**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Присоединенные алгебры Ли прямоугольных групп Кокстера и ассоциативные алгебры Ли

Выполнил студент 403 группы
Рахматуллаев Темурбек Анасбекович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Т.Е. Панов

Москва, 2022 г.

1 Введение

Присоединенной алгебры Ли для дискретных групп - полезный инструмент, используемый для изучения структуры дискретных групп. Пусть G - группа, тогда можно изучать присоединенную алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\bigoplus \gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, где $\gamma(G)$ - нижний центральный ряд группы G. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору.

Классическим результатом в этой области является доказательство Магнуса [12] изоморфности присоединенной алгебры Ли свободной группы и свободной алгебры Ли. Подход Магнуса позже обобщался [1, 2, 8] и позволил доказать изоморфность присоединенной алгебры Ли для частично коммутативных групп Артина $RA_{\mathcal{K}}$ - группы с m образующими $v_1, ..., v_m$ и соотношениями $v_iv_j = v_jv_i$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$ и граф-алгебры Ли, заданной как фактор свободной алгебры Ли на том же наборе образующих по идеалу, порожденному соотношениями $[v_i, v_j] = 0$ для $\{i, j\} \in \mathcal{K}$.

Сам подход предлагает построение отображения из присоединенной алгебры L_γ в ассоциативную алгебру U_G с частично коммутативным произведением(свободную, для свободной группы), так, что $U_G \simeq UL_{\mathcal{K}}$ - универсальная обертывающая граф-алгебры Ли и композиция отображений $L_{\mathcal{K}} \to L_\gamma \to UL_{\mathcal{K}}$, задает естественное вложение, что и доказывает мономорфность первой стрелки.

Нас же интересует случай прямоугольной группы Коксетера $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, отличающейся от группы Артина наличием соотношений $v_i^2 = id$ для всех $i \in [m]$. Это задача уже была частично изучена в статьях Веревкина [7, 11], в частности были исследованы компоненты L_γ до четвертой градуировки включительно. Особый интерес к группам Коксетера объясняется их тесной связью с гиперболической геометрий и появлением при изучении групп гомотопий полиэдральных произведений [13]. Также некоторый класс интересующих нас групп был рассмотрен в работах Пренера и Валдингера [6, 9], где при помощи "процесса сборки коммутаторов" Филиппа Холла [4, 5] и "базисных коммутаторов" Маршалла Холла [3, 4] был получен конструктивный алгоритм построения базиса градуированных компонент присоединенной алгебры Ли. Подробнее последний алгоритм приведен во втором разделе этой работы.

Особенность случая групп Коксетера заключается в том что присоединенная алгебра L_γ является алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_2$, а гомоморфизм из $L_{\mathcal{K}} \otimes \mathbb{Z}_2$ в L_γ не инъективен, см. [11, раздел 4]. В этой работе было рассмотрено отображение Магнуса между группами $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ и мультипликативной группой $(U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^*$, построено соответствующее отображение алгебр Ли L_γ в $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ и изучены некоторые его свойства. Для корректности построенного методом Магнуса отображения необходимо в ассоциативной алгебре $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ требовать дополнительное соотношение $v_i^2 = 0$, аналога которому вообще говоря нет в $L_{\mathcal{K}} \otimes \mathbb{Z}_2$. Само построенное отображение $L_\gamma \to U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ оказывается не инъективным для всех нетривиальных $\mathcal{K}$. Было продемонстрировано, как полученные при построении утверждения позволяют упростить некоторые проверки и вычисления в присоединенной алгебре Ли.

2 Предварительные сведения

Рассмотрим абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m] = \{v_1, ..., v_m\}$, предполагаем, что $\mathcal{K}$ содержит все свои одноэлементные подмножества $[m]$. Будем обозначать $F(\mathcal{K}^0)$ свободную группу на множестве $\mathcal{K}^0$ вершин комплекса. Для удобства, будем считать, что образующие $F(\mathcal{K}^0)$ не $i \in [m]$, а $v_i, i \in [m]$.

