ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Присоединенные алгебры Ли прямоугольных групп Кокстера и граф-алгебры Ли

Выполнил студент 303 группы
Рахматуллаев Темурбек Анасбекович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Т.Е. Панов

Москва, 2021 г.

1 Введение

Представление дискретных групп в алгебрах Ли - полезный инструмент, для изучения структуры дискретных групп. Пусть G - группа, тогда можно изучать присоединенную алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\oplus\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, где $\gamma(G)$ - нижний центральный ряд группы G. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору.

Для свободных групп присоединенные алгебры хорошо изучены в работах Магнуса [9], доказана из изоморфность свободным алгебрам Ли и сейчас этот вопрос представлен в классических книгах по алгебрам Ли за авторством Серра [7] или Бурбаки [8]. Позже во множестве работ подход Магнуса продолжался и обобщался на случай частично коммутативных групп (они же - прямоугольные группы Артина), например в [4], [5] и [6].

Нас же интересует прямоугольная группа Кокстера $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$ - группа с m образующими $v_1, ..., v_m$ и соотношениями $v_i^2 = 1$ для всех $i \in [m]$ и $v_iv_j = v_jv_i$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$. Это задача уже была частично изучена в статье Веревкина [2]. Особый интерес к группам Кокстера объясняется их тесной связью с гиперболической геометрий и появлением при изучении групп гомотопий полиэдральных произведений [3].

В работе приведено построение отображения Магнуса из группы $\Gamma \in \{F(\mathcal{K}^0), \mathrm{RA}_\mathcal{K}, \mathrm{RC}_\mathcal{K}\}$ в ассоциативную алгебру Магнуса с соотношениями соответствующими соотношениям в группе. Для случая $\mathrm{RA}_\mathcal{K}$ приведено доказательство мономорфности продолжения отображения Магнуса до отображения алгебр Ли $L_\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K}) \to U_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}}$. В случае $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$ было построено аналогичное отображение и выдвинута гипотеза о его мономорфности.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m] = \{v_1, ..., v_m\}$, предполагаем, что $\mathcal{K}$ содержит все свои одноэлементные подмножества $[m]$. Будем обозначать $F(\mathcal{K}^0)$ свободную группу на множестве $\mathcal{K}^0$ вершин комплекса. Для удобства, будем считать, что образующие $F(\mathcal{K}^0)$ не $i \in [m]$, а $v_i, i \in [m]$.

Прямоугольными группами Кокстера и Артина, соответствующими сиплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называются группы

$$\mathrm{RC}_\mathcal{K} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 1 \Leftrightarrow i \in [m]; v_iv_j = v_jv_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

$$\mathrm{RA}_\mathcal{K} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_iv_j = v_jv_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

Напомним, некоторые обозначения. Сопряжение для краткости обозначаем $y^x = x^{-1}yx$. Коммутатором элементов a, b группы G называется $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$. Для двух подгрупп $H, W \subset G$ определим

$$(H, W) = \langle (h, w) | h \in H, w \in W\rangle \subset G$$

В частности, коммутантом группы называется $G' = (G, G)$.

Простым вложенным коммутатором длины k элментов $g_1, ..., g_k$ называется вложенный коммутатор следующего вида

$$(g_1, ..., g_k) = (...((g_1, g_2), g_3), ..., g_k)$$

Соответственно в алгебрах Ли будем рассматривать вложенные коммутаторы:

$$[g_1, ..., g_k] = [...[[g_1, g_2], g_3], ..., g_k]$$

Утверждение 2.1. *Имеют место следующие тождества Витта-Холла:*

$$(a, bc) = (a, c)(a, b)(a, b, c)$$

$$(ab, c) = (a, c)(a, c, b)(b, c)$$

$$(a, b, {}^bc)(b, c, {}^ca)(c, a, {}^ab) = 1$$

Свободная алгебра Ли. Пусть $FM(\mathcal{K}^0)$ - свободная магма (неассоциативные слова) с образующими $v_1, ..., v_m$. Для построения свободной алгебры Ли $\mathcal{K}^0$ над $\mathbb{Z}$ используем следующую конструкцию:

$$FL_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}^0) = \mathbb{Z}\langle FM(\mathcal{K}^0)\rangle / I$$

где

$$\mathbb{Z}\langle FM(\mathcal{K}^0)\rangle = \{\sum_{m\in FM} c_m m | \text{ конечное число } c_m \in \mathbb{Z} \text{ отличны от } 0\}$$

- неассоциативный свободный модуль, а I - двусторонний идеал в $\mathbb{Z}\langle FM(\mathcal{K}^0)\rangle$ порожденный элементами вида a^2 и $(ab)c + (bc)a + (ca)b$.

