i}$ и $h = t^{-2}\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}}$, мы получим:

$$\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_i} h^{b_i} = \big(h_1^{u_{i1}} h_2^{u_{i2}} h_3^{u_{i3}}\big) h^{b_i} = \big(t^{u_{i1}+u_{i2}+u_{i3}} \boldsymbol{g}^{u_{i1}\mathbf{r}_1+u_{i2}\mathbf{r}_2+u_{i3}\mathbf{r}_3}\big)\big(t^{-2b_i}\boldsymbol{g}^{-b_i\mathbf{1}}\big) = g_i,$$

где последнее равенство выше следует из Леммы 5.5 и того, что $u_{i1}+u_{i2}+u_{i3} = 1 + a_i = 2b_i$. Поэтому, $(g_1, g_2, g_3, h_1, h_2, h_3, h) \in \ker \lambda_A^S$, это доказывает инъективность ψ.

Для $(v_1, v_2, v_3, u) \in \tilde{L}$, $(z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, u)$, где $z_i = \sqrt{1 - |v_i|^2}$ является элементом $\mathcal{Z}_P$ и $\varphi_A(z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, u) = (v_1, v_2, v_3, u)$, что доказывает сюръективность ψ.

Таким образом, ψ является гладким и биективным отображением. Обратное отображение ψ^{-1} индуцированно отображением $\tilde{L} \ni (v_1, v_2, v_3, u) \mapsto (z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, u) \in \mathcal{Z}_P$, где $z_i = \sqrt{1 - |v_i|^2}$, поэтому оно также гладко. Следовательно ψ - диффеоморфизм. □

Как отмечалось ранее в случае $\det(A) = 2$ кол-во $a_i = -1$ равно либо 2, либо 0. Во втором случае матрица A имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Предположим, что матрица A имеет как минимум два $a_i = -1$ $\{a_1, a_2, a_3\}$. Тогда матрица совпадает с одной из трех матриц:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Лемма 5.7. *Отображение $f : \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^\times$ заданное равенством:*

$$f(z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3, w) = \begin{cases} \Big(\big(\frac{w}{|w|}\big)^2 \bar{z}_1, \frac{w}{|w|} z_2, \frac{w}{|w|}\bar{z}_3, \bar{w}_1, w_2, \bar{w}_3, w\Big) & \text{в случае } A = A_1 \\ \Big(\frac{w}{|w|}\bar{z}_1, \big(\frac{w}{|w|}\big)^2 \bar{z}_2, \frac{w}{|w|} z_3, \bar{w}_1, \bar{w}_2, w_3, w\Big) & \text{в случае } A = A_2 \\ \Big(\frac{w}{|w|} z_1, \frac{w}{|w|}\bar{z}_2, \big(\frac{w}{|w|}\big)^2 \bar{z}_3, w_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, w\Big) & \text{в случае } A = A_3 \end{cases}$$

индуцирует диффеоморфизм $g : (\mathcal{Z}_P/\ker \lambda_A^S) \cap \{w \neq 0\} \to (\mathcal{Z}_P/\ker \lambda_{A'}^S) \cap \{w \neq 0\}$.

Доказательство. Далее ограничимся рассмотрением $A = A_2$, для других случаев рассуждения аналогичны. f сохраняет $\mathcal{Z}_P$ (см. (5.4)) и является диффеоморфизмом, поэтому достаточно проверить, что f является слабо эквивариантным отображением по отношению к действиям групп $\ker \lambda_A^S$ и $\ker \lambda_{A'}^S$. Ядро $\ker \lambda_A^S$ имеет вид (5.11). Поскольку комплексное сопряжение элемента из S^1 равно обратному элементу и $|h| = 1$ для $h \in S^1$, мы имеем

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_1} h^{b_1} z_1, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_2} h^{b_2} z_2, \boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3} z_3, h_1 w_1, h_2 w_2, h_3 w_3, hw) = \\ &\Big(\frac{hw}{|w|}\boldsymbol{h}^{-\mathbf{u}_1} h^{-b_1}\bar{z}_1, \big(\frac{hw}{|w|}\big)^2 \boldsymbol{h}^{-\mathbf{u}_2} h^{-b_2}\bar{z}_2, \frac{hw}{|w|}\boldsymbol{h}^{\mathbf{u}_3} h^{b_3} z_3, h_1^{-1}\bar{w}_1, h_2^{-1}\bar{w}_2, h_3 w_3, w\Big) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Поскольку

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1), \quad \mathbf{u}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{u}_1 = (0, -1, 1)$$

то мы имеем

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}^{-\mathbf{u}_1} &= h_1^{-1} h_3^{;} \\ \boldsymbol{h}^{-\mathbf{u}_2} &= h_1^{-1} h_2^{-1}, \\ \boldsymbol{h}^{-\mathbf{u}_3} &= h_2 h_3^{-1}, \end{aligned}$$

С другой стороны, из определения a'_k-ых следует, что мы имеем

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}_2,\ b'_2 = b_2 = 1, \\ &\mathbf{u}'_k \neq \mathbf{u}_k,\ 1 = b'_k \neq b_k = 0 \quad \text{для } k = 1, 3 \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть равенства (5.16) записывается в виде:

$$\Big(\frac{w}{|w|}h_1^{-1}h_3h\bar{z}_1, (\frac{w}{|w|})^2h_1^{-1}h_2^{-1}h\bar{z}_2, \frac{w}{|w|}h_2h_3^{-1}hz_3, h_1^{-1}\bar{w}_1, h_2^{-1}\bar{w}_2, h_3w_3, w\Big) \tag{5.17}$$

