ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

Механико-математический факультет
Кафедра математической статистики и случайных процессов

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Момент-угол комплексы, маломерные многогранники и графы

Выполнила студентка 603 группы
Оганисян Виктория Алексеевна

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, профессор
Панов Тарас Евгеньевич

____
(подпись научного руководителя)

Москва, 2023 г.

Содержание

1 Введение

Несомненный интерес представляет изучение гомотопических свойств момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$, в данной области имеется много важных результатов и открытых вопросов [1], и она продолжает активно развиваться. Момент-угол комплексы — интересный и важный класс пространств, отдельный интерес среди которых представляют те, которые соответствуют простым многогранникам P. Такие момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_P$ являются гладкими многообразиями с комплексной структурой; более того, они могут быть заданы как пересечение эрмитовых квадрик.

В данной работе мы изучаем многогранники P, для которых соответствующие момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфны или гомотопически эквивалентны связным суммам произведений сфер. Известны широкие классы многогранников P (например, двойственные стековым, циклические), для которых $\mathcal{Z}_P$ диффеоморфны связной сумме произведений *пар* сфер (см. [1], [3]), однако пример P такого, что $\mathcal{Z}_P \cong M_1 \# M_2 \# \ldots \# M_k$, где все M_i это произведения сфер и хотя бы одно M_i содержит *более двух* множителей, появился относительно недавно (см. [4], [12]).

Один из главных открытых вопросов в этом направлении — описать класс многогранников P, для которых $\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер. В данной работе исследуется случай многогранников размерности 3 и 4. Для трёхмерных многогранников получен исчерпывающий ответ на этот вопрос.

Теорема (см. теорему 3.1). *Пусть P — трёхмерный простой многогранник, не являющийся кубом; тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *P получается из симплекса Δ^3 последовательной срезкой вершин, то есть P^* — стековый многогранник;*

(b) *$\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.*

(c) *$H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер.*

(d) 1-*остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф.*

(e) *$\mathcal{K}_P$ минимально неголодов.*

Заметим, что момент-угол многообразие, соответствующее трёхмерному кубу, диффеоморфно $S^3 \times S^3 \times S^3$.

Любая двумерная симплициальная сфера комбинаторно эквивалентна границе трёхмерного многогранника. Однако это уже неверно для трёхмерных симплициальных сфер. Для трёхмерных симплициальных сфер, а значит и для четырёхмерных многогранников, получены следующие результаты.

Теорема (см. теорему 3.9)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$, где M — связная сумма произведений сфер, в том и только в том случае, когда верно одно из следующих утверждений:*

(a) $\mathcal{K}$ — граница четырёхмерного октаэдра, и $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \cong S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^3$;

(b) $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф;

(c) $\mathcal{K}^1$ имеет ровно два недостающих ребра, и они не смежны друг с другом, то есть образуют границу квадрата.

Данная теорема является критерием изоморфизма колец когомологий $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$. Таким образом, вышеуказанное условие на $\mathcal{K}^1$ является необходимым для гомотопической эквивалентности $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \sim M$, однако пока неизвестно, является ли оно достаточным. При этом верно следующее.

Теорема (см. теорему 3.12)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера такая, что $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф. Тогда все высшие произведения Масси в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ тривиальны.*

Следствие (см. следствие 3.14)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера. Тогда $\mathcal{K}$ минимально неголодов тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф.*

Вопрос о достаточности условия хордовости $\mathcal{K}^1$ для формальности $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ пока остается открытым.

При изучении гомотопического типа момент-угол комплексов важен класс B_Δ симплициальных комплексов $\mathcal{K}$, для которых $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Полного комбинаторного описания симплициальных комплексов из этого класса пока нет, но известно, например, что B_Δ содержит направленные MF-комплексы [9], сдвинутые (shifted) и вполне заполняемые (totally fillable) комплексы [13, 14]. Если же Γ — граф, можно дать исчерпывающий ответ на вопрос, когда $\Gamma \in B_\Delta$, а именно тогда и только тогда, когда Γ — хордовый (теорема 4.6). Более того, гомотопический тип $\mathcal{Z}_\Gamma$ для хордового Γ можно легко вычислить явно (следствие 4.9).

2 Предварительные сведения

Множество $\{1, 2, \ldots, m\}$ из m элементов мы для краткости обозначаем как $[m]$. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, мы по умолчанию полагаем, что пустое множество $\varnothing$ и все одноэлементные подмножества $\{i\} \subset [m]$ содержатся в $\mathcal{K}$.

Для $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ будем обозначать как $\mathcal{K}_I$ (или же $\mathcal{K}_{\{i_1,\ldots,i_k\}}$) полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на вершинах $i_1, \ldots, i_k$. Мы обозначаем i-й остов симплициального комплекса $\mathcal{K}$ как $\mathcal{K}^i$.

Момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, соответствующий $\mathcal{K}$, можно определить следующим образом (см. параграф 4.1 [1]):

$$\mathcal{Z}_\mathcal{K} = \bigcup_{I \subset \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} D^2 \times \prod_{i \notin I} S^1 \right) .$$

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, а $\mathcal{K}_J$ — полный подкомплекс, соответствующий $J \subset [m]$. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ — ретракт $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, а $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.*

Доказательство. Если профакторизовать $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ по всем координатам из множества $[m] \setminus J$, мы получим в точности $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$. Действительно, пусть $i : \mathcal{Z}_\mathcal{K} \hookrightarrow (D^2)^m$ — каноническое вложение, а $q : (D^2)^m \to (D^2)^{|J|}$ — отображение факторизации слагаемых с номерами из множества $[m] \setminus J$, тогда $r = q \circ i : \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to \mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J}$ и есть нужная ретракция. □

Теорема 2.2 ([1, теорема 4.5.8])**.** *Имеются изоморфизмы групп*

$$H^l(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J)$$

и изоморфизм колец $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong \bigoplus\limits_{J \subset [m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J)$, где структура умножения в кольце справа задается каноническими отображениями

$$H^{k-|I|-1}(\mathcal{K}_I) \otimes H^{l-|J|-1}(\mathcal{K}_J) \longrightarrow H^{k+l-|I|-|J|-1}(\mathcal{K}_{I \cup J}) ,$$

индуцированными симплициальными отображениями $\mathcal{K}_{I \cup J} \to \mathcal{K}_I * \mathcal{K}_J$ в случае $I \cap J = \varnothing$ и нулем иначе.

Из теоремы 2.2 очевидным образом следует, что для любого $\mathcal{K}$ верно

$$H^1(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0 \text{ и } H^2(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = 0. \tag{1}$$

Для краткости мы используем обозначения

$$\mathcal{H}^{l,J} = \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J), \quad \mathcal{H}^{*,J} = \widetilde{H}^*(\mathcal{K}_J) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^{l,*} = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J).$$

Структура кольца на $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})=\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ задается отображениями

$$\mathcal{H}^{k,I}\otimes\mathcal{H}^{l,J} \longrightarrow \mathcal{H}^{k+l+1,I\sqcup J}, \qquad k,l\geq 0,\ I\cap J=\varnothing. \tag{2}$$

Предложение 2.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс размерности n, тогда когомологическая длина $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ не превосходит $n+1$.*

Доказательство. Пусть есть r элементов $c_i\in H^{l_i}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ таких, что $c_1\cdot\ldots\cdot c_r=c\neq 0$. Тогда по теореме 2.2 найдутся соответствующие им элементы $\widehat{c}\in\mathcal{H}^{l,J}$ и $\widehat{c}_i\in\mathcal{H}^{l_i-|J_i|-1,J_i}$, для которых $\widehat{c}_1\cdot\ldots\cdot\widehat{c}_r=\widehat{c}\neq 0$, где $l=(\sum_{i=1}^r l_i-|J_i|-1)+r-1$, $l_i-|J_i|-1\geq 0$ и $J=J_1\sqcup\dots\sqcup J_r$. Тогда

$$n=\dim\mathcal{K}\geq l=\left(\sum_{i=1}^r l_i-|J_i|-1\right)+r-1\geq r-1,$$

откуда получаем $n+1\geq r$, что и требовалось. □

2.1 Многогранники

(Выпуклым) *многогранником* P называется замкнутое пересечение конечного числа полупространств в вещественном аффинном пространстве. *Гипергранью* P называется его грань коразмерности 1.

Многогранник P размерности n называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно n его гиперграням. Соответственно, если P простой, то двойственный к нему многогранник P^* будет симплициальным, и его границу ∂P^* можно рассматривать как симплициальный комплекс, который мы будем обозначать $\mathcal{K}_P$ (нерв-комплекс простого многогранника P). Соответствующий $\mathcal{K}_P$ момент-угол-комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P}$ обозначается $\mathcal{Z}_P$.

Далее, если не оговорено противное, n будет обозначать размерность простого многогранника P, а m — количество его гиперграней.

Теорема 2.4 ([1, теорема 4.1.4, следствие 6.2.5])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — триангуляция сферы размерности $(n-1)$ с m вершинами. Тогда $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — замкнутое топологическое многообразие размерности $m+n$.*

Пусть P — простой n-мерный многогранник с m гипергранями, тогда $\mathcal{Z}_P$ — гладкое многообразие размерности $m+n$.

Простой многогранник Q называется *стековым*, если он получается из симплекса цепочкой последовательных звёздных подразбиений гиперграней. Соотвественно, двойственный к стековому многогранник P получается из симплекса цепочкой последовательных срезок вершин.

Связной суммой произведений сфер мы называем замкнутое n-мерное многообразие, получаемое взятием связной суммы от конечного числа слагаемых, являющихся произведениями сфер $S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}$, где $n_1+\cdots+n_k=n$.

Следующая теорема следует из результатов МакГаврана [5], см. [6, Theorem 6.3]. Также альтернативный подход изложен в [3, §2.2].