Свободная ассоциотивная алгебра. Будем далее обозначать $F^+(\mathcal{K}^0)$ - свободный моноид(слова из $F(\mathcal{K}^0)$ в которых все буквы входят в неотрицательных степенях). Свободной ассоциативной алгеброй $\mathcal{K}^0$ (над $\mathbb{Z}$) называем

$$Ass_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}^0) = \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)\rangle = \{\sum_{w\in F^+} c_w w | \text{ конечное число } c_w \in \mathbb{Z} \text{ отличны от } 0\}$$

Универсальная обертывающая алгебра. Для алгебры Ли L над кольцом k, ее универсальной обертывающей, называют ассоциативную k-алгебру с единицей UL с заданным лиевым гомоморфизмом $\varepsilon : L \to UL$, удовлетворяющую универсальному свойству: для любой ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\alpha : L \to A$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\varphi : UL \to A$, т.ч. $\alpha = \varphi \circ \varepsilon$

Приведем следующий стандартный результат, который может быть найден в [7] как следствие из теоремы Биркгофа-Витта.

Теорема 2.2. *Если L - свободный модуль, то отображение $\varepsilon : L \to UL$ инъективно.*

3 Присоединенная алгебра Ли

Пусть G - группа. Назовем последовательность подгрупп $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k\geq 1}$ центральной фильтрацией, если:

1. $G_1 = G$
2. $G_{k+1} < G_k$
3. $(G_k, G_l) < G_{k+l}$

Из определения сразу следует, что $G_k \triangleleft G$ и $G_{k+l} \triangleleft G_k$. Более того, $(G_k, G_k) \triangleleft G_{2k} \triangleleft G_{k+1}$, а значит фактор-группы G_k/G_{k+1} являются абелевыми. Положим $L^k_{\mathcal{G}} = G_k/G_{k+1}$ и рассмотрим прямую сумму:

$$L_{\mathcal{G}} = \oplus_{k=1}^{\infty} G_k/G_{k+1}.$$

Нетрудно видеть, что если $x \in G_k, y \in G$, то $x^y G_{k+1} = xG_{k+1}$, кроме того, если $x \in G_k, y \in G_l$, то $(x, y) \in G_{k+l}$. Таким образом, из тождеств Витта-Холла следует, следующее

Утверждение 3.1. *Скобка, заданная по правилу*

$$[\sum_i x_i G_{i+1}, \sum_j y_1 G_{j+1}] = \sum_{i,j} (x_i, y_j) G_{i+j+1}$$

задает на $L_{\mathcal{G}}$ структуру градуированной алгебры Ли.

Например, положим $\gamma_1(G) = G, \quad \gamma_k(G) = (\gamma_{k-1}(G), G)$. Тогда $\{\gamma_k(G)\}$ - нижний центральный ряд. Алгебра Ли L_γ называется присоединенной алгеброй Ли группы G.

Утверждение 3.2. *Если $\mathcal{G} = \{G_k\}$ - центральный ряд G, то $\gamma_k \subset G_k$.*

В [2] описано первое важное отличие присоединенных алгебр Ли групп Кокстера от случая свободных и частично коммутативных групп.

Утверждение 3.3. *$L_\gamma(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ является $\mathbb{Z}_2$-модулем.*

4 Отображение Магнуса

Рассмотрим для начала уже известный результат для случая частично коммутативной группы. Определяется моноид на классах эквивалентности слов

$$M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} = F^+(\mathcal{K}_0)/\langle v_i v_j = v_j v_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

Случай свободной группы $F(\mathcal{K})$ можно рассматривать как частный случай частично коммутативной группы, с отсутствующими соотношениями.Далее, $U_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} = \mathbb{Z}\langle M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}\rangle = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} U^i_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$ - алгебра ассоциативных, но некоммутативных многочленов. $U^i_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$ - линейные комбинации слов длины i.

