МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

U-бордизмы. Башни Ботта

Работу выполнил:
Студент 403 группы
Мамаева Аида

Научный руководитель:
Панов Тарас
Евгеньевич

Москва, 2023 г.

1 Введение

Объектами исследования в данной работе являются многообразия Ботта и их обобщения. Существует немало статей, в которых проводятся исследования когомологической жесткости данных многообразий. Однако в данной работе мы рассмотрим следующий вопрос: могут ли многообразия Ботта являться образующими в кольце бодзимов? Так, В.М.Бухштабер и Н.Рэй ввели семейство торичсеких многообразий $B(n_1, n_2)$ (проективизация суммы n_2 линейных расслоений над флаговым многообразием BF_{n_1}), порождающих кольцо Ω^U. В своей работе [2] Т.Панов и Лу ввели многообразия $L(n_1, n_2)$(проективизация суммы n_2 линейных расслоений над $\mathbb{C}P^{n_1}$), которые также являются образующими кольца бордизмов.
В этой работе проведены подсчеты характеристических классов, которые позволят ответить на данный вопрос.

2 Основные понятия

Определение 1 ([1]). *Вещественное векторное расслоение ξ над многообразием M называется стабильно комплексным, если существует $N \in Z_+$, что $\xi \oplus \underline{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \cong \eta_{\mathbb{R}}$, где $\eta_{\mathbb{R}}$ - овеществление некотрого комплексного расслоения η над M.*

Определение 2 ([1]). *Стабильно комплексная структура на M задается изоморфизмом:4*

$$c_\tau : \mathcal{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \xrightarrow{\cong} \xi_{\mathbb{R}},$$

где ξ - комплексное векторное расслоение.

Известно, что $H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, ..., c_n], c_i$ - универсальные классы Чженя. Для последовательность $\omega = (i_1, ..., i_k) \in \mathbb{Z}^{\infty}_{\geq}$ определим $c_\omega = c_1^{i_1}...c_n^{i_n} \in H^{2||\omega||}(BU(n)) \subset H^{2||\omega||}(BU)$, где $||\omega|| = \sum_{k=1}^n k i_k$. Так же определяется характеристический класс Чженя $c_\omega(\xi)$, соответствующий n-мерному векторному расслоению ξ. Теперь определим следующий важный характеристический класс s_k:
Рассмотрим многочлен $P(t_1, ..., t_n) = t_1^k + ... + t_n^k = S(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, где σ_i - элементарные симметрические функции. Тогда $s_k := S(c_1, ..., c_n)$.
Пусть (M, c_τ) - стабильно комплексное 2n-многообразие. Тогда

$$s_k[M] :=< s_k(\mathcal{T}M), [M] >,$$

где $[M] \in H_{2n}(M, \mathbb{Z})$ - фундаментальный гомологический класс, называется характеристическим числом Чженя. Следующий фундаметальный результат описывает структуру кольца бордизмов Ω^U точки:

Теорема 1 ([2]). *(1) Кольцо комплексных бордизмов Ω^U является полиномиальным кольцом над $\mathbb{Z}$ с одной образующей в каждой положительной четной размерности:*

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i | i \geq 1], \quad deg a_i = 2i.$$

(2)Класс бордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве полиномиальной образующей a_i размерности $2i$ тогда и только тогда, когда:

$$s_i[M^{2i}] = \pm \begin{cases} 1 & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p \\ p & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \end{cases}$$

(3) Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда равны все их характеристические числа Чженя.

Определение 3 ([1]). *Башней Ботта высоты n называется башня расслоений комплексных многообразий:*

$$B_n \xrightarrow{p_n} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} ... \to B_2 \xrightarrow{p_2} B_1 \xrightarrow{p_1} pt,$$

где $B_1 = \mathbb{C}P^1$ и $B_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{k-1})$ для $2 \leq k \leq n$, $\mathbb{C}P(.)$ - комплексная проективизация, ξ_{k-1} - 1-комплексное расслоение над B_{k-1}, $\underline{\mathbb{C}}$ - тривиальное расслоение.