Прямоугольными группами Коксетера и Артина, соответствующими сиплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называются группы

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 1 \Leftrightarrow i \in [m]; v_iv_j = v_jv_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

$$\mathrm{RA}_{\mathcal{K}} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_iv_j = v_jv_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

Напомним, некоторые обозначения. Сопряжение для краткости обозначаем $y^x = x^{-1}yx$. Коммутатором элементов a, b группы G называется $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$. Для двух подгрупп $H, W < G$ определим

$$(H, W) = \langle (h, w) | h \in H, w \in W\rangle < G$$

В частности, коммутантом группы называется $G' = (G, G)$.

Пусть G - группа. Назовем последовательность подгрупп $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k\geq 1}$ центральной фильтрацией, если:

1. $G_1 = G$
2. $G_{k+1} < G_k$
3. $(G_k, G_l) < G_{k+l}$

Из определения сразу следует, что $G_k < G$ и $G_{k+l} < G_k$. Более того, $(G_k, G_k) < G_{2k} < G_{k+1}$, а значит фактор-группы G_k/G_{k+1} являются абелевыми. Положим $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_k(G) = (\gamma_{k-1}(G), G)$. Тогда $\{\gamma_k(G)\}$ **- нижний центральный ряд**. Следующая теорема, является следствием тождеств Витта-Холла:

Теорема 2.1 ([12])**.** *Пусть a, b, c - элементы группы G, и пусть k, m, n - такие положительные целые числа, что $a \in G_k, b \in G_m, c \in G_n$. Тогда*

$$\begin{gathered} a \cdot b = b \cdot a (\operatorname{mod} G_{k+m}), \\ (a, b \cdot c) = (a, b) \cdot (a, c) (\operatorname{mod} G_{k+m+n}), \\ (a \cdot b, c) = (a, c) \cdot (b, c) (\operatorname{mod} G_{k+m+n}), \\ (a, b, c)(b, c, d)(c, a, b) = 1 (\operatorname{mod} G_{k+m}), \end{gathered}$$

Следствие 2.2. *Скобка, заданная по правилу*

$$[\sum_i x_i G_{i+1}, \sum_j y_j G_{j+1}] = \sum_{i,j} (x_i, y_j) G_{i+j+1}$$

задает на $L_{\mathcal{G}} = \bigoplus G_i/G_{i+1}$ структуру градуированной алгебры Ли.

Далее преимущественно будем работать с алгеброй Ли ассоциированной с нижним центральным рядом.

Определение 2.1. *Назовем* ***присоединенной алгеброй Ли*** *алгебру L_γ определяемую как*

$$L_\gamma = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \gamma_k/\gamma_{k+1},$$

где γ_i - элементы нижнего центрального ряда, а скобка Ли задана по правилу

$$[\sum_i x_i \gamma_{i+1}, \sum_j y_j \gamma_{j+1}] = \sum_{i,j} (x_i, y_j) \gamma_{i+j+1}$$

Простым вложенным коммутатором длины k элментов $g_1, ..., g_k$ называется вложенный коммутатор следующего вида

$$(g_1, ..., g_k) = (...((g_1, g_2), g_3), ..., g_k)$$

Соответственно в алгебрах Ли будем рассматривать вложенные коммутаторы:

$$[g_1, ..., g_k] = [...[[g_1, g_2], g_3], ..., g_k]$$

Будем обозначать $FL(\mathcal{K}^0)$ - свободную алгебру Ли с образующими из $\mathcal{K}^0$. Введем **граф-алгебру Ли**:

$$L_{\mathcal{K}} = FL(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K})$$

Граф-алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_2$ будем называть

$$L_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = FL_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}).$$

Приведем уже известные результаты, связывающие граф-алгебру Ли с присоединенной алгеброй Ли.

Теорема 2.3 ([12], [1, 2, 8], [11, раздел 4])**.** *Существуют следующие отображения:*

1. $e_{F(\mathcal{K})} : FL(\mathcal{K}^0) \to L_\gamma(F(\mathcal{K}))$ *- изоморфизм*
2. $e_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} : L_{\mathcal{K}} \to L_\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}})$ *- изоморфизм*
3. $e_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} : L_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to L_\gamma(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ *- эпиморфизм*

Контрпример мономорфности последнего отображения приведен в [11, раздел 4].