$U^\infty_\Gamma = \prod\limits_{i=0}^{\infty} U^i_\Gamma$- алгебра Магнуса группы Γ, алгебра формальных некоммутативных степенных рядов.

$$U_{\Gamma,k} = \{u = \sum_{i=k}^{\infty} u_i \in U_\Gamma : u_i \in U^i_\Gamma\}$$

- идеал.

Для упрощения детального изучения $U^\infty_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$ вводится (первоначально, в исходной книге Магнуса [9]) отображение "подстановки". Для слова $w = v_{p_1}...v_{p_k} \in F^+(\mathcal{K}_0)$ и $Q_1, ...Q_n \in U^\infty_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$ определим $w(Q_1, ..., Q_n) = Q_{p_1} \dots Q_{p_k}$. Сделаем несколько замечаний, необходимых для корректного определения гомоморфизма.

Во-первых, некорректно определена подстановка любой константы $x = c$, например, в ряд вида

$$1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

потребуем равенство нулю свободного слагаемого в составе формальных рядов: $(Q_i)_0 = 0$.

Далее, если $w, w' \in F^+(\mathcal{K}_0)$ переходят в один класс в M_Γ, то необходимо $w(Q_1, ..., Q_n) = w'(Q_1, ..., Q_n)$. В случае $\Gamma = \mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$ это эквивалентно условию

$$Q_i Q_j = Q_j Q_i \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K}$$

При указанных условиях на $Q_1, ..., Q_n$, верно следующее

Утверждение 4.1. *Отображение* $\mathrm{v_i} \to Q_i$ *продолжается до гомоморфизма алгебр* $U^\infty_\Gamma \to U^\infty_\Gamma$.

Которое позволяет далее легко доказать череду технических утверждений:

Утверждение 4.2. *Пусть* $a = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \in U^\infty_\Gamma$. *Тогда* a *обратимо, причем при* $\Gamma = \mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$*:*

$$a^{-1} = 1 - (a_1 + a_2 + ...) + (a_1 + a_2 + ...)^2 - ... = \sum_{i=1}^{\infty} c_i$$

где $c_i = -\sum_{j=0}^{i-1} c_j a_{i-j}$, *определено рекурсивно.*

Следствие 4.3. *Обратимые элементы в* U^∞_Γ *имеют вид* $\pm 1 + x$, *где* $x \in U_{\Gamma,1}$.

Утверждение 4.4. *Пусть* $x, y \in U^\infty_{\Gamma,1}$. *Тогда, при* $\Gamma = \mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$*:*

$$(1 + x)(1 + y)(1 + x)^{-1} = 1 + y + (xy - yx)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i$$

$$(1 + x)(1 + y)(1 + x)^{-1}(1 - y)^{-1} = 1 + (xy - yx)\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+j} x^i y^j$$

Доказательство. Заметим, для начала, что указанные тождества верны при $a = 1+v_i$, $x = v_j, y = v_k$, где $v_i, v_j, v_k \in \mathcal{K}^0$.

Далее, пользуясь определенным гомоморфизмом подстановки, сделаем подстановку $a_1 + a_2 + ...$ в v_i, x в v_j, y в v_k.

Необходимо только заметить, что в случае $xy \neq yx$, заведомо найдутся две вершины v_i, v_j, т.ч. $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$. □

Подробное доказательство см. например [4].

Замечание 4.5. Если мы хотим определить отображение Магнуса для рядов с коэффициентами над $\mathbb{Z}_2$, то имеем

$$\mu(id) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 + 2\mathrm{v} + \mathrm{v}^2 = 1 + \mathrm{v}^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = 0.$$

Таким образом целесообразно искать вложение присоединенной алгебры группы Кокстера в алгебру над $\mathbb{Z}_2$ с соотношениями $\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j - \mathrm{v}_j\mathrm{v}_i = 0 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}$ и $\mathrm{v}_i^2 = 0$, однако второе соотношение затруднительно определить в групповом кольце. Следующая теорема показывает, что можно перейти от рассмотрения модуля над классами эквивалентности слов к ассоциативной алгебре с заданными соотношениями.

Теорема 4.6. *Имеют место изоморфизмы:*

1. $U^{\infty}_{F(\mathcal{K})} \simeq Ass_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}^0)$
2. $U^{\infty}_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} \simeq Ass_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}^0)/\langle v_iv_j = v_jv_i, \{i,j\} \in \mathcal{K}\rangle$

Доказательство. Утверждение (1) есть тривиальное замечание о том что определения двух указанных объектов совпадают. Доказательство утверждения (2) подробно приведено в [6].

Заменим левую и правую части на их определения

$$U^{\infty}_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} = \mathbb{Z}\langle M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}\rangle = \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)/J\rangle$$

$$Ass_{\mathbb{Z}}(\mathcal{K}^0)/I = \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)\rangle/I$$

Итого требуется показать

$$\mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)/J\rangle \simeq \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)\rangle/I$$

где $J = \langle v_iv_j = v_jv_i, \{i,j\} \in \mathcal{K};\rangle$ - соотношения в моноиде, $I = \langle v_iv_j - v_jv_i = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K};\rangle$ - двусторонний идеал.

Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)\rangle \to \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)/J\rangle$$

получаемое продолжением по линейности отображения $F^+(\mathcal{K}^0) \to F^+(\mathcal{K}^0)/J$.

Тогда с одной стороны любой элемент $x \in I$ представляется в виде $x = a[v_i, v_j]b$, где $a, b \in \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}^0)\rangle$, откуда $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Таким образом включение $I \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ установлено.

С другой стороны, $x = \sum_{a \in F^+} \alpha_a a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, где $\alpha_a \in \mathbb{Z}$ означает:

$$\varphi(x) = \sum_{a \in F^+} \alpha_a \varphi(a) = \sum_{b \in M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}} \left(\sum_{a \in b} \alpha_a\right) \cdot b = 0 \Rightarrow \sum_{a \in b} \alpha_a = 0$$

Таким образом мономы a переходящие в один класс в $M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$ входят в состав x равное число раз с положительным и отрицательным знаком. Осталось заметить, что если $a, a' \in b \in M_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}}$, то существует последовательность $a = a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k = a'$, таких что a_l и a_{l+1} отличаются перестановкой двух соседних коммутирующих букв, а значит таких, что $a_l - a_{l+1} \in I$. Так как имеет место представление $a - a' = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + ... + (a_{k-1-a_k})$, то получили $x \in I$. $\square$

Рассмотрим теперь $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \mathbb{Z}\langle F^+(\mathcal{K}_0)\rangle/\langle v_iv_j = v_jv_i; {v_i}^2 = 0\rangle = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} U^i_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ и $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \prod\limits_{i \in \mathbb{Z}} U^i_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ в качестве алгебры Магнуса для $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$. Тогда имеем:

$$(1 + v_i)^{-1} = 1 + v_i$$

$$(1 + v_i)(1 + v_j)(1 + v_i)^{-1} = 1 + v_j + (v_iv_j + v_jv_i)$$

$$(1 + v_i)(1 + v_j)(1 + v_i)^{-1}(1 + v_j)^{-1} = 1 + (v_iv_j + v_jv_i)(1 + v_i + v_j + v_iv_j)$$

Утверждение 4.7. *Отображение* $v_i \mapsto 1 + \mathrm{v_i}$ *индуцирует гомоморфизм* $\mu : \Gamma \to U_\Gamma^\infty$ *- отображение Магнуса.*

Доказательство. Для случая $\Gamma = F(\mathcal{K})$ - свободной группы, гомоморфизм μ - единственное продолжение отображения, заданного на образующих.

Для $\Gamma = \mathrm{RA}_\mathcal{K}$ заметим, что $(v_i, v_j) = 1$ влечет $[\mathrm{v_i v_j} - \mathrm{v_j v_i}] = 0$ в U_Γ^∞, а значит согласно (второй из ненаписанных формул) $\mu((v_i, v_j)) = 1$.

В случае $\Gamma = \mathrm{RC}_\mathcal{K}$ добавим только, что $\mu(v \cdot v) = 1 + 2\mathrm{v} + \mathrm{v}^2 = 1$. □

Основной целью данного раздела является следующая

Теорема 4.8. *Отображение Магнуса инъективно.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы для случая частично коммутативной группы очень подробно разобрано в статье [4], а слуай свободной группы является классическим результатом, приведенным изначально в [9] соответственно. Здесь же заострим внимание на случае $\Gamma = \mathrm{RC}_\mathcal{K}$.

Рассматривая случай $\Gamma = \mathrm{RC}_\mathcal{K}$ можно повторить рассуждения, проводимые в других случаях. Пусть $g \in \mathrm{RC}_\mathcal{K}$, мы будем рассматривать g, как класс эквивалентности слов из $F(\mathcal{K})$. Тогда рассматривая слово $w = v_{i_1}...w_{i_k} \in g$ - самого короткого представителя класса, нетрудно видеть, что:

$$\mu(g) = (1 + \mathrm{v}_{i_1}) \dots (1 + \mathrm{v}_{i_k}) = 1 + \cdots + \mathrm{v}_{i_1} \dots \mathrm{v}_{i_k}$$

□

Замечание 4.9. Можно рассуждать и иначе. Заметим, что элементы $1 + \mathrm{v}_i$ порождают подгруппу H в $Ass_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ изоморфную $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$. Действительно, рассмотрим "повторное"отображение $\mu^* : H \to \mathbb{Z}_2[\mathrm{RC}_\mathcal{K}]$ - продолжение отображения $\mathrm{v_i} \mapsto id + v_i$. Тогда это снова гомоморфизм групп, так как сохраняет все соотношения, причем $\mu^*(1 + \mathrm{v}_i) = v_i$.

Таким образом можно рассмотреть: $D_i = \{a : \mu(a) - 1 \in U_i\}$. Имеет место:

Теорема 4.10. $\{D_i\}_{i=1}^\infty$ *- центральный ряд для* $\Gamma \in \{\mathrm{RA}_\mathcal{K}, \mathrm{RC}_\mathcal{K}\}$.

Доказательство. Данное утверждение доказывается в широкой общности, для любой ассоциативной алгебры с единицей и заданной на ней фильтрацией в [8](гл. 2, $4, п.5).

Заметим, что доказательство [4] в случае частично коммутативной группы опирается только на инъективность отображения Магнуса и на утв. 4.4. □

По этой фильтрации строится еще одна алгебру Ли $L_D(\Gamma)$.

5 Изоморфизмы и не изоморфизмы

Будем обозначать $FL_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)$ - свободную алгебру Ли с образующими из $\mathcal{K}^0$. Введем граф-алгебру Ли над $\mathbb{Z}$:

$$L_\mathcal{K} = FL_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K})$$

Граф-алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_2$ будем называть

$$L_\mathcal{K} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_2 = FL_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K})$$

Теорема 5.1. *Имеют место канонические эпиморфизмы*

1. $e_{F(\mathcal{K})} : FL(\mathcal{K}^0) \to L_\gamma(F(\mathcal{K}))$
2. $e_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}} : L_\mathcal{K} \to L_\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K})$
3. $e_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}} : L_\mathcal{K} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_2 \to L_\gamma(\mathrm{RC}_\mathcal{K})$

Доказательство. Из определения свободной группы имеет место эпиморфизм $FL(\mathcal{K}^0) \to L_\gamma(\Gamma)$, для $\Gamma \in \{F(\mathcal{K}), \mathrm{RA}_\mathcal{K}, \mathrm{RC}_\mathcal{K}\}$.

Далее, так как в $L_\gamma(\mathrm{RA}_\mathcal{K})$ и $L_\gamma(\mathrm{RC}_\mathcal{K})$ верно, что $[v_i, v_j] = 0$, при $i, j \in \mathcal{K}$, то построенный эпиморфизм пропускается через $L_\mathcal{K}$.

В случае $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$, алгебра $L_\gamma(\mathrm{RC}_\mathcal{K})$ является $\mathbb{Z}_2$–модулем, а значит построенный эпиморфизм пропускается через $L_\mathcal{K} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_2$.

□

Теорема 5.2. *Имеют место мономорфизмы*

1. $FL(\mathcal{K}^0) \to Ass_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)$
2. $L_\mathcal{K} \to Ass_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j = v_j v_i, i, j \in \mathcal{K}\rangle$
3. $L_\mathcal{K} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_2 \to Ass_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j = v_j v_i, \{i, j\} \in \mathcal{K}\rangle$

Доказательство. Утверждение (1) является стандартным результатом, подробно описанным, например, в [7], [8]. Отметим однако, два замечательных факта, из которых оно следует. Первое, это изоморфность $Ass_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)$ и $UFL(\mathcal{K}^0)$ - универсальной обертывающей алгебры свободной алгебры Ли. Вторoе - следствие 2.2 из теоремы Биркгофа-Витта, согласно которому отображение $\varepsilon : FL \to UFL$ из определения универсальной обертывающей алгебры, инъективно, так как FL - свободный $\mathbb{Z}$-модуль.

Далее из инъективности отображения $FL(\mathcal{K}^0) \to Ass_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)$ сразу получается (2) факторизацией по одинаковым соотношениям.

Аналогично из 2.2 мономорфно $FL(\mathcal{K}^0) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_2 \to Ass_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)$, откуда следует (3). □

Рассмотрим естественный мономорфизм $\alpha : L_\gamma \to L_D$ порожденный вложением $\gamma_k \subset D_k$ (вложение $\gamma_k \subset G_k$ имеет место для любой центральной фильтрации $\{G_k\}$).

Отождествим далее $\mathrm{gr}(U_\Gamma^\infty) \simeq U_\Gamma$ посредством канонических изоморфизмов $U_\Gamma^k \to U_{\Gamma,k}^\infty / U_{\Gamma,k+1}^\infty$. Заметим, что постренный гомоморфизм Магнуса $\mu : \Gamma \to U_\Gamma^\infty$ продолжается до гомоморфизма градуированных алгебр Ли: $\hat{\mu} : L_D \to \mathrm{gr}(U_\Gamma^\infty) \simeq U_\Gamma$

В [4] явно приведена конструкция отображения $\delta : \mathrm{RA}_\mathcal{K} \to U_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}}$, сопоставляющее элементу $x \in \mathrm{RA}_\mathcal{K}$ слагаемые наименьшей степени в $\mu(x)$. Заметим только, что продолжение этого отображения на алгебры дает $\delta : L_\gamma \to U_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}}$ совпадающее с композицией построенных выше по определению: $\delta = \hat{\mu} \circ \alpha$.

Теорема 5.3. *В случае* $\Gamma = \mathrm{RA}_\mathcal{K}$ *цепочка гомоморфизмов:*

$$L_\mathcal{K} \xrightarrow{e_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}}} L_\gamma \xrightarrow{\alpha} L_D \xrightarrow{\hat{\mu}} U_{\mathrm{RA}_\mathcal{K}}$$

определяет построенный ранее мономорфизм

$$L_\mathcal{K} \to Ass_\mathbb{Z}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j = v_j v_i, i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

Доказательство. Рассмотрим образ элемента $v \in \mathcal{K}^0$:

$$v \mapsto v\gamma_2 \mapsto vD_2 \mapsto 1 + v + U_2 \simeq v \in U_1/U_2$$

Таким образом, построенная композиция есть продолжение вложения $\mathcal{K}^0$ в ассоциативную алгебру. В случае $\Gamma = F(\mathcal{K}^0)$ это отображение $\varepsilon : FL(\mathcal{K}^0) \to UFL(\mathcal{K}^0)$ по определению. Далее, совпадает как фактор. □

Следствие 5.4. *Таким образом отображение* $L_\mathcal{K} \to L_\gamma$ *- мономорфизм, а значит и изоморфизм алгебр Ли.*

Теорема 5.5 (Гипотеза). *Построенное отображение* $\hat{\mu} \circ \alpha = \delta : L_\gamma \to U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ *инъективно.*

Мотивация. Можно рассмотреть "повторное" отображение Магнуса продолженное на алгебры . Если удастся показать, что это гомоморфизм алгебр Ли, то так как $\mu(\mu(v)) = \mu(1 + v) = 1 + 1 + v = v$, получим что отображение совпадает с тождественным. □

Список литературы

[1] Buchstaber V. M., Panov T.E. Toric topology. Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[2] Верёвкин Я. А., “Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера”, Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 61–70; Proc. Steklov Inst. Math., 305 (2019), 53–62

[3] Панов Т. Е., Веревкин Я. А. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Кокстера // Мат. сб. 2016 Т. 207, №11. С. 105-126

[4] Wade R., The lower central series of a right-angled Artin group. Enseign. Math. 61 (2015), 343-371. doi: 10.4171/LEM/61-3/4-4

[5] Duchamp G. and Krob D., The lower central series of the free partially commutative group, Semigroup Forum, vol. 45, no. 1, 385–394 (1992).

[6] Duchamp G. and Krob D., The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Ad-vances in Mathematics, 95, 92-126 (1992).

[7] Серр Ж.-П., Алгебры Ли и группы Ли, Мир, 1969

[8] Бурбаки Н., Алгебры и группы Ли, Мир, 1976

[9] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп: Представления групп в терминах образующих и соотношений. М.:Наука, 1974