Из стандартных результатов о когомологиях проективизации векторных расслоений следует теорема:

Теорема 2 ([1]). *$H^*(B_n)$ есть свободный модуль над $H^*(B_{n-1})$ с образующими 1 и u_n, где u_n - первый класс Чженя тавтологического расслоения над B_n. Причем кольцевая структура на $H^*(B_n)$ задается соотношением:*

$$u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n = 0.$$

Или $H^*(B_n) = H^*(B_{n-1})[u_n]/u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n$.
Проекция p_n индуцирует инъективное отображение:

$$p_k^* : H^*(B_{n-1}) \to H^*(B_n)$$

Тогда $p_{n-1}^*(u_{n-1}) \in H^*(B_n)$ будем обозначать u_{n-1}.

$$c_1(\xi_{k-1}) \in H^2(B_{k-1}) \Rightarrow c_1(\xi_{k-1}) = a_{1,k}u_1 + ... + a_{k-1,k}u_{k-1} \Rightarrow u_k^2 = \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}u_iu_k (*)$$

По индукции получаем, что:

$$H^*(B_n) = H^*(B_{n-1})[u_n]/(*)$$

Теорема 3 ([1]). *(Бореля, Хирцебруха) Пусть $p : \mathbb{C}P(\xi) \to X$ - проективизация комплексного $n-$расслоения ξ над многообразием X, и пусть η - тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$. Тогда существует изоморфизм векторных расслоений:*

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi) \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong p^*\mathcal{T}M \oplus (\overline{\eta} \otimes p^*\xi),$$

где $\underline{\mathbb{C}}$ - тривиальное линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi)$. Когда X - стабильно комплексное многообразие, данный изоморфизм определяет каноническую стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P(\xi)$.

Лемма 1 ([2]).

$$\text{НОД}\{\tbinom{n}{i}, 0 < i < n\} = \begin{cases} 1 & \text{, если } n \neq p^k \text{ ни для какого простого } p \\ p & \text{, если } n = p^k \text{ для некоторого простого } p \end{cases}$$

3 Характеристические числа башен Ботта

$$p_n : B_n = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1}) \to B_{n-1}$$

$$\mathcal{T}B_n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong p_n^*\mathcal{T}B_{n-1} \oplus (\overline{\eta_n} \otimes p_n^*(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1})) \cong p_n^*\mathcal{T}B_{n-1} \oplus (\overline{\eta_n} \otimes p_n^*(\xi_{n-1})) \oplus \overline{\eta_n} \Rightarrow$$

$$\mathcal{T}B_n \oplus \underline{\mathbb{C}^n} \cong p_n^*...p_1^*(\underline{C} \oplus \underline{C}) \oplus p_n^*...p_3^*(\overline{\eta_2} \otimes p_2^*(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1}))\oplus$$

$$\ldots \oplus (\overline{\eta_n} \otimes p_n^*(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1}))$$

$$c(\mathcal{T}B_n) = (1-u_1)^2(1-u_2)...(1-u_n)(1-u_2+c_1(\xi_1))...(1-u_n+c_1(\xi_{n-1})),$$

где u_i - первый класс Чженя тавтологического расслоения $\overline{\eta_i}$ над B_i.

$$s_n(B_n) = \sum_{k=1}^{n}(-u_k)^n + \sum_{k=2}^{n}(-u_k + c_1(\xi_{k-1}))^n = \sum_{k=1}^{n}(-u_k)^n +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=0}^{n}\tbinom{n}{j}(-u_k)^j c_1^{n-j}(\xi_{k-1})$$

$u_j^2 = c_1(\xi_{j-1})u_j \Rightarrow u_j^n = u_j^{n-1}c_1(\xi_{j-1}) = ... = u_j c_1(\xi_{j-1})^{n-1}$. Таким образом:

$$s_n(B_n) = \sum_{k=1}^{n}(-u_k)^n + \sum_{k=2}^{n}(u_k)^n \sum_{j=1}^{n}\tbinom{n}{j}(-1)^j + \sum_{k=2}^{n} c_1(\xi_{k-1})^n = \sum_{k=2}^{n}(u_k)^n((-1)^n - 1) \Longrightarrow$$