Теорема 2.5 ([1, Теорема 4.6.12])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — граница стекового многогранника размерности n с $m>n+1$ вершинами. Тогда соответствующее момент-угол многообразие гомеоморфно связной сумме произведений сфер,*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \mathop{\#}_{k=3}^{m-n+1} (S^k\times S^{m+n-k})^{\#(k-2)C_{m-n}^{k-1}}$$

В частности, момент-угол-комплексы, соответствующие многоугольникам (двумерным многогранникам) являются связными суммами произведений пар сфер.

2.2 Графы

Графом мы называем одномерный симплициальный комплекс.

Граф Γ называется *хордовым*, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (то есть ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними в цикле).

Порядок вершин графа такой, что для любой вершины $\{i\}$ все её соседи с номерами меньше i попарно смежны, называется *совершенным порядком исключения*.

Теорема 2.6 ([2])**.** *Граф является хордовым тогда и только тогда, когда его вершины можно упорядочить в совершенном порядке исключения.*

Следующее свойство хордовых графов напрямую следует из теоремы 2.6.

Предложение 2.7. *Пусть Γ — хордовый граф на $[m]$, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения. Тогда для всех $i\in[m]$ граф $\Gamma\setminus\{i\}$ тоже хордовый, и при $i=m$ его вершины автоматически расположены в совершенном порядке исключения.*

2.3 Произведения Масси

Пусть (A, d) — дифференциально градуированная алгебра, и α_i — классы в когомологиях $H^{p_i}(A, d)$ для $1 \leq i \leq n$. *Определяющая система*, ассоциированная с $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, — это множество элементов $\{a_{i,k}\}$ для $1 \leq i \leq k \leq n$, $(i, k) \neq (1, n)$ таких, что $a_{i,i} \in A^{p_i}$ — некоторый представитель класса α_i, и $a_{i,k} \in A^{p_i+\ldots+p_k-k+i}$ удовлетворяет равенству

$$da_{i,k} = \sum_{r=i}^{k-1} \overline{a_{i,r}} a_{r+1,k} \ ,$$

где $\overline{a_{i,r}} = (-1)^{1+\deg a_{i,r}} a_{i,r}$.

Каждой определяющей системе, ассоциированной с $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, соответствует коцикл, определяемый как

$$\sum_{r=1}^{n-1} \overline{a_{1,r}} a_{r+1,n} \in A^{p_1+\ldots+p_n-n+2}$$

Произведение Масси $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ порядка n — это множество классов когомологий таких коциклов для всевозможных определяющих систем. То есть

$$\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = \left\{ \sum_{r=1}^{n-1} \overline{a_{1,r}} a_{r+1,n} \mid \{a_{i,k}\} \text{ — определяющая система} \right\} \ .$$

Произведение Масси тривиально, если $0 \in \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$.

Заметим, что $\deg a_{i,k} = \deg a_{i,r} + \deg a_{r+1,k} - 1$ верно для любого $r = i, \ldots, k-1$, поэтому $d\overline{a}_{i,k} = \sum_{r=i}^{k-1} a_{i,r} \overline{a}_{r+1,k}$.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ называется *голодовым*, если умножение и все высшие операции Масси в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ тривиальны.

Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$ называется *минимально неголодовым*, если $\mathcal{K}$ не является голодовым, однако для любой вершины $v \in [m]$ комплекс $\mathcal{K} \setminus \{v\}$ уже голодовый.

3 Многогранники

В данном разделе мы изучаем класс многогранников P, для которых соответствующие момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентны связным суммам произведений сфер. Оказывается, что в случае многогранников P размерности 3 и 4 важным фактором является структура 1-остова $\mathcal{K}_P$.

3.1 Трёхмерные многогранники

Основным результатом данного раздела является

Теорема 3.1. *Пусть P — трёхмерный простой многогранник, не являющийся кубом; тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(a) *P получается из симплекса Δ^3 последовательной срезкой вершин, то есть P^* — стековый многогранник;*

(b) *$\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.*

(c) *$H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер.*

(d) *1-остов $\mathcal{K}_P$ — хордовый граф.*

(e) *$\mathcal{K}_P$ минимально неголодов.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть P — простой многогранник размерности $n>2$ такой, что кольцо когомологий $\mathcal{Z}_P$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер. Тогда $\mathcal{K}_P^1$ — хордовый граф.*

Доказательство. Пусть m — число граней P. Предположим, что

$$H^*(\mathcal{Z}_P) \cong H^*(M_1\#M_2\#\cdots\#M_k),$$

где $M_i = S^{l_i}\times S^{m+n-l_i}$. Обозначим соответствующие сферам образующие $H^*(\mathcal{Z}_P)$ как a_i, b_i, где $\deg a_i = l_i$, $\deg b_i = m+n-l_i$, $i=1,\ldots,k$, а фундаментальный класс обозначим как c, $\deg c = m+n$. Тогда имеются следующие соотношения: $a_i\cdot b_i = c$ для $i=1,\ldots,k$, в то время как все остальные умножения в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ тривиальны.

Предположим, что в $\mathcal{K}_P$ есть бесхордовый цикл C на $p>3$ вершинах. Тогда C — полный подкомплекс в $\mathcal{K}_P$, следовательно $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_P)$ по лемме 2.1. По теореме 2.5 $\mathcal{Z}_C$ тоже является связной суммой пар сфер, и соответственно в кольце $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть нетривиальные умножения $a'_j\cdot b'_j = c'$, где c' соответствует фундаментальному классу $\mathcal{Z}_C$ и $\deg(c') = |C|+2 \le m+2 < m+n = \deg(c)$, чего не может быть в $H^*(\mathcal{Z}_P)$.

Значит, в $\mathcal{K}_P$ нет бесхордовых циклов более чем с тремя вершинами, а это и означает, что $\mathcal{K}_P^1$ — хордовый граф. □

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.1.

Доказательство. Докажем следующие цепочки следствий: (a)⇒(b)⇒(c)⇒(d)⇒(a), (e)⇒(d) и (a)⇒(e).

(a)⇒(b) следует из теоремы 2.5.

(b)⇒(c) очевидно.

$(c)\Rightarrow(d)$ Пусть $H^*(\mathcal{Z}_P)\cong H^*(M_1\#M_2\#\ldots\#M_k)$, где все M_i — это произведения сфер. Больше $dim(P)=3$ слагаемых ни в каком M_i быть не может, так как когомологическая длина $\mathcal{Z}_P$ равна трём (предложение 2.3). Если же какое-то M_i имеет ровно три слагаемых, то P — куб согласно [4, теорема 4.3 (a)], что противоречит условию. Значит, все M_i содержат ровно по два слагаемых, и тогда $\mathcal{K}_P^1$ — хордовый граф по лемме 3.2.

(d)⇒(a) Докажем это индукцией по m — количеству гиперграней P. База при $m=4$ очевидна (тогда P — симплекс).

Сделаем шаг индукции. Предположим, что импликация (d)⇒(a) доказана для многогранников, имеющих не более $m-1$ гиперграней. Докажем это для произвольного многогранника P с m гипергранями.

Считаем, что вершины $\mathcal{K}_P$ пронумерованы в совершенном порядке исключения. Пусть вершина со старшим номером m имеет s смежных с ней вершин, обозначим их номера как $j_1,\ldots,j_s$. Докажем, что $s=3$.

Обозначим i-тую гипергрань P как F_i. Тогда гипергрань F_m является s-угольником и смежна с гранями F_{j_r}, $r=1,\ldots,s$. Все вершины $\{j_r\}$ попарно соединены ребрами, то есть образуют клику (это ясно из определения совершенного порядка исключения), поэтому все гиперграни F_{j_r} попарно смежны.

Предположим, что $s\geq 4$. Рассмотрим грани $F_{j_1}, F_{j_2}, F_{j_3}, F_{j_4}$. Можем считать, что они расположены вокруг F_m «по часовой стрелке», то есть F_{j_2} лежит между F_{j_1} и F_{j_3}, а F_{j_3} лежит между F_{j_2} и F_{j_4}, а следовательно $F_m\cap F_{j_1}\cap F_{j_3}=\varnothing$ и $F_m\cap F_{j_2}\cap F_{j_4}=\varnothing$. Покажем, что F_{j_1} с F_{j_3} и F_{j_2} с F_{j_4} не могут быть смежны одновременно: предположим, что F_{j_1} смежна с F_{j_3}, тогда грани F_m, F_{j_1}, F_{j_3} образуют 3-пояс, удаление которого из P разделит P на две компоненты связности [10, пункт 4 леммы 4], причём F_{j_2} и F_{j_4} будут лежать в разных компонентах, а значит они не могут быть смежны — противоречие. Итак, $s=3$, а значит F_m — треугольник.

Если F_m смежна хоть с одной треугольной гранью, то P — симплекс, а если нет, то существует многогранник P', из которого P получается срезкой вершины с образованием грани F_m [10, лемма 1]. Так как $\mathcal{K}_{P'}$ получается из $\mathcal{K}_P$ удалением вершины $\{m\}$ и добавлением симплекса $\{j_1, j_2, j_3\}$, то 1-остов $\mathcal{K}_{P'}$ — хордовый граф согласно предложению 2.7. При этом P' имеет $m-1<m$ граней, а значит, для него верно предположение индукции и P' получается из симплекса несколькими срезками

вершин. P получается из P' срезкой вершины, и это завершает шаг индукции.

(e)⇒(d) Докажем от противного:

Пусть $\mathcal{K}_P$ минимально неголодов и пусть он содержит бесхордовый цикл C на $p>3$ вершинах. Заметим, что C — полный подкомплекс в $\mathcal{K}_P$ и что $p<m$ (потому что $p=m$ означало бы, что $\mathcal{K}_P=C$). Возьмем произвольную вершину $v\in[m]\setminus C$, тогда C — полный подкомплекс в том числе и в $\mathcal{K}_P\setminus\{v\}$. Значит, $H^*(\mathcal{Z}_C)$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P\setminus\{v\}})$ по лемме 2.1. Однако в $H^*(\mathcal{Z}_C)$ есть нетривиальные умножения (см. 2.5), а в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_P\setminus\{v\}})$ все умножения должны быть нулевыми, так как комплекс $\mathcal{K}_P\setminus\{v\}$ голодов — противоречие.

Значит, таких циклов в $\mathcal{K}_P$ быть не может, то есть $\mathcal{K}_P^1$ — хордовый граф.

(a)⇒(e) Это следует из доказанного в работе [11] критерия минимальной неголодовости обобщенных многогранников усечения (т.е. многогранников, получаемых срезками вершин из произведения симплексов), согласно которому для стекового $P^*\neq\Delta^n$ комплекс $\mathcal{K}_P$ всегда минимально неголодов. □

В случае $\dim(P)>4$ условия хордовости $\mathcal{K}_P^1$ недостаточно для того, чтобы $\mathcal{Z}_P$ было гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер:

Пример 3.3. Обозначим через Q многогранник, получаемый из Δ^3 срезкой двух вершин (Q называют также 5-книжкой). Тогда из теоремы 2.5 нам известно, что

$$\mathcal{Z}_Q \cong (S^3\times S^6)^{\#3}\#(S^4\times S^5)^{\#2}\,.$$

Рассмотрим многогранники вида $P_d=Q\times\Delta^d$, где $d\geq 2$. Размерность P_d равна $3+d$, соответственно многогранники такого вида существуют в любой размерности, начиная с пяти.

Так как $\mathcal{Z}_{P_d} = \mathcal{Z}_Q \times \mathcal{Z}_{\Delta^d}=\mathcal{Z}_Q\times S^{2d-1}$, то $\mathcal{Z}_{P_d}$ очевидно не является связной суммой произведений сфер, но при этом $\mathcal{K}_{P_d}^1$ — хордовый граф. Действительно, $\mathcal{K}_{P_d}=\mathcal{K}_Q*\partial\Delta^d$, поэтому множество недостающих ребер $\mathcal{K}_{P_d}^1$ совпадает с множеством недостающих ребер $\mathcal{K}_Q^1$, а $\mathcal{K}_Q^1$ имеет всего три недостающих ребра, причем никакие два из них в $\mathcal{K}_{P_d}^1$ не образуют бесхордовый 4-цикл, а наличие бесхордового цикла с бóльшим числом вершин требует наличия хотя бы пяти недостающих рёбер.

Случай $\dim(P)=4$ будет рассмотрен в следующем разделе.

3.2 Четырёхмерные многогранники

Вспомним, что умножение в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ задается отображениями (2).

Определение 3.4. Элемент $c \in \mathcal{H}^{l,J} = \widetilde{H}^l(\mathcal{K}_J)$ будем называть *разложимым*, если $c = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot b_i \neq 0$, для некоторых ненулевых $a_i \in \widetilde{H}^{r_i}(\mathcal{K}_{I_i})$, $b_i \in \widetilde{H}^{l-1-r_i}(\mathcal{K}_{J \setminus I_i})$, $0 \leq r_i \leq l-1$, и собственных подмножеств $I_i \subsetneq J$. Иначе элемент $c \in \mathcal{H}^{l,J}$ будем называть *неразложимым*.

Предложение 3.5. *Класс когомологий $c \in \mathcal{H}^{l,J}$ является разложимым тогда и только тогда, когда с лежит в подкольце $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$, порожденном элементами групп $\mathcal{H}^{r,I}$ для $r = 0, 1, \ldots, l-1$ и собственных подмножеств $I \subsetneq J$.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 2.2. □

Недостающая грань (или *минимальная не-грань*) $\mathcal{K}$ — это подмножество $I \subset [m]$ такое, что I — не симплекс $\mathcal{K}$, но каждое собственное подмножество I является симплексом $\mathcal{K}$. Каждая недостающая грань соответствует полному подкомплексу $\partial\Delta_I \subset \mathcal{K}$, где $\partial\Delta_I$ — граница симплекса Δ_I, образованного вершинами I. Недостающая грань I определяет класс когомологий, являющийся образующей в $\widetilde{H}_{|I|-2}(\mathcal{K})$, который мы также обозначаем как $\partial\Delta_I$. Мы обозначаем как $\mathrm{MF}_n(\mathcal{K})$ множество всех недостающих граней I размерности n, то есть таких, что $|I| = n+1$.

Следующая лемма является обобщением [4, лемма 4.4].

Лемма 3.6. *Пусть $I \in \mathrm{MF}_l(\mathcal{K})$ — недостающая грань $\mathcal{K}$. Тогда всякий класс когомологий $c \in \mathcal{H}^{l-1,*}(\mathcal{K})$ такой, что $\langle c, \partial\Delta_I \rangle \neq 0$, является неразложимым.*

Доказательство. Докажем это от противного, предположив разложимость c.

Рассмотрим комплекс $\mathcal{K}'$, полученный из $\mathcal{K}$ заклеиванием всех недостающих граней размерности l, то есть $\mathrm{MF}_l(\mathcal{K}') = \varnothing$ и $\mathcal{K}^{l-1} = (\mathcal{K}')^{l-1}$. Тогда вложение $i : \mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{K}'$ индуцирует гомоморфизм колец $i^* : \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}') \to \mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$, причём $\mathcal{H}^{r,*}(\mathcal{K}') \cong \mathcal{H}^{r,*}(\mathcal{K})$ при $r \leq l-2$. Заметим также, что $i_*(\partial\Delta_I) = 0$ для всех $I \in \mathrm{MF}_l(\mathcal{K})$.

Поэтому все элементы a_i, b_i имеют прообразы a_i', b_i', то есть $i^*(a_i') = a_i$ и $i^*(b_i') = b_i$; при этом $i_*(\Delta_i) = 0$. Тогда рассмотрим элемент $c' := \sum_{i=1}^{p} a_i' \cdot b_i'$. Так как i^* — гомоморфизм колец, то $i^*(c') = c$, однако $1 = c(\Delta_i) = i^*(c')(\Delta_i) = c'(i_*(\Delta_i)) = c'(0) = 0$, получили противоречие. Соответственно, элемент c является неразложимым.

□

Теорема 3.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера такая, что $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(M)$, где M — связная сумма произведений пар сфер.*

Доказательство. Работая в обозначениях (2) изучим, какие классы когомологий могут перемножаться нетривиально в $\mathcal{H}^{*,*} = H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Так как $\mathcal{K}$ — трёхмерная сфера, то $\mathcal{H}^{k,*}=0$ для $k\geq 4$ и умножения вида $\mathcal{H}^{3,*}\otimes\mathcal{H}^{i,*}\to\mathcal{H}^{4+i,*}$, $\mathcal{H}^{2,*}\otimes\mathcal{H}^{2,*}\to\mathcal{H}^{5,*}$ и $\mathcal{H}^{2,*}\otimes\mathcal{H}^{1,*}\to\mathcal{H}^{4,*}$ тривиальны по соображениям размерности. Также $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ является $(m+4)$-мерным многообразием (см. 2.4).

Нетривиальные умножения $\mathcal{H}^{i,I}\otimes\mathcal{H}^{2-i,J}\to\mathcal{H}^{3,I\cup J}$ задаются двойственностью Пуанкаре для $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ (см. [1, предложение 4.6.6]), так как группа $\mathcal{H}^{3,I\cup J}$ нетривиальна только при $I\sqcup J=[m]$. Группы $\mathcal{H}^{i,I}$ для $i=0,1$ автоматически не имеют кручений, поэтому мы имеем изоморфизмы $\mathcal{H}^{i,I}\cong\mathcal{H}^{2-i,[m]\setminus I}$, задаваемые двойственностью Пуанкаре (или же изоморфизмы двойственности Александера для 3-сферы $\mathcal{K}$, см. [1, 3.4.11]), для всех i и $I\subset[m]$.

Докажем теперь, что умножения вида $\mathcal{H}^{0,*}\otimes\mathcal{H}^{0,*}\longrightarrow\mathcal{H}^{1,*}$ тривиальны. Пусть есть два класса когомологий $a,b\in\mathcal{H}^{0,*}$ такие, что $0\neq a\cdot b=:c\in\mathcal{H}^{1,I}$. Так как $c\neq 0$, существует цикл $\gamma\in H_1(\mathcal{K}_I)$ такой, что $\langle c,\gamma\rangle\neq 0$. Его можно представить в виде $\gamma=\lambda_1\gamma_1+\dots+\lambda_k\gamma_k$, где γ_i — простые бесхордовые циклы в графе $\mathcal{K}^1$ и $\lambda_i\neq 0$. По условию $\mathcal{K}^1$ хордовый, поэтому $\gamma_i\in\mathrm{MF}_2(\mathcal{K})$ для всех $i=1,\dots,k$. Так как $0\neq\langle c,\gamma\rangle=\sum_{j=1}^k\lambda_i\langle c,\gamma_i\rangle$, то $\langle c,\gamma_i\rangle\neq 0$ для некоторого i. Таким образом, c неразложим по лемме 3.6. Получили противоречие.

Наконец, докажем, что умножения вида $\mathcal{H}^{0,*}\otimes\mathcal{H}^{1,*}\longrightarrow\mathcal{H}^{2,*}$ тривиальны. Предположим, что есть нетривиальное умножение $a^0\cdot b^1=c^2\neq 0$ для некоторых классов $a^0\in\mathcal{H}^{0,I}$, $b^1\in\mathcal{H}^{1,J}$, $c^2\in\mathcal{H}^{2,I\cup J}$. Тогда по двойственности Пуанкаре найдётся элемент $a'\in\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{[m]\setminus(I\cup J)})$ такой, что $0\neq a'\cdot c^2=a'\cdot a^0\cdot b^1\in\widetilde{H}^3(\mathcal{K})$, однако в таком случае $a^0\cdot a'\neq 0$ и мы получаем нетривиальное умножение вида $\mathcal{H}^{0,I}\otimes\mathcal{H}^{0,J}\longrightarrow\mathcal{H}^{1,I\cup J}$. Противоречие.

Следовательно, все умножения в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ тривиальны, кроме тех, которые задаются двойственностью Пуанкаре. В таком случае $H^*(\mathcal{Z}_P)$ не имеет кручений и порождается элементами $\{a_i^r,\,b_i^{2-r},\,c\mid r=0,1,\ i=1,2,\dots,N\}$, которые умножаются по правилу $a_i^k\cdot b_j^l=\delta_{ij}\delta_{k,2-l}c$ (где δ_{ij}, $\delta_{k,2-l}$ — символы Кронекера), то есть $H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер, теорема доказана. □

Теорема 3.7 не верна в размерностях ≥ 5, как показывает пример 3.3. Тем не менее, можно доказать следующее:

Теорема 3.8. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальная сфера размерности n такая, что группы $\mathcal{H}^{l,*}(\mathcal{K})$ порождены недостающими гранями $\mathcal{K}$ для $l\leq\left[\frac{2n-1}{3}\right]$, то есть для любого ненулевого класса $c\in\mathcal{H}^{l,*}(\mathcal{K})$ существует $I\in\mathrm{MF}_{l+1}(\mathcal{K})$ такая, что $\langle c,\partial\Delta_I\rangle\neq 0$. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.7, изучим, какие классы когомологий могут перемножаться нетривиально в (2). Обозначим $q := \left[\frac{2n-1}{3}\right]$.

Так как $\mathcal{K}$ — n–мерная сфера, то $\mathcal{H}^{k,*} = 0$ для $k > n$, и поэтому произведения вида $\mathcal{H}^{i,*} \otimes \mathcal{H}^{j,*} \to \mathcal{H}^{i+j+1,*}$ при $i + j \geq n$ тривиальны по соображениям размерности.

Нетривиальные произведения вида $\mathcal{H}^{i,I} \otimes \mathcal{H}^{n-1-i,J} \to \mathcal{H}^{n,I\cup J}$ задаются двойственностью Пуанкаре, так как группа $\mathcal{H}^{n,I\cup J}$ нетривиальна только при $I \sqcup J = [m]$. Докажем от противного, что группы $\mathcal{H}^{i,I}$ не имеют кручений для $i \leq q$. Предположим, что существует коцикл $0 \neq c \in \mathcal{H}^{i,*}$ и ненулевое целое k такие, что $k \cdot c = 0$. Рассмотрим представителя класса c — коцепь $\tilde{c}$, тогда $k \cdot \tilde{c}$ — кограница и $k \cdot \tilde{c} = d\tilde{b}$ для некоторой коцепи $\tilde{b}$. По условию существует $I \in \mathrm{MF}_{i+1}(\mathcal{K})$ такое, что $\langle c, \partial\Delta_I \rangle \neq 0$, поэтому

$$0 \neq k \cdot \langle c, \partial\Delta_I \rangle = \langle k \cdot \tilde{c}, \partial\Delta_I \rangle = \langle d\tilde{b}, \partial\Delta_I \rangle = \langle \tilde{b}, \partial(\partial\Delta_I) \rangle = 0 \ ,$$

и мы получаем противоречие. Таким образом, из двойственности Пуанкаре следуют изоморфизмы $\mathcal{H}^{i,I} \cong \mathcal{H}^{n-1-i,[m]\setminus I}$ для всех i, так как $2q \geq n$.

Умножения вида $\mathcal{H}^{i,*} \otimes \mathcal{H}^{j,*} \longrightarrow \mathcal{H}^{i+j+1,*}$ тривиальны для $i + j < q$, так как из условия и леммы 3.6 следует, что при $l \leq q$ всякий l-мерный класс когомологий неразложим.

Наконец, докажем, что все умножения вида $\mathcal{H}^{i,*} \otimes \mathcal{H}^{j,*} \longrightarrow \mathcal{H}^{i+j+1,*}$ тривиальны для $q \leq i + j \leq n - 2$. Предположим, что есть классы когомологий $a \in \mathcal{H}^{i,*}$ и $b \in \mathcal{H}^{j,*}$ при $q \leq i + j \leq n - 2$ такие, что $0 \neq a \cdot b =: c \in \mathcal{H}^{i+j+1,*}$. Без ограничения общности предположим, что $i \leq j$. Из двойственности Пуанкаре следует, что существует элемент $a' \in \widetilde{H}^{n-i-j-2}(\mathcal{K}_{[m]\setminus(I\cup J)})$ такой, что $0 \neq a' \cdot c = a' \cdot a \cdot b \in \widetilde{H}^n(\mathcal{K})$. Тогда $a \cdot a' \neq 0$ и таким образом мы получаем нетривиальное умножение вида $\mathcal{H}^{i,*} \otimes \mathcal{H}^{k,*} \longrightarrow \mathcal{H}^{i+k+1,*}$ для $k := n - i - j - 2$. По предположению $q \leq i + j \leq 2j$, поэтому

$$i + k = n - j - 2 \leq n - 2 - \frac{q}{2} < q, \quad \text{так как} \quad \frac{2}{3}(n-2) < \left[\frac{2n-1}{3}\right] \ .$$

Следовательно, $a' \cdot a$ — умножение вида $\mathcal{H}^{i,*} \otimes \mathcal{H}^{k,*} \longrightarrow \mathcal{H}^{i+k+1,*}$, где $i + k < q$, и потому оно должно быть тривиально. Получили противоречие.

Итак, мы доказали, что все умножения в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ тривиальны, кроме тех, которые возникают из двойственности Пуанкаре. Таким образом, $H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений пар сфер, что завершает доказательство. □

Следующая теорема обобщает результат теоремы 3.7.

Теорема 3.9. *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера. Тогда $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$ в том и только в том случае, когда верно одно из следующих утверждений:*

(a) $\mathcal{K}$ *— граница четырёхмерного октаэдра, и* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong S^3 \times S^3 \times S^3 \times S^3$*;*

(b) $\mathcal{K}^1$ *— хордовый граф;*

(c) $\mathcal{K}^1$ *имеет ровно два недостающих ребра, и они не смежны друг с другом, то есть образуют границу квадрата.*

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма, тесно связанная с [4, Theorem 4.3].

Лемма 3.10. *Пусть* K *— симплициальная сфера размерности* n *такая, что* $H^*(\mathcal{Z}_K) \cong H^*(M)$*, где* M *— связная сумма произведений сфер. Тогда* $\mathcal{K}^1$ *— это либо хордовый граф, либо граф с не более чем* $n+1$ *недостающими рёбрами, которые попарно не смежны друг с другом.*

Более того, обозначим как $I_1, \ldots, I_r$ *все недостающие ребра* $\mathcal{K}$*. Если* $\mathcal{K}^1$ *не хордовый, то джойн полных подкомплексов* $K_{I_1} * K_{I_2} * \ldots * K_{I_r}$ *также является полным подкомплексом в* $\mathcal{K}$*.*

Доказательство. Предположим, что в $\mathcal{K}^1$ есть бесхордовый цикл C на $p > 4$ вершинах. Тогда C — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$, что противоречит лемме 4.5 [4]. Таким образом, всякий бесхордовый цикл в $\mathcal{K}^1$ имеет не более 4 вершин.

Если любой бесхордовый цикл в $\mathcal{K}^1$ имеет 3 вершины, то $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф и далее доказывать нечего.

Пусть в $\mathcal{K}^1$ есть бесхордовый цикл C ровно с 4 вершинами. Обозначим как $I_1, \ldots, I_r$ все недостающие ребра $\mathcal{K}$, и для $j = 1, \ldots, r$ обозначим как a_j элемент $H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, соответствующий образующей группы $\mathcal{H}^{0,I_j}$. Из леммы 4.6 [4] следует, что подкомплекс $\mathcal{K}_{I_i \cup I_j}$ является границей квадрата для любой пары индексов $i \neq j$, то есть все недостающие рёбра $\mathcal{K}$ попарно несмежны друг с другом: $I_i \cap I_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Отсюда следует, что $a_i \cdot a_j \neq 0$ равносильно $i \neq j$.

Заметим, что

$$H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{|J|=2} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_J) = \bigoplus_{j=1}^{r} \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{I_j}) \text{ (см. 2.2)}, \text{ поэтому } H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}\langle a_1, \ldots, a_r \rangle\,.$$

Обозначим как $A = \bigoplus_{k=1} A^{3k}$ градуированное подкольцо $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$, порождённое элементами $A^3 := H^3(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$. Вспоминая предыдущий абзац, получаем, что $\operatorname{rank} A^6 = r(r-1)/2$, так как A^6 порождено элементами $a_i \cdot a_j$.

По условию $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(M)$ и

$$M = S_{1,1}^{f(1,1)} \times S_{1,2}^{f(1,2)} \times \cdots \times S_{1,k(1)}^{f(1,k(1))} \# \cdots \# S_{n,1}^{f(n,1)} \times S_{n,2}^{f(n,2)} \times \cdots \times S_{n,k(n)}^{f(n,k(n))},$$

где $f(i,j) \in \mathbb{Z}^+$ — размерность соответствующей сферы $S_{i,j}^{f(i,j)} = S^{f(i,j)}$ и $k(i)$

обозначает количество сфер в i-м слагаемом связной суммы. $H^1(M)=0$ и $H^2(M)=0$ (см. 1), поэтому $H^3(M)\cong H^3(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\cong\mathbb{Z}^r$ порождено r трёхмерными сферами ($S^{f(i,j)}_{i,j}$ с $f(i,j)=3$). Обозначим как $s_1,\ldots,s_r$ образующие $H^3(M)$, соответствующие этим сферам $S^3_{k_1,l_1},\ldots,S^3_{k_r,l_r}$, и обозначим как $B=\bigoplus_{k=1} B^{3k}$ градуированное подкольцо $H^*(M)$, порождённое элементами $B^3:=H^3(M)=\mathbb{Z}\langle s_1,\ldots,s_r\rangle$. Очевидно, что $A\cong B$ изоморфны как градуированные кольца.

Так как $s_i^2=0$ для всех $i=1,\ldots,r$, то $\frac{r(r-1)}{2}\geq \operatorname{rank} B^6$, однако $\operatorname{rank} B^6=\operatorname{rank} A^6=\frac{r(r-1)}{2}$. Тогда для всех пар индексов $i\neq j$ выполнено $s_i\cdot s_j\neq 0$ (в противном случае $\operatorname{rank} B^6<\frac{r(r-1)}{2}$). Из $s_i\cdot s_j\neq 0$ следует, что $k_i=k_j$ и сферы $S^3_{k_i,l_i}$ и $S^3_{k_j,l_j}$ находятся в одном и том же слагаемом связной суммы, и таким образом мы получаем, что $k_1=k_2=\ldots=k_r$ и все сферы $S^3_{k_1,l_1},\ldots,S^3_{k_r,l_r}$ находятся в одном и том же слагаемом связной суммы. Значит $B=\Lambda[s_1,\ldots,s_r]$ и $\operatorname{rank} A^{3r}=\operatorname{rank} B^{3r}=1$, откуда следует $a_1\cdot a_2\cdots a_r\neq 0$.

Теперь рассмотрим джойн полных подкомплексов $L:=\mathcal{K}_{I_1}*\mathcal{K}_{I_2}*\cdots*\mathcal{K}_{I_r}$, это симплициальная сфера размерности $(r-1)$ (граница октаэдра). Так как $\mathcal{K}_{I_1\sqcup I_2\sqcup\cdots\sqcup I_r}$ — подкомплекс L, то $H^{r-1}(\mathcal{K}_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r})\neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r}=L$. Так как $a_1\cdot a_2\cdots a_r\in H^{r-1}(\mathcal{K}_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r})$ — ненулевой элемент, мы получаем $L=\mathcal{K}_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r}$, и значит L — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$. Отсюда также следует, что $r\leq n+1$, и таким образом утверждение леммы доказано. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 3.9.

Доказательство. Сначала мы докажем импликацию $\Longrightarrow$:

Из леммы 3.10 следует, что $\mathcal{K}^1$ является либо хордовым графом, либо его недостающие рёбра $I_1,\ldots,I_r$ все попарно несмежны друг с другом, $r\leq 4$ и $L:=K_{I_1}*\cdots*K_{I_r}=\mathcal{K}_{I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r}$ — полный подкомплекс в $\mathcal{K}$. Первый случай удовлетворяет условию теоремы, рассмотрим второй:

Если $r=4$, то $\mathcal{K}$ — граница октаэдра.

Если $r=3$, то L — двумерная симплициальная сфера, и тогда $\mathcal{K}\setminus L$ несвязно (для доказательства этого несложного утверждения можно использовать двойственность Александера $\widetilde{H}_0(\mathcal{K}\setminus L)\cong\widetilde{H}^2(L)=\mathbb{Z}$ или обобщённую теорему Жордана). В таком случае должно быть ещё хотя бы одно недостающее ребро в $\mathcal{K}_{[m]\setminus(I_1\sqcup\cdots\sqcup I_r)}\simeq\mathcal{K}\setminus L$ помимо $I_1,\ldots,I_r$ — противоречие.

Если $r=2$, то это случай (c) из условия теоремы.

Если $r=1$, то $\mathcal{K}^1$ является хордовым, так как любой бесхордовый цикл с более чем тремя вершинами имеет хотя бы два недостающих ребра.

Теперь докажем импликацию $\Longleftarrow$.

Если $\mathcal{K}^1$ хордовый, то утверждение теоремы следует из теоремы 3.7.

Если $\mathcal{K}^1$ имеет два недостающих ребра, образующих границу квадрата, то $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}\langle a_1, a_2\rangle$, где a_1 и a_2 соответствуют недостающим рёбрам $\mathcal{K}$ и $a_1 \cdot a_2 \neq 0$. Далее мы повторяем доказательство теоремы 3.7 за одним исключением: имеется одно нетривиальное умножение вида $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{H}^{3,*}(\mathcal{K})$, это $a_1 \cdot a_2 \cdot b \mapsto c$, где b — двойственный по Пуанкаре элемент для $a_1 \cdot a_2$ и c — фундаментальный класс $\mathcal{K}$. Все остальные нетривиальные умножения в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ возникают из двойственности Пуанкаре. Таким образом, кольцо $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ порождено элементами $\{a_1, a_2, b, c, x_i, y_i \,|\, i = 1, 2, \ldots, N\}$, где x_i, y_i лежат в $\mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K})$, и оно имеет следующие соотношения: $a_1 \cdot a_2 \cdot b = c$, $x_i \cdot y_i = c$ для $i = 1, 2, \ldots, N$, а все остальные произведения образующих нулевые. То есть $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер, и это завершает доказательство. □

Замечание 3.11. *Заметим, что если имеет место утверждение (c) теоремы 3.9, то $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \cong H^*(M)$, где M — связная сумма произведений сфер, одно из которых является произведением трёх сфер. Первый известный пример такой симплициальной сферы $\mathcal{K}$ (которая на самом деле является границей многогранника) был представлен в работе [4].*

Теорема 3.12. *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера такая, что $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф. Тогда все высшие произведения Масси в $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ тривиальны.*

Доказательство. Вспомним, что $\mathcal{H}^{k,*} = 0$ при $k > 3$ и $\mathcal{H}^{3,*} = \widetilde{H}^3(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}$, так как $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера. Обозначим фундаментальный класс $\mathcal{K}$ как $[\mathcal{K}]$.

Будем обозначать α_I^i класс когомологий из $\mathcal{H}^{i,I}$. Предположим, что существует нетривиальное произведение Масси $\langle \alpha_{I_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{I_n}^{i_n}\rangle$. Рассмотрим $\{a_{k,l}\}_{1 \le k \le l \le n}$, $(k, l) \neq (1, n)$, — некоторую соответствующую ему определяющую систему, где элементы $a_{k,l} \in C^{i_k + \ldots + i_l}(\mathcal{K}_{I_k \sqcup \ldots \sqcup I_l})$. Обозначим $\alpha \in \mathcal{H}^{i_1 + \ldots + i_n + 1, I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n}$ класс коцикла $\sum_{r=1}^{n-1} \overline{a_{1,r}} a_{r+1,n}$, по предположению $\alpha \neq 0$.

Для упрощения дальнейших рассуждений мы без ограничения общности будем считать, что $\alpha_{I_n}^{i_n}$ — одна из образующих $\mathcal{H}^{i_n, I_n}$. Действительно, если существует класс $\widetilde{\alpha}_{I_n}^{i_n}$ такой, что $\alpha_{I_n}^{i_n} = t \cdot \widetilde{\alpha}_{I_n}^{i_n}$, где t — ненулевое целое, то для всех $k = n, n-1, \ldots, 1$ найдется коцепь $\widetilde{a}_{k,n}$ такая, что $a_{k,n} = t \cdot \widetilde{a}_{k,n}$, так как по теореме 3.7 в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$ нет кручений. Тогда в определяющей системе $\{a_{k,l}\}$ заменим для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ коцепи $a_{k,n}$ на $\widetilde{a}_{k,n}$ и получим определяющую систему для $(\alpha_{I_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{I_{n-1}}^{i_{n-1}}, \widetilde{\alpha}_{I_n}^{i_n})$, которой соответствует класс $\widetilde{\alpha}$ такой, что $\alpha = t \cdot \widetilde{\alpha}$. Поэтому произведение Масси $\langle \alpha_{I_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{I_{n-1}}^{i_{n-1}}, \widetilde{\alpha}_{I_n}^{i_n}\rangle$ определено и $\langle \alpha_{I_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{I_{n-1}}^{i_{n-1}}, \alpha_{I_n}^{i_n}\rangle = t\langle \alpha_{I_1}^{i_1}, \ldots, \alpha_{I_{n-1}}^{i_{n-1}}, \widetilde{\alpha}_{I_n}^{i_n}\rangle$.

Заметим, что $i_1 + \ldots + i_n \le 2$, так как иначе $\alpha \in \mathcal{H}^{i_1 + \ldots + i_n + 1, I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_n} = 0$.

Рассмотрим случай $i_1+\ldots+i_n=2$, тогда из $\alpha\neq 0$ следует $I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n=[m]$ и $\alpha=r[\mathcal{K}]$, где r — некоторое ненулевое целое. По двойственности Пуанкаре для $\mathcal{K}$ найдётся класс когомологий $\beta\in\mathcal{H}^{2-i_n,[m]\setminus I_n}$ такой, что $\beta\alpha^{i_n}_{I_n}=[\mathcal{K}]$. Тогда рассмотрим определяющую систему $\{a'_{k,l}\}$, получающуюся из $\{a_{k,l}\}$ заменой коцепи $a_{1,n-1}$ на $a'_{1,n-1}=a_{1,n-1}-r\cdot\overline{b}$, где b — представитель β. Соответствующий ей класс α' также лежит в $\langle\alpha^{i_1}_{I_1},\ldots,\alpha^{i_n}_{I_n}\rangle$, однако

$$\sum_{r=1}^{n-1}\overline{a'_{1,r}}a'_{r+1,n}=\sum_{r=1}^{n-1}\overline{a_{1,r}}a_{r+1,n}-r\cdot ba_{n,n}\ ,$$

поэтому $\alpha'=\alpha-r\beta\alpha^{i_n}_{I_n}=r[\mathcal{K}]-r[\mathcal{K}]=0$. Получили противоречие.

Рассмотрим случай $i_1+\ldots+i_n=0$. Доказательство тривиальности произведений вида $\langle\alpha^0_{I_1},\ldots,\alpha^0_{I_n}\rangle$ схоже с доказательством леммы 3.6. Рассмотрим комплекс $\mathcal{K}'$, полученный из $\mathcal{K}$ заклеиванием всех недостающих граней размерности 2, то есть $(\mathcal{K}')^1=\mathcal{K}^1$ и $\mathrm{MF}_2(\mathcal{K}')=\varnothing$. Заметим, что $(\mathcal{K}')^1=\mathcal{K}^1$ хордовый по условию, тогда $H_1(\mathcal{K}'_I)=0$ для всякого $I\subset[m]$, следовательно $\mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K}')=0$. Вложение $i\colon\mathcal{K}\hookrightarrow\mathcal{K}'$ индуцирует гомоморфизм колец $i^*\colon\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}')\to\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$, причём $\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K}')\cong\mathcal{H}^{0,*}(\mathcal{K})$, поэтому все классы $\alpha^0_{I_k}$ имеют прообразы $\widetilde{\alpha}^0_{I_k}$, то есть $i^*\widetilde{\alpha}^0_{I_k}=\alpha^0_{I_k}$. Более того, для всех $I\subset[m]$ группы коцепей $C^r(\mathcal{K}'_I)=C^r(\mathcal{K}_I)$ *в точности совпадают* при $r<2$, поэтому все коцепи $a_{i,k}$ имеют прообразы $\widetilde{a}_{i,k}$, и $\{\widetilde{a}_{k,l}\}$ также будет определяющей системой, но уже для произведения Масси $\langle\widetilde{\alpha}^0_{I_1},\ldots,\widetilde{\alpha}^0_{I_n}\rangle$. Тогда $i^*\langle\widetilde{\alpha}^0_{I_1},\ldots,\widetilde{\alpha}^0_{I_n}\rangle=\langle\alpha^0_{I_1},\ldots,\alpha^0_{I_n}\rangle$ совпадают как множества, однако $\langle\widetilde{\alpha}^0_{I_1},\ldots,\widetilde{\alpha}^0_{I_n}\rangle$ тривиально в силу $\mathcal{H}^{1,*}(\mathcal{K}')=0$, а значит, тривиально и $\langle\alpha^0_{I_1},\ldots,\alpha^0_{I_n}\rangle$. Получаем противоречие.

Заметим, что таким образом мы доказали, что множество $\langle\alpha^0_{I_1},\ldots,\alpha^0_{I_n}\rangle$ не просто содержит 0, а *содержит только* 0 (иначе всякий нетривиальный класс $\alpha\in\langle\alpha^0_{I_1},\ldots,\alpha^0_{I_n}\rangle$ имел бы нетривиальный прообраз $\widetilde{\alpha}\in\langle\widetilde{\alpha}^0_{I_1},\ldots,\widetilde{\alpha}^0_{I_n}\rangle$).

Наконец, рассмотрим случай $i_1+\ldots+i_n=1$. Обозначим j индекс такой, что $i_j=1$, $J=I_1\sqcup\ldots\sqcup I_n$ и $I_{n+1}=[m]\setminus J$. По предположению $0\neq\alpha\in\mathcal{H}^{2,J}$, поэтому найдётся класс $\alpha^0_{I_{n+1}}\in\mathcal{H}^{0,I_{n+1}}$, двойственный по Пуанкаре к α, то есть $\alpha\alpha^0_{I_{n+1}}=r[\mathcal{K}]$ для некоторого ненулевого целого r. Пусть $a_{n+1,n+1}$ — некоторый представитель класса $\alpha^0_{I_{n+1}}$, тогда найдётся коцепь $a_{n,n+1}$ такая, что $da_{n,n+1}=\overline{a}_{n,n}a_{n+1,n+1}$, так как по теореме 3.7 все умножения вида $\mathcal{H}^{0,*}\otimes\mathcal{H}^{0,*}\longrightarrow\mathcal{H}^{1,*}$ и $\mathcal{H}^{0,*}\otimes\mathcal{H}^{1,*}\longrightarrow\mathcal{H}^{2,*}$ тривиальны.

Лемма 3.13. *Существуют коцепи $\{a_{k,n+1}\}_{k=2}^{n-1}$ такие, что $da_{k,n+1}=\sum_{r=k}^{n}\overline{a}_{k,r}a_{r+1,n+1}$.*

Из этой леммы немедленно следует, что

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{r=1}^{n-1} a_{1,r}\overline{a}_{r+1,n+1}\right) &= \sum_{r=1}^{n-1}\left(\sum_{l=1}^{r-1}\overline{a}_{1,l}a_{l+1,r}\right)\overline{a}_{r+1,n+1} - \sum_{r=1}^{n-1}\overline{a}_{1,r}\left(\sum_{l=r+1}^{n} a_{r+1,l}\overline{a}_{l+1,n+1}\right) = \\ &= \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{r-1}\overline{a}_{1,l}a_{l+1,r}\overline{a}_{r+1,n+1} - \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{l=r+1}^{n}\overline{a}_{1,r}a_{r+1,l}\overline{a}_{l+1,n+1} = \\ &= \sum_{r=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{r-1}\overline{a}_{1,l}a_{l+1,r}\overline{a}_{r+1,n+1} - \sum_{l=2}^{n}\sum_{r=1}^{l-1}\overline{a}_{1,r}a_{r+1,l}\overline{a}_{l+1,n+1} = \\ &= -\sum_{r=1}^{n-1}\overline{a}_{1,r}a_{r+1,n}\overline{a}_{n+1,n+1} = \pm\left(\sum_{r=1}^{n-1}\overline{\overline{a}_{1,r}a_{r+1,n}}\right)a_{n+1,n+1}\ , \end{aligned}$$

то есть класс $\alpha\alpha^0_{I_{n+1}} = r[\mathcal{K}]$ представлен кограницей — противоречие.

Таким образом мы по модулю леммы 3.13 доказали, что множество $\langle\alpha^{i_1}_{I_1},\ldots,\alpha^{i_n}_{I_n}\rangle$ при $i_1+\ldots+i_n=1$ также не содержит нетривиальных классов. Докажем теперь лемму 3.13.

Доказательство. Докажем индукцией по $j=1,\ldots,n$. База $j=1$.

Будем строить коцепи $a_{k,n+1}$ также индукцией про k. Для базы $k=n$ коцепь $a_{n,n+1}$ уже построена. Предположим, что построены коцепи $\{a_{k,n+1}\}_{k=l}^{n}$. Тогда произведение Масси $\langle\alpha^0_{I_{l-1}},\ldots,\alpha^0_{I_{n+1}}\rangle$ определено и содержит класс коцикла $b=\sum_{r=l-1}^{n}\overline{a}_{l-1,r}a_{r+1,n+1}$. Выше мы доказали, что произведения Масси вида $i_1+\ldots+i_n=0$ содержат только нулевой класс, поэтому b является кограницей, и значит существует коцепь $a_{l-1,n+1}$ такая, что $da_{l-1,n+1}=b$. Это завершает шаг индукции по k, и таким образом база индукции для $j=1$ доказана.

Предположим, что лемма доказана при всех $j\le s$, и докажем её для $j=s+1$.

Будем строить коцепи $a_{k,n+1}$ также индукцией про k. Для базы $k=n$ коцепь $a_{n,n+1}$ уже построена. Предположим, что построены коцепи $\{a_{k,n+1}\}_{k=l}^{n}$, $l\ge 3$. Тогда произведение Масси $\langle\alpha^0_{I_{l-1}},\ldots,\alpha^0_{I_{n+1}}\rangle$ определено и содержит класс коцикла $b=\sum_{r=l-1}^{n}\overline{a}_{l-1,r}a_{r+1,n+1}$. Более того, для произведения Масси $\langle\alpha^0_{I_{l-1}},\ldots,\alpha^0_{I_{n+1}}\rangle$ лемма верна по предположению индукции (номер класса из $\mathcal{H}^{1,*}$ для него равен $s+1-(l-1)+1\le s$), поэтому по доказанному выше оно содержит только нулевой класс, и значит b является кограницей, следовательно существует коцепь $a_{l-1,n+1}$ такая, что $da_{l-1,n+1}=b$. Это завершает шаг индукции по k и по l, и таким образом лемма доказана. □

Итак, мы доказали тривиальность всех произведений Масси в $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})\cong\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$. □

Следствие 3.14. *Пусть $\mathcal{K}$ — трёхмерная симплициальная сфера. Тогда $\mathcal{K}$ минимально неголодов тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}^1$ — хордовый граф.*

Доказательство. Если $\mathcal{K}$ минимально неголодов, то хордовость $\mathcal{K}^1$ доказывается аналогично доказательству импликации (e)⇒(d) в теореме 3.1.

Теперь предположим, что $\mathcal{K}^1$ хордовый. Рассмотрим вершину $v \in [m]$ и обозначим $\mathcal{K} \setminus \{v\}$ как $\mathcal{K}_v$. По лемме 2.1 $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}_v)$ является подкольцом в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K})$, причём $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}_v)$ не содержит фундаментальный класс $[\mathcal{K}]$. Тогда в $\mathcal{H}^{*,*}(\mathcal{K}_v)$ не может быть нетривиальных умножений по теореме 3.7 и не может быть нетривиальных произведений Масси по теореме 3.12. $\square$

4 Графы

Важную роль в изучении класса трёх- и четырёхмерных многогранников P, для которых $\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентно связной сумме произведений сфер, играло условие хордовости 1-остова $\mathcal{K}_P$. В данном разделе мы докажем, что для графов условие хордовости является критерием принадлежности к классу B_Δ.

Можно доказать, что любой хордовый граф является вполне заполняемым комплексом, поэтому достаточность условия хордовости графа Γ для $\Gamma \in B_\Delta$ следует из результата [13, следствие 7.5], где это доказано другими методами.

4.1 Вспомогательные утверждения и обозначения

Предложение 4.1. *Для пространств с отмеченной точкой A, B имеем:*

1°. $\Sigma A \wedge B \simeq \Sigma(A \wedge B) \simeq A * B$;

2°. $\Sigma(A \times B) \simeq \Sigma A \vee \Sigma B \vee (\Sigma A \wedge B)$.

Следующее утверждение является следствием куб-леммы [1, лемма 8.2.2].

Лемма 4.2 ([1, лемма 8.2.3])**.** *Пусть A, B, C, D — топологические порстранства. Определим Q из гомотопического кодекартова квадрата*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "\epsilon_A \times \mathrm{id}_B"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \times \epsilon_B"'] & C \times B \arrow[d] \\ A \times D \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

Тогда $Q \simeq (A * B) \vee (C \rtimes B) \vee (A \ltimes D)$.

Призрачной вершиной симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется одноэлементное множество $\{i\} \subset [m]$ такое, что $\{i\} \notin \mathcal{K}$. В данном разделе мы допускаем наличие в $\mathcal{K}$ призрачных вершин, поэтому в случае необходимости будет дополнительно оговариваться, на каком множестве мы рассматриваем $\mathcal{K}$. В частности, для $I \subset [m]$ полный подкомплекс $\mathcal{K}_I$ по умолчанию рассматривается на множестве I, однако он может быть также рассмотрен на всяком множестве $J \supset I$.

Обозначим как $[m]^i$ симплициальный комплекс $\mathrm{sk}^i(\Delta^{m-1})$ на $[m]$, то есть i-й остов $(m-1)$-мерного симплекса. Согласно теоремам 4.7.7 и 4.7.5 из [1], имеется гомотопическая эквивалентность

$$\mathcal{Z}_{[m]^i} \simeq \bigvee_{k=i+2}^{m} (S^{i+k+1})^{\vee C_m^k C_{k-1}^{i+1}} . \tag{3}$$

Далее мы будем работать с произвольным хордовым графом Γ на множестве вершин $[m]$, вершины которого расположены в совершенном порядке исключения. Обозначим $I(m)$ множество соседей вершины со старшим номером m и $s = |I(m)|$ — их количество, тогда $\mathrm{link}_\Gamma\{m\}$ является дизъюнктным объединением s вершин. Из определения совершенного порядка исключения следует, что $\Gamma_{I(m)}$ — клика на s вершинах, поэтому

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \cong \mathcal{Z}_{[s]^0} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{Z}_{\Gamma_{I(m)}} \cong \mathcal{Z}_{[s]^1} . \tag{4}$$

Заметим, что разложение $\Gamma = \Gamma_{[m-1]} \bigcup_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \mathrm{star}_\Gamma\{m\}$ задаёт кодекартов квадрат в категории симплициальных комплексов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{link}_\Gamma\{m\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{star}_\Gamma\{m\} \arrow[d] \\
\Gamma_{[m-1]} \arrow[r] & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Он индуцирует кодекартов квадрат полиэдральных произведений [7, диаграмма (8)]

$$\begin{tikzcd}
\left(T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}\right) \times S^1 \arrow[r, "1\times i"] \arrow[d, "j\times 1"'] & \left(T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}\right) \times D^2 \arrow[d] \\
\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \times S^1 \arrow[r] & \mathcal{Z}_\Gamma
\end{tikzcd} \tag{5}$$

где i — вложение $S^1 \to D^2$, и $j: T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \to \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$ — отображение момент-угол комплексов, индуцированное вложением $\mathrm{link}_\Gamma\{m\} \to \Gamma_{[m-1]}$ симплициальных комплексов на множестве $[m-1]$.

Лемма 4.3. *Для любого хордового графа Γ на множестве $[m]$ отображение $j: T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \to \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$ гомотопно тривиальному.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $\mathrm{link}_\Gamma\{m\} \to \Gamma_{[m-1]}$, его можно представить как композицию вложений

$$\mathrm{link}_\Gamma\{m\} \to \Gamma_{I(m)} \to \Gamma_{[m-1]},$$

где все симплициальные комплексы мы рассматриваем на $[m-1]$. Тогда с учётом (4) отображение j раскладывается в композицию

$$j : T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{[s]^0} \xrightarrow{1\times f} T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{[s]^1} \xrightarrow{g_1\times g_2} \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \ ,$$

где отображение $f : \mathcal{Z}_{[s]^0} \to \mathcal{Z}_{[s]^1}$ индуцированно вложением $\mathrm{link}_\Gamma\{m\} \to \Gamma_{I(m)}$, отображение $g_2 : \mathcal{Z}_{[s]^1} \to \mathcal{Z}_{\Gamma_{I(m)}} \subset \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$ индуцировано вложением $\Gamma_{I(m)} \to \Gamma_{[m-1]}$, а $g_1 : T^{m-1-s} \to \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]\setminus I(m)}} \subset \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$ индуцировано вложением $\{\varnothing\} \to \Gamma_{[m-1]}$, где $\{\varnothing\}$ — пустой симплициальный комплекс на множестве $[m-1] \setminus I(m)$.

Так как для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ без призрачных вершин вложение $\mathcal{Z}_\varnothing \to \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопно ϵ — тривиальному отображению, то $g_1 \sim \epsilon$. Заметим, что при $s = 0$ доказывать больше нечего, так как в этом случае $\mathrm{link}_\Gamma\,\{m\} = \{\varnothing\}$. Если же $s > 0$, докажем, что $f \sim \epsilon$, из чего немедленно следует утверждение леммы.

Так как $\mathcal{Z}_{[s]^0} \simeq \bigvee_\alpha \ S^{n_\alpha}$ $(n_\alpha \geq 3)$ гомотопически эквивалентен букету сфер (3), то f гомотопно букету отображений $f \sim \bigvee_\alpha f_\alpha$, где $f_\alpha : S^{n_\alpha} \to \mathcal{Z}_{[s]^1}$. Тогда $f \sim \epsilon$ равносильно тому, что класс $[f_\alpha] = 0$ в $\pi_{n_\alpha}(\mathcal{Z}_{[s]^1})$ для всех α. Обозначим как $i_\alpha : S^{n_\alpha} \to \mathcal{Z}_{[s]^0}$ вложение α-го слагаемого в букет $\bigvee_\alpha \ S^{n_\alpha}$.

Вспомним расслоение $\mathcal{Z}_\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K} \to (\mathbb{C}P^\infty)^m$ из [1, теорема 4.3.2] и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{Z}_{[s]^0} & \xrightarrow{h_0} & (\mathbb{C}P^\infty)^{[s]^0} & \longrightarrow & (\mathbb{C}P^\infty)^s \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{f}}\big\downarrow & & \big\| \\
\mathcal{Z}_{[s]^1} & \xrightarrow{h_1} & (\mathbb{C}P^\infty)^{[s]^1} & \longrightarrow & (\mathbb{C}P^\infty)^s
\end{array}$$

Так как $(\mathbb{C}P^\infty)^s \simeq K(\mathbb{Z}^s, 2)$, то из длинной точной последовательности расслоения получаем, что для $i = 0, 1$ отображение $(h_i)_* : \pi_k(\mathcal{Z}_{[s]^i}) \to \pi_k((\mathbb{C}P^\infty)^{[s]^i})$ есть изоморфизм при всех $k \geq 3$. Поэтому $[f_\alpha] = 0$ равносильно $[\widetilde{f} \circ h_0 \circ i_\alpha] = \widetilde{f}_*[h_0 \circ i_\alpha] = 0$.

Гомотопическая группа $\pi_2((\mathbb{C}P^\infty)^{[s]^0}) \cong \mathbb{Z}^s$ имеет s канонических образующих, представленных отображениями

$$\widehat{\mu}_i : S^2 \to \mathbb{C}P^\infty \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\vee s} = (\mathbb{C}P^\infty)^{[s]^0}, \quad i = 1, \ldots, s \ ,$$

где $S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ — вложение двумерной клетки, а $\mathbb{C}P^\infty \to (\mathbb{C}P^\infty)^{\vee s}$ — вложение в i-е слагаемое букета.

Так как $\mathrm{sk}^1(\Delta^{n-1})$ содержит все рёбра $\{i, j\}$, то из [1, предложение 8.4.2] следует, что $\widetilde{f}_*[\widehat{\mu}_i, \widehat{\mu}_j]_w = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots s$, где $[\widehat{\mu}_i, \widehat{\mu}_j]_w$ — произведение Уайтхеда. Тогда $\widetilde{f}_*$ отображает в ноль и любые итерированные произведения Уайтхеда от образующих $\widehat{\mu}_i$. Однако из [8, лемма 6.1] для $\mathcal{Z}_{[s]^0}$ следует, что $h_0 \circ i_\alpha$ есть итерированное произведение Уайтхеда от образующих $\widehat{\mu}_i$, то есть $[h_0 \circ i_\alpha] \in \mathrm{Ker}\, \widetilde{f}_*$, и значит $[f_\alpha] = 0$ для всех α, что и завершает доказательство. □

Предложение 4.4. Γ — *хордовый граф, тогда* $\mathcal{Z}_\Gamma \simeq \Sigma^2 \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \vee (\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \rtimes S^1)$, *где* $\mathrm{link}_\Gamma\{m\}$ *рассматривается как комплекс на множестве* $[m-1]$.

Доказательство. Так как отображение $i: S^1 \to D^2$ гомотопно тривиальному и по лемме 4.3 отображение j также гомотопно тривиальному, мы можем применить лемму 4.2 к диаграмме (5), откуда получаем

$$\mathcal{Z}_\Gamma \simeq (\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} * S^1) \vee (\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \rtimes S^1) \vee (\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \ltimes D^2)\ .$$

Так как $\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \ltimes D^2 \simeq pt$ и $\mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} * S^1 \simeq \Sigma^2 \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}$, получаем требуемое. □

Замечание 4.5. *Мы выяснили, что каноническое вложение момент-угол-комплексов* $f: \mathcal{Z}_{[m]^i} \to \mathcal{Z}_{[m]^{i+1}}$ *гомотопно тривиальному отображению при* $i = 0$. *Однако оно также будет гомотопно тривиальному при всех* $i \geq 0$, *что следует из работ* [13, 15] *(см. пример 3.5 и теорему 3.6 в* [15]*).*

Действительно, любой скелет симплекса является сдвинутым (shifted) комплексом, а значит все сферы в букете $\mathcal{Z}_{[m]^i}$ представлены итерированными произведениями Уайтхеда вида $[[\ldots[[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_p}], \widehat{\mu}_{j_1}], \ldots, \widehat{\mu}_{j_{q-1}}], \widehat{\mu}_{j_q}]$, где $\{i_1, \ldots, i_p\}$ — недостающая грань симплициального комплекса $[m]^i$, а $[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_p}]$ — соответствующее высшее произведение Уайтхеда. Так как $[m]^{i+1}$ содержит все недостающие грани $[m]^i$, то в обозначениях доказательства леммы 4.3 получаем $\widetilde{f}_*[\widehat{\mu}_{i_1}, \ldots, \widehat{\mu}_{i_p}] = 0$, откуда аналогичным образом следует $f \sim \epsilon$.

4.2 Хордовые графы

Теорема 4.6. *Пусть* Γ — *некоторый граф на* $[m]$. *Тогда* $\mathcal{Z}_\Gamma$ *гомотопически эквивалентен букету сфер тогда и только тогда, когда* Γ *хордовый.*

Доказательство. (⇐) Пусть Γ — хордовый граф. Докажем утверждение теоремы индукцией по числу вершин в графе m. База индукции для графа на одной вершине очевидна.

Предположим, что утверждение верно для любого хордового графа на $(m-1)$ вершине, и пусть Γ — хордовый граф на $[m]$. Тогда $\Gamma_{[m-1]}$ также хордовый (см. предложение 2.7), и по предположению индукции $\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$ гомотопически эквивалентен букету сфер. Следовательно $\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \rtimes S^1 \simeq \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \vee \sum \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}}$, и таким образом, применяя предложение 4.4, получаем

$$\mathcal{Z}_\Gamma \simeq \Sigma^2 \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \vee (\mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \rtimes S^1) \simeq \Sigma^2 \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \vee \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{\Gamma_{[m-1]}} \ ,$$

где комплекс $\mathrm{link}_\Gamma\{m\}$ рассматривается на множестве $[m-1]$. Для завершения шага индукции остаётся доказать, что $\Sigma \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}$ гомотопически эквивалентно букету сфер.

Заметим, что $\Sigma \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}} \cong \Sigma(T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{[s]^0})$ согласно (4), и из предложения 4.1 следует

$$\Sigma(T^{m-1-s} \times \mathcal{Z}_{[s]^0}) \simeq \Sigma T^{m-1-s} \vee \Sigma \mathcal{Z}_{[s]^0} \vee \Sigma T^{m-1-s} \wedge \mathcal{Z}_{[s]^0} \ .$$

Так как $\mathcal{Z}_{[s]^0}$ — букет сфер согласно (3), а ΣT^{m-1-s} — букет сфер как надстройка над произведением сфер, то $\Sigma \mathcal{Z}_{\mathrm{link}_\Gamma\{m\}}$ также гомотопически эквивалентно букету сфер, и это завершает шаг индукции.

($\Rightarrow$) Предположим теперь, что $\mathcal{Z}_\Gamma$ гомотопически эквивалентен букету сфер, но Γ не является хордовым. Тогда выберем в Γ бесхордовый цикл C на $p \geq 4$ вершинах. Так как C является полным подкомплексом в Γ, то $H^*(\mathcal{Z}_C)$ — подкольцо в $H^*(\mathcal{Z}_\Gamma)$ согласно лемме 2.1. Однако умножение в $H^*(\mathcal{Z}_\Gamma)$ тривиально, в то время как умножение в $H^*(\mathcal{Z}_C)$ нетривиально согласно теореме 2.5. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{Z}_\Gamma$ не может быть гомотопически эквивалентен букету сфер. □

Замечание 4.7. *Заметим, что для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ (уже не обязательно графа) хордовость $\mathcal{K}^1$ является необходимым условием для того, чтобы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ был гомотопически эквивалентен букету сфер, так как любой бесхордовый цикл C на $p \geq 4$ вершинах в $\mathcal{K}^1$ всегда является полным подкомплексом в $\mathcal{K}$, и потому является препятствием.*

Вычислим явно гомотопический тип $\mathcal{Z}_\Gamma$ для хордового графа Γ, то есть найдём число сфер в каждой размерности. Для этого нам понадобится следующий результат.

Теорема 4.8 ([1, теорема 8.3.5]). *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$ и пусть $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ — последовательность пар клеточных пространств таких, что все X_i стягиваемы. Тогда имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\Sigma(\mathbf{X}, \mathbf{A})^\mathcal{K} \xrightarrow{\simeq} \Sigma\left(\bigvee_{J \notin \mathcal{K}} |\mathcal{K}_J| * \mathbf{A}^{\wedge J}\right) \tag{6}$$

Здесь и далее $|\mathcal{K}|$ обозначает геометрическую реализацию симплициального комплекса $\mathcal{K}$.

Предложение 4.9. *Пусть* Γ *— хордовый граф, тогда имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\mathcal{Z}_\Gamma \simeq \bigvee_{J \notin \Gamma} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{2+|J|})^{\vee c_J^1} ,$$

где $c_J^i := \operatorname{rank} \widetilde{H}^i(\Gamma_J)$ *для* $i = 0, 1$.

Доказательство. Применяя теорему 4.8 к нашему случаю $X_i = D^2$, $A_i = S^1$, получаем $\mathbf{A}^{\wedge J} = S^{|J|}$, $|\Gamma_J| * \mathbf{A}^{\wedge J} \simeq \Sigma|\Gamma_J| \wedge S^{|J|} \simeq \Sigma^{1+|J|}|\Gamma_J|$, и, соответственно,

$$\Sigma\mathcal{Z}_\Gamma \simeq \Sigma \left(\bigvee_{J \notin \Gamma} \Sigma^{1+|J|}|\Gamma_J| \right) .$$

Так как Γ — граф, то $|\Gamma_J|$ гомотопически эквивален дизъюнктному объединению букетов окружностей, причём $c_J^0 + 1$ — число компонент связности $|\Gamma_J|$, а c_J^1 — общее число окружностей в букетах $|\Gamma_J|$. Таким образом получаем $\Sigma|\Gamma_J| \simeq (S^1)^{\vee c_J^0} \vee (S^2)^{\vee c_J^1}$, откуда следует

$$\Sigma\mathcal{Z}_\Gamma \simeq \Sigma \bigvee_{J \notin \Gamma} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{2+|J|})^{\vee c_J^1}.$$

Наконец, Γ — это *хордовый* граф, поэтому $\mathcal{Z}_\Gamma$ — букет сфер по теореме 4.6, и значит в равенстве выше можно слева и справа снять надстройки, что завершает доказательство. □

Предложение 4.10. *Пусть* Γ *— хордовый граф,* Γ^f *— его флагификация, а* $(\Gamma^f)^i$ *— её* i*-й остов. Тогда имеется гомотопическая эквивалентность*

$$\mathcal{Z}_{(\Gamma^f)^i} \simeq \bigvee_{J \notin \Gamma} (S^{1+|J|})^{\vee c_J^0} \vee (S^{1+i+|J|})^{\vee c_J^i} ,$$

где $c_J^j := \operatorname{rank} \widetilde{H}^j(\Gamma_J)$ *для* $j = 0, i$.

Доказательство. Повторяя доказательство теоремы 4.6 с учётом замечания 4.5, получаем, что $\mathcal{Z}_{(\Gamma^f)^i}$ гомотопически эквивалентен букету сфер для всех $i \geq 0$. Так как $|\Gamma_J|$ гомотопически эквивалентен дизъюнктному объединению букетов i-мерных сфер для всех $J \subset [m]$, то доказательство данного предложения в точности повторяет доказательство предложения 4.9. □

5 Благодарности

Выражаю огромную благодарность моему научному руководителю Панову Тарасу Евгеньевичу за чуткое руководство, помощь и поддержку, за постановку задач и продуктивное обсуждение. Также выражаю благодарность Бухштаберу Виктору Матвеевичу и Ероховцу Николаю Юрьевичу за внесённый ими вклад в моё образование.

Список используемой литературы

[1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surveys Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] Fulkerson, Delbert; Gross, Oliver. *Incidence matrices and interval graphs*. Pacific J. Math 15, no. 3 (1965), 835–855.

[3] Gitler, Samuel; López de Medrano, Santiago. *Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums*. Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.

[4] Fan, Feifei Fan; Chen, Liman; Ma, Jun; Wang, Xiangjun. *Moment-angle manifolds and connected sums of sphere products*. Osaka J. Math. 53 (2016), no. 1, 31–45.

[5] McGavran, Dennis. *Adjacent connected sums and torus actions.* Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 235–254.

[6] Bosio, Frédéric; Meersseman, Laurent. *Real quadrics in* $\mathbf{C}^n$*, complex manifolds and convex polytopes.* Acta Math. 197 (2006), no. 1, 53–127.

[7] Panov, Taras; Theriault, Stephen. *The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes.* London Mathematical Society. 155 (2019), no. 1, 206–228.

[8] Grbić, Jelena; Panov, Taras; Theriault, Stephen; Wu, Jie. *The homotopy types of moment–angle complexes for flag complexes.* Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.

[9] Grbić, Jelena; Theriault, Stephen. *Homotopy theory in toric topology.* Russian Mathematical Surveys. 71 (2016), no. 2, 185—251.

[10] Ероховец, Николай. *k-пояса и рёберные циклы трёхмерных простых многогранников с не более чем шестиугольными гранями.* Дальневост. матем. журн. 15 (2015), № 2, 197—213.

[11] И. Ю. Лимонченко, *Кольца Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент–угол-многообразия.* Алгебраическая топология, выпуклые многогранники и смежные вопросы, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 286, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., (2014), 207—218; Proc. Steklov Inst. Math. 286 (2014), 188—197.

[12] Iriye, Kouyemon. *On the moment-angle manifold constructed by Fan, Chen, Ma, and Wang.* Osaka Journal of Mathematics. 55 (2018), no. 4.

[13] Iriye, Kouyemon; Kishimoto, Daisuke. *Fat-wedge filtration and decomposition of polyhedral producKouyemonts.* Kyoto J. Math. 59 (2019), no. 1, 1–51.

[14] Iriye, Kouyemon; Kishimoto, Daisuke. *Whitehead products in moment–angle complexes* Journal of the Mathematical Society of Japan. 72 (2020), no. 4, 1239–1257.

[15] Abramyan, Semyon; Panov, Taras. *Higher Whitehead Products in Moment—Angle Complexes and Substitution of Simplicial Complexes.* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 305 (2019), no. 1, 1–21.