Положим $\boldsymbol{h}' = (h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3)$, тогда

$$h_3h_1^{-1} = (\boldsymbol{h}')^{\mathbf{u}'_1}, \quad h_1^{-1}h_2^{-1} = (\boldsymbol{h}')^{\mathbf{u}'_2}, \quad h_2^{-1}h_3 = (\boldsymbol{h}')^{\mathbf{u}'_3}.$$

Это вместе с (5.16) и (5.17) показывает что f является θ-эквивариантным диффеоморфизмом относительно действия $\ker\lambda_A^S$ и $\ker\lambda_{A'}^S$, где $\theta\colon (S^1)^6 \to (S^1)^6$- автоморфизм, который отображает $(\boldsymbol{h}, h)$ в $(\boldsymbol{h}', h)$. □

Утверждение 5.8. *Все торические многообразия $M(A \mid \mathbf{b})$ в случае $\det(A) = 2$ диффеоморфны друг другу.*

Доказательство. Как и прежде ограничимся рассмотрением случая $A = A_2$, для случаев поступаем аналогично. Пусть ψ_A и g - диффеоморфизмы из Лемм 5.6 и 5.7, соответственно. Рассмотрим композицию

$$\psi_{A'} \circ g \circ \psi_A^{-1} : L \cap \{u \neq 0\} \to L \cap \{u \neq 0\}.$$

Положив $s_i = \sqrt{1 - |v_i|^2}$, расспишем:

$$\begin{aligned}
&(\psi_{A'} \circ g \circ \psi_A^{-1})((v_1, v_2, v_3, u)) \\
&= (\psi_{A'} \circ g)((s_1, s_2, s_3, v_1, v_2, v_3, u)) \\
&= \psi_{A'}\Big(\big(s_1\frac{u}{|u|}, s_2\Big(\frac{u}{|u|}\Big)^2, s_3\frac{u}{|u|}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, v_3, u\big)\Big) \\
&= (a_1\bar{v}_1, a_2\bar{v}_2, a_3v_3, a_0u),
\end{aligned} \tag{5.18}$$

подставив в (5.13), увидем, что каждый a_i является мономом Лорана от $u/|u|$ с коэффициентом 1. Так как координаты в (5.18) однородны и уважают действие S^1 на $\tilde{L}$, которое определено как (5.12) и $f_0 \in S^1$, то мы можем предполагать, что $f_0 = 1$. Более того, в силу (5.12), последний член равенства (5.18) должен быть равен

$$(\Big(\frac{\bar{u}}{|u|}\Big)\bar{v}_1, \Big(\frac{\bar{u}}{|u|}\Big)\bar{v}_2, v_3, u),$$

где $\bar{u}/|u| = (u/|u|)^{-1}$.

Заметим, что $L \cap \{|u| = r\}$ для $0 < r < 1/\sqrt{2}$ диффеоморфины $\mathbb{R}P^5$. Если положить $v_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$, тогда диффеоморфизм можно задать следующим образом:

$$\begin{aligned}
L \cap \{|u| = r\} &\to \mathbb{R}P^5 \\
(v_1, v_2, v_3, r) &\mapsto (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3).
\end{aligned}$$

Тогда $\psi_{A'} \circ g \circ \psi_A^{-1}$, ограниченный на $|u| = r$ - диффеоморфизм $\xi\colon \mathbb{R}P^5 \to \mathbb{R}P^5$, который отображает $(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ в

$$(x_1, x_2, x_3, -y_1, -y_2, y_3) \in \mathbb{R}P^5.$$

Заметим, что ξ не зависит от выбора r и изотопно тождественному отображению $\mathbb{R}P^5 \to \mathbb{R}P^5$. Поэтому $\psi_{A'} \circ g \circ \psi_A^{-1}$ ограниченное на $L \cap \{|u| \geq 1/2\sqrt{2}\}$ продолжается до диффеоморфизма $L \to L$ как тождественное отображение в окрестности $L \cap \{u = 0\}$. Это означает, что g ограниченное на $(\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S) \cap \{|w| \geq 1/2\sqrt{2}\}$ продолжается до диффеоморфизма $\mathcal{Z}_P/\ker\lambda_A^S \to \mathcal{Z}_P/\ker\lambda_{A'}^S$. □

6. Когомологическая жесткость торических многообразий над $\mathrm{vc}(I^3)$

Суммируя, все выше сказанное (4.4, 5.2, 5.3 и 5.8) получаем:

Теорема 6.1. *Следующие три утверждения эквивалентны для торических многообразий M и M' над $\mathrm{vc}(I^3)$:*

(1) *M и M' диффеоморфны,*

(2) $H^*(M;\mathbb{Z})$ *и* $H^*(M';\mathbb{Z})$ *изоморфны как градуированные кольца,*

В частности, имеется единственный класс диффеоморфности для торических многообразий над $\mathrm{vc}(I^3)$.

Список литературы

[1] S. Hasui, H. Kuwata, M. Masuda, and S. Park *Classification of trivial manifolds over an n-cube with one vertex cut*, arXiv:1705.07530.

[2] S. Choi, T. Hwang, and H. Jang *Strong cohomological rigity of Bott manifolds*, arXiv:2202.10920.

[3] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[4] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[5] W. Fulton, *An Introduction to Toric Varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 113, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1993.

[6] A. Mukherjee, *Differential Topology*, Second edition. Hindustan Book Agency, New Delhi; Birkhäuser/Springer, Cham, 2015.

[7] T. E. Panov and Y. Ustinovsky, *Complex geometry of moment-angle manifolds*, Moscow Math. J. 12 (2012), 149–172.