при $n-$ четном $s_n(B_n) = 0$. Пусть теперь n - нечетное:
$s_n[B_n]$ - коэффициаент при мономе $u_1...u_n$ в $s_n(B_n)$

$$c_1(\xi_{k-1}) = a_{1,k}u_1 + ... + a_{k-1,k}u_{k-1},$$

$$u_k^n = u_k c_1(\xi_{k-1})^{n-1} \Rightarrow$$

при $k \neq n$ $u_k^n = 0 \Rightarrow s_n[B_n] = -2\langle u_n^n, u_1...u_n\rangle = -2\langle u_n(a_{1,n}u_1 + ... + a_{n-1,n}u_{n-1})^{n-1}, u_1...u_n\rangle$

Рассмотрим следующий частный случай:(случай флагового многообразия)

$$c_1(\xi_{k-1}) = u_{k-1} \text{ , для всех } 2 \leq k \leq n.$$

Тогда $s_n[B_n] = -2$

Вывод 1. *Семейство многообразий Ботта $\{B_{2k+1}\}$ не может быть взято в качестве образующих кольца Ω^U, в соответсвующих размерностях, при $k \neq 2^m - 1$.*

Доказательство. Действительно, обозначим $n = 2k + 1$. Тогда, из вычислений выше, следует, что любая линейная комбинация $\{B_n\}$ имеет четное характеристическое число. Тогда оно не является ни 1, ни нечетным простым числом.
При $k = 2^m - 1$ получаем, что $n + 1 = 2^{m+1}$. Тогда, из теоремы Милнора-Новикова, получаем требуемое утверждение (при $n = 2^{m+1} - 1$ в качестве образующей можно взять флаговое многообразие). □

4 Обобщенные башни Ботта

Определение 4 ([1]). *Обощенной башней Ботта высоты n называется башня расслоений комплексных многообразий:*

$$B_n \xrightarrow{p_n} B_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} ... \to B_2 \xrightarrow{p_2} B_1 \xrightarrow{p_1} pt,$$

где $B_1 = \mathbb{C}P^{k_1+1}$ B_j - комплексная проективизация суммы $k_j + 1$ линейного расслоения над B_{j-1}. Слой расслоения $p_j : B_j \to B_{j-1}$ есть $\mathbb{C}P^{k_j}$.

Из определения: $B_m = \mathbb{C}P(\xi_{m,1} \oplus \ldots \oplus \xi_{m,k_m+1})$, где $\xi_{m,i}$ - линейное расслоение над B_{m-1}. Предположим, что среди $\xi_{m,i}$ нет тривиальных. Тогда из свойства проективизации, домножив сумму одномерных расслоений на ξ такое, что $c_1(\xi) = -c_1(\xi_{m,1})$, получаем, что:

$$B_m = \mathbb{C}P((\xi_{m,1} \oplus \ldots \oplus \xi_{m,k_m+1}) \otimes \xi) \cong \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma_{m,1} \oplus \ldots \oplus \gamma_{m,k_m}),$$

где $\gamma_{m,i} = \xi_{m,i+1} \otimes \xi$. Пусть $\gamma_m = \gamma_{m,1} \oplus \ldots \oplus \gamma_{m,k_m}$. Тогда:

$$B_m = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma_m), \quad \dim\gamma_m = k_m.$$

Посчитаем кольцо когомологий обобщенных башен Ботта(по аналогии с теоремой 2):

$$H^*(B_n) = \mathbb{Z}[u_1, ..., u_n]/\{\phi_i(u_1, \dots u_n) = u_i^{k_i+1} - c_1(\gamma_i)u_i^{k_i} + \dots + (-1)^{k_i} c_{k_i}(\gamma_i)u_i : i \in \overline{1, n}\},$$

где u_i - первый класс Чженя тавтологического расслоения над B_i, лежащий в $H^2(B_n)$. Или:

$$c(\gamma_i) = (1 + c_1(\gamma_{i,1})) \cdot \dots \cdot (1 + c_1(\gamma_{i,k_i})) \Rightarrow c_j(\gamma_i) = \sum_{1 \le s_1 < \dots < s_j \le k_i} c_1(\gamma_{i,s_1}) \dots c_1(\gamma_{i,s_j}) \Rightarrow$$

$$\phi_i = u_i(u_i - c_1(\gamma_{i,1})) \cdot \dots \cdot (u_i - c_1(\gamma_{i,k_i}))$$

$$p_n : B_n = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma_n) \to B_{n-1}$$

$$\mathcal{T}B_n \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong p_n^*\mathcal{T}B_{n-1} \oplus (\overline{\eta_n} \otimes p_n^*(\underline{\mathbb{C}} \oplus \gamma_n)) \cong p_n^*\mathcal{T}B_{n-1} \oplus (\overline{\eta_n} \otimes p_n^*(\gamma_n)) \oplus \overline{\eta_n} \Rightarrow$$

$$c(\mathcal{T}B_n) = p_n^* c(\mathcal{T}B_{n-1})(1 - u_n)((1 - u_n)^{k_n} + (1 - u_n)^{k_n - 1} p_n^* c_1(\gamma_n) + \dots + c_{k_n}(\gamma_n))$$