3 Фундаментальные коммутаторы

В работах Пренера [6] и Валдингера [9] подробно изучен вопрос построения базиса присоединенной алгебры Ли для групп вида:

$$G = Q_1 * \cdots * Q_m,$$

где $Q_i = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ - произведение конечного числа циклических групп порядка 2. Отметим, что все эти группы являются прямоугольными группами Кокстера. Соответствующий комплекс $\mathcal{K} = \coprod_{i=1}^m \Delta_i$ имеет вид дизъюнктного объединения симплексов Δ_i. Действительно, если Δ_i задан на множестве вершин $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$

$$Q_i = F(v_{i_1}, ..., v_{i_k}) / \{v_{i_l} v_{i_m} v_{i_l} v_{i_m} = 1, \quad 1 \le l, m \le k\}$$

Напомним для начала классический результат для свободной группы $F(v_1, ..., v_n)$ [10, 12]:

Определение 3.1. ***Базисными коммутаторами размерности*** *1 назовем все свободные порождающие $v_1, ..., v_n$ с введенным порядком:*

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_n.$$

Размерность *базисного коммутатора c будем обозначать $D(c)$, таким образом $D(v_i) = 1$. Определив и упорядочив базисные коммутаторы размерности меньше k определим* ***базисные коммутаторы размерности*** *k как $c_m = (c_i, c_j)$ где c_i и c_j - базисные коммутаторы, такие, что:*

(i) $D(c_i) + D(c_j) = n$,

(ii) $c_i > c_j$,

(iii) если $c_i = (c_s, c_t)$, тогда $c_j \geqslant c_t$.

Пусть $c_{m_1} = (c_{i_1}, c_{j_1})$, $c_{m_2} = (c_{i_2}, c_{j_2})$ - два коммутатора одной размерности. Тогда $c_{m_1} > c_{m_2}$, если $c_{i_1} > c_{i_2}$ или $c_{i_1} = c_{i_2}$, но $c_{j_1} > c_{j_2}$. Базисный коммутатор размерности n больше чем любой базисный коммутатор меньшей размерности.

Теорема 3.1. *Базисные коммутаторы размерности n являются базисом фактор-группы $\gamma_n(F)/\gamma_{n+1}(F)$.*

Далее приведем результаты рассмотренных работ:

Определение 3.2. *Элемент c назовем* ***G-простым базисным коммутатором****, если он удовлетворяет четырем условиям:*

(i) c либо является образующей v_i, либо является вложенным коммутатором $c = (\ldots(v_{j_1}, v_{j_2}), \ldots, v_{j_\omega})$ таким что

$$v_{j_1} > v_{j_2} \quad \text{и} \quad v_{j_2} \leqslant v_{j_3} \leqslant \cdots \leqslant v_{j_\omega}.$$

(ii) Если $D(c) > 1$, то $(v_{j_1}, v_{j_2}) \neq 1$ в G.

(iii) Любая образующая v_i возникает в записи $c = (\ldots(c_{j_1}, c_{j_2}), \ldots, c_{j_\omega})$ не более одного раза.

(iv) Если $D(c) > 1$ и $(c_{j_1}, c_{j_\tau}) = 1$ в G для $1 < \tau \leqslant \omega$, тогда $c_{j_1} \geqslant c_{j_\tau}$.

Утверждение 1. *G-простые коммутаторы размерности больше 1 - свободные образующие $\gamma_2(G)$.*

Замечание 3.2. *Заметим что в работах Панова и Веревкина [13, теорема 4.5] данный результат установлен в большей общности, для любых групп прямоугольных групп Кокстера.*

Определение 3.3. ***Существенными коммутаторами*** *назовем:*

i) Все G-простые коммутаторы размерности больше 1.

ii) Базисные коммутаторы $c = (c_L, c_R)$, такие что c_L, c_R - существенные.

Определение 3.4. ***Фундаментальные коммутаторы*** *размерности 2 - это все существенные коммутаторы размерности 2. Определив все фундаментальные коммутаторы размерности ниже k, определим фундаментальные коммутаторы размерности $k+1$ как:*

i) Существенные коммутаторы размерности $k+1$.

ii) Квадраты фундаментальных коммутаторов размерности k.

Теорема 3.3 ([6, теорема 4.39]). *Образы фундаментальных коммутаторов размерности n образуют базис фактор группы $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$.*

Пример 1. *Рассмотрим графы на трех вершинах $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\mathcal{K}_1$ без ребер и $\mathcal{K}_2$ с множеством ребер $\{v_1v_2\}$.*

G-простые коммутаторы для $\mathcal{K}_1$:
Размерности 1: $1, \quad 2, \quad 3$
Размерности 2: $[2,1], \quad [3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[2,1],3], \quad [[3,1],2]$

G-простые коммутаторы для $\mathcal{K}_2$:
Размерности 1: $1, \quad 2, \quad 3$
Размерности 2: $[3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[3,1],2]$

Существенные коммутаторы для K_1:
Размерности 2: $[2,1], \quad [3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[2,1],3], \quad [[3,1],2]$
Размерности 4: $[[3,1],[2,1]], \quad [[3,2],[2,1]], \quad [[3,2],[3,1]]$
Размерности 5: $[[[2,1],3],[2,1]], \quad [[[2,1],3],[3,1]], \quad [[[2,1],3],[3,2]], \quad [[[3,1],2],[2,1]],$ $[[[3,1],2],[3,1]], \quad [[[3,1],2],[3,2]]$

Существенные коммутаторы для K_2:
Размерности 2: $[3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[3,1],2]$
Размерности 4: $[[3,2],[3,1]]$
Размерности 5: $[[[3,1],2],[3,1]], \quad [[[3,1],2],[3,2]]$

Таким образом:
$\dim L^2_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 3$, $\dim L^3_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 5$, $\dim L^4_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 8$, $\dim L^5_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 14$ *и*
$\dim L^2_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 2$, $\dim L^3_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 3$, $\dim L^4_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 5$, $\dim L^5_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 7$.

Для вычислений предложенный алгоритм был реализован на языке python. Таким образом в некотором виде, вычисление базиса для групп указанного вида возможно. Однако остается открытым вопрос связи построенного базиса, с базисом состоящим из простых вложенных коммутаторов.

4 Вокруг отображения Магнуса

Известно, что в отличие от случая свободных групп и групп Артина, присоединенная алгебра Ли для групп Кокстера является алгеброй над $\mathbb{Z}_2$, таким образом далее все искомые алгебры рассматриваются также над $\mathbb{Z}_2$. Эта особенность дает как некоторые упрощения при вычислениях, например то, что градуированный коммутатор в градуированной ассоциативной алгебре $[a,b] = ab - (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ba = ab + ba$, так и некоторые сложности, описанные в этом разделе.

Определение 4.1. *Будем далее обозначать $\widehat{T}_{\mathbb{Z}_2}$ - пополненную тензорную алгебру, в которой разрешаются бесконечные суммы.*

*$U^{\infty}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ - **алгебра Магнуса**, ассоциативная алгебра рядов, мономами которой являются всевозможные слова над $\mathcal{K}^0$:*

$$U^{\infty}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}} = \prod U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}} = \widehat{T}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 0, \forall i \in \mathcal{K}^0; \quad v_iv_j + v_iv_j = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}^1\rangle$$

где $U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ - градуированная компонента мономов длины i. Структуру алгебры Ли на $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ задает скобка $[a,b] = ab + ba$.

Введем сразу ассоциативную алгебру состоящую из элементов алгебры Магнуса конечной длины:

$$U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}} \simeq T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 0, \forall i \in \mathcal{K}^0; \quad v_iv_j + v_jv_i = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}^1\rangle$$

Обозначим $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k} = \bigoplus\limits_{i\geqslant k} U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ - идеал состоящий из мономов длины не меньше k.

Пусть $a \in U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}}}$, обозначим $a^i \in U^{\infty,i}_{RC_{\mathcal{K}}}$ - слагаемые градуировки i.

Докажем следующее утверждение, аналогичное теореме 5.6 и лемме 5.3 в [12] для случая свободных групп.

Теорема 4.1. *1) Множество* Γ *всех элементов из* $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ *с ненулевым свободным членом является группой относительно умножения.*

2) Элементы $a_p = 1 + v_i$ *являются образующими подгруппы* M *изоморфной* $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ *в* $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$.

Доказательство. Алгебра $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ замкнута относительно умножения, а также содержит единицу. Обратным для элемента $g = 1 + h$ $h \in U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},1}$ является:

$$g^{-1} = 1 + h + h^2 + ...$$

Проверим что в M выполняются необходимые соотношения группы. Имеем:

$$(1+v_i)^{-1} = (1+v_i)$$

$$(1+v_i)^{-1}(1+v_j)^{-1}(1+v_i)(1+v_j) = 1 + (v_iv_j + v_jv_i)(1 + v_i + v_j + v_iv_j)$$

Таким образом корректно определен сюръективный гомоморфизм групп

$$\mu : \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to M < U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}},$$

заданный на образующих $\mu(v_i) = v_i + 1$.

Докажем инъективность гомоморфизма. Пусть $g \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, мы будем рассматривать g, как класс эквивалентности слов из $F(\mathcal{K})$. Тогда рассматривая слово $w = v_{i_1}...v_{i_k} \in g$ - самого короткого представителя класса, нетрудно видеть, что:

$$\mu(g) = (1+v_{i_1})\dots(1+v_{i_k}) = 1 + \dots + v_{i_1}\dots v_{i_k},$$

где $\mu(g)^k = v_{i_1}\dots v_{i_k}$ - различные элементы для различных g. □

Построенный гомоморфизм

$$\mu : \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to M \subset U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$$

будем называть **отображением Магнуса**.

Замечание 4.2. *Заметим, что отказаться от соотношения* $v_i^2 = 0$ *в* $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ *нельзя, действительно:*

$$\mu(id) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 + 2\mathrm{v} + \mathrm{v}^2 = 1 + \mathrm{v}^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = 0.$$

Таким образом, отображение заведомо строится не в универсальную обертывающую граф-алгебры Ли $L_{\mathcal{K}}$, *так как отображение*

$$L_{\mathcal{K}} \to T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_iv_j + v_jv_i = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}^1\rangle,$$

переводящее образующие в образующие, в общем случае не пропускается через $L_{\mathcal{K}} \to U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$. *Действительно, пусть* $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$, *тогда* $[v_1, v_2, v_2] \neq 0$ *в* $L_{\mathcal{K}}$ *и* $[v_1, v_2, v_2] \neq 0$ *в* $T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_iv_j + v_jv_i = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}^1\rangle$, *но* $[v_1, v_2, v_2] = 0$ *в* $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ *(см. также утв. 4).*

Определим $D_i = \{a \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} : \mu(a) - 1 \in U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}\}$.

Утверждение 2. $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ *- центральный ряд для* $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Рассмотрим мультипликативные группы: $(U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^*$ алгебры Магнуса и Γ элементов со свободным членом равным 1. Тогда согласно [10, гл. 2, §4, п.5] фильтрация $1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}$ является центральным рядом для Γ и Γ - подгруппа $(U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^*$. Вообще говоря, $\Gamma = (U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^*$, что следует из того факта, что произведение двух элементов имеет нулевой свободный член, как только хотя бы один из сомножителей имеет нулевой свободный член.

Далее, $M \simeq \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ - подгруппа Γ, с индуцированной из $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ фильтрацией $M_i = \mu(D_i) \subset 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}$. Таким образом с одной стороны

$$(M_k, M_l) < (1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k}, 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},l}) < 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+l},$$

с другой стороны $(M_k, M_l) < M$, откуда $(M_k, M_l) < M_{k+l}$. Таким образом $\{M_k\}_{i=1}^{\infty}$ - центральный ряд на M, а значит $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ - центральный ряд на $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.

□

Следствие 4.3. *Имеем $\gamma_k < D_k$, т.к. γ_k - нижний центральный ряд.*

Связь отображения Магнуса со структурой алгебр Ли описывает следующее утверждение:

Теорема 4.4. *Пусть $x \in \gamma_k$, тогда:*

1) $\mu(x)^i = 0$, при $0 < i < k$

2) Если $x = (v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ - простой вложенный коммутатор длины k, то $\mu(x)^k$ и $\mu(x)^{k+1}$ - "симметричные" выражения, в том смысле, что для любого монома h верно, что либо у него существует симметричная запись, т.е. $h^{-1} = h$, либо в выражении присутствует слагаемое h^{-1}.

3) В условиях предыдущего пункта $\mu(x)^k = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}]$

Доказательство. Первое утверждение следует того что $x \in \gamma^i \subset D^i$ и определения фильтрации D.

Докажем следующие два пункта индукцией по длине коммутатора. База индукции:

$$\mu((v_i, v_j)) = \mu(v_i v_j v_i v_j) = (1 + v_i)(1 + v_j)(1 + v_i)(1 + v_j) = \\ = 1 + v_i v_j + v_j v_i + v_j v_i v_j + v_i v_j v_i + v_i v_j v_i v_j$$

Откуда $\mu((v_i, v_j))^2 = v_i v_j + v_j v_i = [v_i, v_j]$ и $\mu((v_i, v_j))^3 = v_j v_i v_j + v_i v_j v_i$ - имеют симметричную запись.

Далее, пусть по предположению индукции и пользуясь п.1

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})) = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}},k+2},$$

где $u^{k+1} \in U^{\infty,k+1}_{RC_{\mathcal{K}}}$ имеет симметричную запись. Из симметричности записи следует что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1}) = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}},k+2}$, то есть

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1})^i = \mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}))^i,$$

для $i \subset \{k, k+1\}$. Далее прямым вычислением:

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}})) = \mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1} v_{i_{k+1}}^{-1} (v_{i_1}, ..., v_{i_k}) v_{i_{k+1}}) = \\ = (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+2})(1 + v_{i_{k+1}}) \circ \\ \circ (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+2})(1 + v_{i_{k+1}}) = \\ = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+2} = \\ = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}] + u^{k+1} v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+2}$$

получаем что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+1} = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}]$ и $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+2}$ - симметричные выражения. □

Следствие 4.5. *Дан граф $\mathcal{K}$ на вершинах $[m]$ с множеством ребер E. Пусть $x \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.*

Если $\mu(x)^k \neq 0$, то $x \notin \gamma_{k+1}$. Заметим, что если для графа $\mathcal{K}_0$ на том же множестве вершин, с пустым множеством ребер верно, что $x \in \gamma_k$, то для исходного $\mathcal{K}$ верно, что $x \in \gamma_k$.

Пусть $a, b \in \gamma_k$ причем $a, b \notin \gamma_{k+1}$. Если $\mu(a)^k \neq \mu(b)^k$, то $a \neq b$.

Пример 2. *Пусть дан симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на четырех вершинах $[4] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ с ребрами $\{\{v_4 v_1\}, \{v_4 v_3\}\}$. Утверждается, что $((v_2, v_4), (v_1, v_3))$, $(v_2 v_4 v_1 v_3)$, $(v_2 v_4 v_3 v_1) \notin \gamma_5$.*

Рассмотрим коммутатор $((v_2,v_4),(v_1,v_3))$. *Имеем:*

$$\mu(((v_2,v_4),(v_1,v_3))) = 1 + v_2v_4v_1v_3 + v_2v_4v_3v_1 + v_4v_2v_1v_3 + v_4v_2v_3v_1 + \\ + v_1v_3v_2v_4 + v_1v_3v_4v_2 + v_3v_1v_2v_4 + v_3v_1v_4v_2 + U^5_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$$

Так как $v_4v_2v_1v_3 \neq 0$ *имеет единственную запись(соседние образующие в записи не коммутируют), получаем, что* $\mu(((v_2,v_4),(v_1,v_3)))^4 \neq 0$, *а значит* $((v_2,v_4),(v_1,v_3)) \notin \gamma_5$.

Далее, коммутаторы $(v_2v_4v_1v_3)$ *и* $(v_2v_4v_3v_1)$ *отличаются заменой* $v_1 \leftrightarrow v_3$, *поэтому достаточно доказать утверждение для одного из них. Имеем:*

$$\mu((v_2,v_4,v_3,v_1)) = 1 + v_1v_3v_2v_4 + v_1v_3v_4v_2 + v_1v_2v_4v_3 + v_1v_4v_2v_3 + \\ + v_3v_2v_4v_1 + v_3v_4v_2v_1 + v_2v_4v_3v_1 + v_4v_2v_3v_1 + U^5_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$$

Так как $v_1v_3v_2v_4 \neq 0$ *имеет единственную запись, получаем* $\mu((v_2,v_4,v_3,v_1))^4 \neq 0$, *а следовательно* $((v_2,v_4,v_3,v_1)) \notin \gamma_5$.

Более того, можно заметить, что:

$$\mu((v_2v_4v_1v_3))^4 + \mu((v_2v_4v_3v_1))^4 + \mu(((v_2,v_4),(v_1,v_3)))^4 = 0$$

Что соответствует тождеству Якоби в L_γ:

$$[[v_1,[v_2,v_4]],v_3] + [v_2,v_4,v_3,v_1] + [[v_2,v_4],[v_1,v_3]] = 0$$

Утверждение 3. *Пусть* $x \in \mathrm{RC}_\mathcal{K}$, *причем* $\mu(x) \in 1 + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k}$. *Тогда* $\mu(x)^k = \mu(x^{-1})^k$.

Доказательство. Пусть $\mu(x) = 1+u_k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}$ и $\mu(x^{-1}) = 1+u'_1+\dots+u'_k++U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}$. Тогда

$$\mu(xx^{-1}) = (1 + u_k + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1})(1 + u'_1 + \dots + u'_k + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}) = \\ = 1 + u'_1 + \dots + u'_k + u_k + u_k(u'_1 + \dots + u'_k) + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}) = \\ = 1 + u'_1 + \dots + u'_k + u_k + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}) = 0$$

Откуда $\mu(xx^{-1})^1 = u'_1 = 0$, $\mu(xx^{-1})^2 = u'_2 = 0$, $\dots$, $\mu(xx^{-1})^{k-1} = u'_{k-1} = 0$ и $\mu(xx^{-1})^k = u'_k + u_k = 0$, откуда $u'_k = u_k$. □

Определим отображение $\mu_0 : L_\gamma \to U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$, на элементах $a \in \gamma_k/\gamma_{k+1}$ действующее как $\mu_0(a) = \mu(a)^k$, а на L_γ продлим по линейности.

Теорема 4.6. *Отображение* μ_0 *корректно определено и задает гомоморфизм алгебр Ли.*

Доказательство. Корректность отображения как гомоморфизма алгебр следует из определения μ и п.3 теоремы 4.4. Действительно, пусть $a, b \in \gamma_k$ отличаются умножением на элемент из γ_{k+1}, будем считать $a = b \cdot o, \quad o \in \gamma_{k+1}$. Тогда:

$$\mu(a) = \mu(b)\mu(o),$$

откуда

$$1+\mu(a)^k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1} = (1+\mu(b)^k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1})(1+\mu(o)^{k+1}+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+2}) = 1+\mu(b)^k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1}.$$

Докажем, что отображение является гомоморфизм алгебр Ли, то есть переводит коммутатор в коммутатор. Из линейности определения скобки Ли в присоединенной алгебре Ли следует, что достаточно доказать для двух коммутаторов $a \in \gamma_k$, $b \in \gamma_l$ что:

$$\mu([a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}])^{k+l} = [\mu(a)^k, \mu(b)^l]$$

Будем действовать индукцией по $k + l$. Предположение индукции - что формула верна, для $k + l \leqslant i$. База индукции $i = 1, 2, 3$ следует из корректности отображения на простых вложенных коммутаторах. Докажем шаг индукции. Пусть $a \in \gamma_k$, $b \in \gamma_l$ - вложенные(не обязательно простые) коммутаторы и $k + l = i + 1$. Тогда отображение корректно на a и b, т.е. $\mu(a)^k$ и $\mu(b)^l$ - вложенные коммутаторы в $U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ той же записи что и a и b соответственно. Имеем:

$$[a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}] = (a,b)\gamma_{k+l+1} = a^{-1}b^{-1}ab\gamma_{k+l+1}.$$

откуда с учетом утверждения 3

$$\mu([a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}])^{k+l} = \mu(a^{-1}b^{-1}ab)^{k+l} = (\mu(a^{-1})\mu(b^{-1})\mu(a)\mu(b))^{k+l} =$$
$$= ((1+\mu(a)^k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1})(1+\mu(b)^l+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},l+1})(1+\mu(a)^k+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+1})(1+\mu(b)^l+U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},l+1}))^{k+l} =$$
$$= (1 + \mu(a)^k\mu(b)^l + \mu(b)^l\mu(a)^k + U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K},k+l+1})^{k+l} = [\mu(a)^k, \mu(b)^l]$$

□

Утверждение 4. *Для любого $\mathcal{K}$, в котором найдутся две вершины не соединенные ребром гомоморфизм μ_0 не инъективен.*

Доказательство. Приведем контрпример инъективности. Пусть ребро $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$, тогда:

$$\mu_0((v_1, v_2, v_2)) = [v_1, v_2, v_2] = [v_1v_2 + v_2v_1, v_2] =$$
$$= (v_1v_2 + v_2v_1)v_2 + v_2(v_1v_2 + v_2v_1) = v_1v_2^2 + 2v_2v_1v_2 + v_2^2v_1 = 0$$

В то время как $\mathbb{Z}\langle v_1\rangle * \mathbb{Z}\langle v_2\rangle \subset \mathrm{RC}_\mathcal{K}$ и $(v_1, v_2, v_2) \in \mathbb{Z}\langle v_1\rangle * \mathbb{Z}\langle v_2\rangle$ - ненулевой элемент. □

Замечание 4.7. *Из теоремы 3.3, известно что для $\mathcal{K}$ представленного дизъюнктным объединением полных графов существует целый класс базисных элементов a_i в γ_k/γ_{k+1}, имеющих запись в виде квадратов элементов b_i из γ_{k-1} (таких что $b_i\gamma_k$ - базисные элементы γ_{k-1}/γ_k), т.е. $a_i = b_i^2\gamma_{k+1}$. Тогда:*

$$(\mu(a_i))^k = (\mu(b_i^2))^k = (\mu(b_i)\mu(b_i))^k$$

В то время, как $\mu(b_i)^j = 0$, при $0 < j < k$, а значит $(\mu(b_i)\mu(b_i))^j = 0$, для $0 < j < 2k$. Следовательно для всех таких a_i имеем: $\mu_0(a_i) = 0$.

Список литературы

[1] G. Duchamp и D. Krob. “The free partially commutative Lie algebra: bases and ranks”. В: *Advances in Mathematics* 95.1 (1992), с. 92—126.

[2] G. Duchamp и D. Krob. “The lower central series of the free partially commutative group”. В: *Semigroup Forum*. Т. 45. 1. Springer. 1992, с. 385—394.

[3] M. Hall. “A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups”. В: *Proceedings of the American Mathematical Society* 1.5 (1950), с. 575—581.

[4] M. Hall. *The theory of groups*. Macmillan, 1959.

[5] P. Hall. “A contribution to the theory of groups of prime-power order”. В: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1934), с. 29—95.

[6] R. Prener. “The lower central series of special groups generated by elements of order two”. Дис. … док. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1969.

[7] Y. Veryovkin. *Graded components of the Lie algebra associated with the lower central series of a right-angled Coxeter group*. 2022. DOI: 10.48550/ARXIV.2208.07674. URL: https://arxiv.org/abs/2208.07674.

[8] R. D. Wade. “The lower central series of a right-angled Artin group”. В: *L’Enseignement Mathématique* 61.3 (2016), с. 343—371.

[9] H. V. Waldinger. “The lower central series of groups of a special class”. В: *Journal of Algebra* 14.2 (1970), с. 229—244.

[10] Н. Бурбаки. *Группы и алгебры Ли*. Мир, 1972.

[11] Я. А. Верёвкин. “Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера”. В: *Труды Математического института имени ВА Стеклова* 305.0 (2019), с. 61—70.

[12] В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр. *Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений*. Наука, 1974.

[13] Т. Е. Панов и Я. А. Верёвкин. “Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера”. В: *Математический сборник* 207.11 (2016), с. 105—126.