Пусть $k_i \ge 1$. Тогда:

$$s_N(B_n) = (k_1+1)(-u_1)^N + \sum_{i=2}^{n} (-u_i)^N + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} (-u_i + c_1(\gamma_{j,i}))^N = -\sum_{i=2}^{n} u_i^N + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} (-u_i + c_1(\gamma_{j,i}))^N$$

$$s_n(B_n) = \sum_{i=2}^{n} (-u_i)^N + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{p=0}^{N} \binom{N}{p} (-u_i)^{N-p} c_1(\gamma_{j,i})^p$$

$$s_N[B_n] = < \sum_{i=2}^{n} (-u_i)^N + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{p=0}^{N} \binom{N}{p} (-u_i)^{N-p} c_1(\gamma_{j,i})^p, u_1^{k^1} \cdot \dots \cdot u_n^{k_n} >$$

Пусть теперь для каждого i $\gamma_{i,j} = \underline{\mathbb{C}}$ для $j \in \overline{1, k_i - 1}$. Обозначим $\gamma_i = \gamma_{i,k_i}$ Тогда:

$$\phi_i = u_i^{k_i+1} - c_1(\gamma_i)u_i^{k_i}$$

$$s_N(B_n) = \sum_{i=2}^{n} k_i(-u_i)^N + \sum_{i=2}^{n} \sum_{p=0}^{N} \binom{N}{p} (-u_i)^p c_1(\gamma_i)^{N-p}$$

$$u_i^N = u_i^p c_1(\gamma_i)^{N-p}, \text{при } p \ge k_i, \text{при } p < k_i :$$

$$N - p > N - k_i$$

Т.к. $c_1(\gamma_i) \in H^2(B_{i-1})$, $\dim B_{i-1} = 2(k_1 + \dots + k_{i-1}) \Rightarrow c_1(\gamma_i)^{N-p} = 0$ и $c_1(\gamma_i)^{N-k_i} = 0$ при $i \neq n$; $u_i^N = 0$, при $i \neq n$ (из аналогичных соображений):

$$s_n(B_n) = u_n^{k_n} c_1(\gamma_n)^{N-k_n}((-1)^N k_n + \sum_{p=k_n}^{N} \binom{N}{p})$$

В случае, если $c_1(\xi_n) = u_{n-1}$:

$$s_N(B_n) = u_n^{k_n} \cdot u_{n-1}^{k_{n-1}} \cdot \dots u_1^{k_1}((-1)^N k_n + \sum_{p=k_n}^{N} (-1)^p \binom{N}{p})$$

$$s_N[B_n] = (-1)^N k_n + \sum_{p=k_n}^{N} (-1)^p \binom{N}{p}$$

Будем обозначать многообразие Ботта размерности $2N$ - $B(N,k)$, где $2k+1$ - разменость последнего слоя расслоения (то есть нас не интересует высота башни).

Теорема 4. *Классы бордизмов* $[B(N,k)] \in \Omega^U_{2N}$ *порождают кольцо* Ω^U.

Доказательство. Используя уже посчитанное характеристическое число многообразия, получаем, что:

$$s_n[B(N,k) - 2B_n(N,k+1) + B(N,k+2)] = (-1)^k\binom{N}{k} + (-1)^{k+1}\binom{N}{k+1} - 2(-1)^{k+1}\binom{N}{k} =$$

$$= (-1)^k[\binom{N}{k} + \binom{N}{k+1}] = (-1)^k\binom{N+1}{N-k}$$

Тогда требуемый результат следует из теоремы Милнора - Новикова и из леммы 1. $\square$

Список литературы:

[1] V. Buchstaber, T. Panov- "Toric topology";

[2] Zhi Lu, Taras Panov - "On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings".