p-ограниченные присоединенные алгебры Ли прямоугольных групп Кокстера

Темурбек Рахматуллаев

1 Введение

Пусть G – группа. Тогда можно рассматривать различные центральные ряды (фильтрации) – назовем последовательность подгрупп $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k \geqslant 1}$ центральной фильтрацией, если: $G_1 = G$, $G_{k+1} \subset G_k$, $(G_k, G_l) \subset G_{k+l}$. Для каждой такой фильтрации можно рассматривать ассоциированную алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\bigoplus G_i/G_{i+1}$. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору. Классической изучаемой конструкцией является присоединенная алгебра Ли – алгебра ассоциированная с нижним центральным рядом(LCS) $\gamma_k = (\gamma_{k-1}, G)$. Основной результат данной работы – явное описание 2-ограниченной версии присоединенной алгебры Ли для прямоугольных групп Кокстера.

Во втором разделе работы продемонстрирована связь присоединенной алгебры Ли для прямоугольных групп Кокстера с торической топологией, основная же часть работы посвящена результатам по изучению базиса присоединенных алгебр Ли.

Третий раздел – развитие классического построения отображения Магнуса, позволившего изучить базис присоединенной алгебры для свободных групп[21] и для прямоугольных групп Артина[4, 5, 15] не срабатывает в применении к LCS прямоугольных групп Кокстера. Основные доказательства в разделе опущены и приведены в приложении 2. Некоторые результаты из [11, 16] по изучению присоединенной алгебры Ли свободных произведений групп вида $\mathbb{Z}_2^k$ были использованы для построения примеров и приведены в приложении 1. Полученные в разделе контрпримеры наталкивают на необходимость перехода к алгебрам Ли в которых был бы определен аналог возведения в квадрат, уважающий градуировку.

В разделе 4 дано описание различных классических модификаций LCS: рациональный LCS (приводятся только как отрытое направление изучения) и p-ограниченный LCS[17] – ассоциированная с последним алгебра является 2-ограниченной алгеброй Ли [8].

В разделе 5 представлены результаты Квиллена [12], связывающие универсальную обертывающую 2-ограниченной алгебры Ли с градуированным кольцом группового кольца. Также продемонстрирована связь решаемой проблемы с проблемой размерных подгрупп.

Полученная теория использована в разделе 6 для доказательства изоморфизма 2-ограниченной присоединенной алгебры Ли группы Кокстера с 2-граф алгеброй Ли

$$L^{[2]}_{\mathcal{K}} = FL^{[2]}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle [v_i, v_j] = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}; \quad v_i^{[2]} = 0, \forall i \in \mathcal{K}^0 \rangle.$$

Следствием данного изоморфизма в случае флаговых комплексов $\mathcal{K}$ является связь фундаментальной группы полиэдральной степени вещественного бесконечномерного проективного пространства с алгеброй Понтрягина полиэдральной степени комплексного бесконечномерного проективного пространства:

$$\overline{U}(\mathrm{gr}^{[2]}\, \pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}})) = H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbb{Z}_2).$$

2 Предварительные сведения

2.1 Присоединенные алгебры Ли

Пусть на множестве вершин $[m] = \{v_1, ..., v_m\}$ задан абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$. Предполагаем также, что $\mathcal{K}$ содержит все свои одноэлементные подмножества $[m]$ (другими словами, $\mathcal{K}^0 = [m]$). Будем обозначать $F(\mathcal{K}^0)$ свободную группу на множестве $\mathcal{K}^0$ вершин комплекса. Для удобства, будем считать, что образующие $F(\mathcal{K}^0)$ не $i \in [m]$, а $v_i, i \in [m]$.

Прямоугольными группами Кокстера и Артина, соответствующими сиплициальному комплексу $\mathcal{K}$, называются группы

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 1 \Leftrightarrow i \in \mathcal{K}^0; v_i v_j = v_j v_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

$$\mathrm{RA}_{\mathcal{K}} = F(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j = v_j v_i \Leftrightarrow i, j \in \mathcal{K}\rangle$$

Напомним, некоторые обозначения. Сопряжение для краткости будем обозначать $y^x = x^{-1}yx$. Коммутатором элементов a, b группы G называется $(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab$. Для двух подгрупп $H, W \subset G$ определим

$$(H, W) = \langle (h, w) | h \in H, w \in W\rangle \subset G$$

В частности, коммутантом группы называется $G' = (G, G)$.

Пусть G – группа. Назовем последовательность подгрупп $\mathcal{G} = \{G_k\}_{k \geqslant 1}$ центральной фильтрацией, если:

1. $G_1 = G$
2. $G_{k+1} \subset G_k$
3. $(G_k, G_l) \subset G_{k+l}$

Из определения сразу следует, что $G_k \subset G$ и $G_{k+l} \subset G_k$. Более того, из того что $(G_k, G_k) \subset G_{2k} \subset G_{k+1}$, а значит фактор-группы G_k/G_{k+1} являются абелевыми. Положим $\gamma_1(G) = G$, $\gamma_k(G) = (\gamma_{k-1}(G), G)$. Тогда $\{\gamma_k(G)\}$ – **нижний центральный ряд**. Следующая теорема, является следствием тождеств Витта-Холла:

Теорема 2.1 ([21])**.** *Пусть a, b, c – элементы группы G, и пусть k, m, n – такие положительные целые числа, что $a \in G_k, b \in G_m, c \in G_n$. Тогда*

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \cdot a (\operatorname{mod} G_{k+m}), \\ (a, b \cdot c) &= (a, b) \cdot (a, c) (\operatorname{mod} G_{k+m+n}), \\ (a \cdot b, c) &= (a, c) \cdot (b, c) (\operatorname{mod} G_{k+m+n}), \\ (a, b, c)(b, c, d)(c, a, b) &= 1 (\operatorname{mod} G_{k+m}), \end{aligned}$$

Следствие 2.2. *Скобка, заданная по правилу*

$$[\sum_i x_i G_{i+1}, \sum_j y_j G_{j+1}] = \sum_{i,j} (x_i, y_j) G_{i+j+1}$$

задает на $L_{\mathcal{G}} = \bigoplus G_i/G_{i+1}$ структуру градуированной алгебры Ли.

Далее преимущественно будем работать с алгеброй Ли ассоциированной с нижним центральным рядом.

Определение 2.1. *Назовем* ***присоединенной алгеброй Ли*** *алгебру L_γ определяемую как*

$$L_\gamma = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \gamma_k/\gamma_{k+1},$$

где γ_i – элементы нижнего центрального ряда, а скобка Ли задана по правилу

$$[\sum_i x_i \gamma_{i+1}, \sum_j y_j \gamma_{j+1}] = \sum_{i,j} (x_i, y_j) \gamma_{i+j+1}$$

Простым вложенным коммутатором длины k элементов $g_1, ..., g_k$ называется вложенный коммутатор следующего вида

$$(g_1, ..., g_k) = (...((g_1, g_2), g_3), ..., g_k)$$

Соответственно в алгебрах Ли будем рассматривать вложенные коммутаторы:

$$[g_1, ..., g_k] = [...[[g_1, g_2], g_3], ..., g_k]$$

Будем обозначать $FL(\mathcal{K}^0)$ – свободную алгебру Ли с образующими из $\mathcal{K}^0$. Введем **граф-алгебру Ли**:

$$L_{\mathcal{K}} = FL(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K})$$

Граф-алгеброй Ли над $\mathbb{Z}_2$ будем называть

$$L_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = FL_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/([v_i, v_j] = 0 \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K}).$$

Приведем уже известные результаты, связывающие граф-алгебру Ли с присоединенной алгеброй Ли.

Теорема 2.3 ([21], [4, 5, 15], [20, раздел 4])**.** *Существуют следующие отображения:*

1. $e_{F(\mathcal{K})} : FL(\mathcal{K}^0) \to L_\gamma(F(\mathcal{K}))$ – *изоморфизм*
2. $e_{\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}} : L_{\mathcal{K}} \to L_\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}})$ – *изоморфизм*
3. $e_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} : L_{\mathcal{K}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \to L_\gamma(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ – *эпиморфизм*

Контрпример мономорфности последнего отображения приведен в [20, раздел 4].

2.2 Полиэдральные произведения

Пусть $\mathcal{K}$– симплициальный комплекс на множестве [m] и

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

- набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $\mathrm{pt} \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \left\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k : x_k \in A_k \text{ при } k \notin I \right\}$$

и определим полиэдральное произведение набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right),$$

где объединение берется внутри произведения $\prod_{k=1}^m X_k$.

Интересными для нас примерами являются момент угол комплекс:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = (E\mathbb{Z}, B\mathbb{Z}),$$

вещественный момент-угол комплекс:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} = (D^1, S^0)^{\mathcal{K}} = (E\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$$

и

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\mathbb{R}, \mathbb{Z})^I.$$

Пусть $\boldsymbol{G} = (G_1, ..., G_m)$ – набор из m групп. Предполагаем все группы G_i нетривиальными, т.е. $G_i \neq \{1\}$. Положим

$$\boldsymbol{G}^I = \left\{ (g_1, \ldots, g_m) \in \prod_{k=1}^m G_k : g_k = 1 \text{ при } k \notin I \right\}$$

и определим граф-произведение групп

$$G^{\mathcal{K}} \cong \mathop{\ast}_{k=1}^{m} G_k / \left(g_i g_j = g_j g_i : g_i \in G_i, g_j \in G_j, \{i, j\} \in \mathcal{K} \right)$$

где $*_{k=1}^m G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k.

Связь прямоугольных групп Артина и Коксера с полиэдральными произведениями описывается следующими результатами (см. [22]):

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах и $G^{\mathcal{K}}$ – граф-произведение групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $\pi_1\left((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}\right) \cong G^{\mathcal{K}}$.
2. *Каждое из пространств $(B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ и $(E\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ является асферическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ – флаговый комплекс. Таким образом, $B\left(\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}}\right) = (B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}$ при условии, что $\mathcal{K}$ флаговый.*
3. $\pi_i\left((B\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}\right) \cong \pi_i\left((E\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}\right)$ *: $i \geqslant 2$.*
4. *Фундаментальная группа $\pi_1\left((E\boldsymbol{G},\boldsymbol{G})^{\mathcal{K}}\right)$ изоморфна ядру канонической проекции $\boldsymbol{G}^{\mathcal{K}} \to \prod_{k=1}^{m} G_k$.*

Замечание 2.5. *Отметим следующие классифицирующие пространства: $B\mathbb{Z} \simeq S^1$ и $B\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{R}P^{\infty}$, с соответствующими универсальными накрытиями $\mathbb{R} \to S^1$ и $S^{\infty} \to \mathbb{R}P^{\infty}$ соответственно.*

Следствие 2.6. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на m-вершинах. Тогда*

1. $\pi_1((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong RA_{\mathcal{K}}$;
2. *каждое из пространств $\left(S^1\right)^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является асферическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ – флаговый комплекс.*
3. $\pi_i((S^1)^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$*, при* $i \geqslant 2$;
4. *группа $\pi_1\left(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}\right)$ изоморфна коммутанту $RA'_{\mathcal{K}}$.*

Следствие 2.7. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах. Тогда*

1. $\pi_1((\mathbb{RP}^{\infty})^{\mathcal{K}}) \cong \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$;
2. *каждое из пространств $(\mathbb{R}^{\infty})^{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является асферическим, если и только если $\mathcal{K}-$ флаговый комплекс;*
3. $\pi_i((\mathbb{R}^{\infty})^{\mathcal{K}}) \cong \pi_i\left(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}\right)$ *при* $i \geqslant 2$;
4. *группа $\pi_1\left(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}\right)$ изоморфна коммутанту $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$.*

2.3 Параллель вещественного и комплексного случая

Здесь и далее рассматриваем $\mathcal{K}$ – флаговый комплекс.

Комплексный случай

Утверждение 1. *Имеет место гомотопическое расслоение:*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \to ((\mathbb{C}P)^{\infty})^{\mathcal{K}} \to ((\mathbb{C}P)^{\infty})^{m}.$$

Рассматривая гомологии петель получаем расщепимую точную последовательность алгебр:

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \to H_*(\Omega(\mathbb{C}P)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \to \\ \to \Lambda[m] \to 1,$$

где $\mathbf{k}$ – поле, либо $\mathbb{Z}$. Если $\mathbf{k}$ – поле, то имеет место явное описание:

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \cong \\ \cong \frac{T\langle u_1,\ldots,u_m\rangle}{(u_i^2=0, u_iu_j+u_ju_i=0, \Leftrightarrow \{i,j\}\in\mathcal{K})}$$

Вещественный случай

Утверждение 2. *Имеет место гомотопическое расслоение:*

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \to ((\mathbb{R}P)^{\infty})^{\mathcal{K}} \to ((\mathbb{R}P)^{\infty})^{m},$$

причем для флагового $\mathcal{K}$ все три пространства асферичны.

Вся топологическая информация содержится в фундаментальных группах пространств. Переходя к фундаментальным группам получаем последовательность [22]:

$$1 \to \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}{}' \to \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}^{\oplus m} \to 1$$

Естественно задаться вопросом, можно ли по группе $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ построить градуированную алгебру, которая бы содержала гомотопическую информацию о $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. Здесь возникает вторая мотивирующая параллель:

Утверждение 3. *Имеет место гомотопическое расслоение:*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \to (S^1)^{\mathcal{K}} \to (S^1)^m,$$

причем для флагового комплекса $\mathcal{K}$ пространства являются асферическими.

Переходя к фундаментальным группам:

$$1 \to \mathrm{RA}_{\mathcal{K}}{}' \to \mathrm{RA}_{\mathcal{K}} \to 1$$

Известно, что алгебра Ли, ассоциированная с нижним центральным рядом $\mathrm{RA}_{\mathcal{K}}$ имеет явное описание[5, 15] и изоморфна граф-алгебре Ли:

$$\mathrm{gr}(\gamma(\mathrm{RA}_{\mathcal{K}})) \cong L_{\mathcal{K}} = \frac{\mathrm{FL}(\mathcal{K}^0)}{([v_i, v_j] = 0, \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K})}.$$

3 Вокруг отображения Магнуса

Известно, что в отличие от случая свободных групп и групп Артина, присоединенная алгебра Ли для прямоугольных групп Кокстера является алгеброй над $\mathbb{Z}_2$, таким образом далее все искомые алгебры рассматриваются также над $\mathbb{Z}_2$. Эта особенность дает как некоторые упрощения при вычислениях, например то, что градуированный коммутатор в градуированной ассоциативной алгебре $[a, b] = ab - (-1)^{\deg a \cdot \deg b} ba = ab + ba$, так и некоторые сложности, описанные в этом разделе.

Определение 3.1. *Будем далее обозначать $\widehat{T}_{\mathbb{Z}_2}$ – пополненную тензорную алгебру, в которой разрешаются бесконечные суммы.*

$U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ – ***алгебра Магнуса****, ассоциативная алгебра рядов, мономами которой являются всевозможные слова над $\mathcal{K}^0$:*

$$U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \prod U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \widehat{T}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 0, \forall i \in \mathcal{K}^0; \quad v_i v_j + v_i v_j = 0 \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K}^1 \rangle$$

где $U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ – градуированная компонента мономов длины i. Структуру алгебры Ли на $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ задает скобка $[a, b] = ab + ba$.

Введем сразу ассоциативную алгебру состоящую из элементов алгебры Магнуса конечной длины:

$$U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} \simeq T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i^2 = 0, \forall i \in \mathcal{K}^0; \quad v_i v_j + v_j v_i = 0 \Leftrightarrow \{i, j\} \in \mathcal{K}^1 \rangle$$

Обозначим $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k} = \bigoplus_{i \geqslant k} U^{\infty,i}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ – идеал состоящий из мономов длины не меньше k.

Пусть $a \in U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}}}$, обозначим $a^i \in U^{\infty,i}_{RC_{\mathcal{K}}}$ – слагаемые градуировки i.

Докажем следующее утверждение, аналогичное теореме 5.6 и лемме 5.3 в [21] для случая свободных групп.

Теорема 3.1. *1) Множество Γ всех элементов из $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ с ненулевым свободным членом является группой относительно умножения.*

2) Элементы $a_p = 1 + v_i$ являются образующими подгруппы M изоморфной $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ в $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$.

Доказательство. Алгебра $U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ замкнута относительно умножения, а также содержит единицу. Обратным для элемента $g = 1 + h$, $h \in U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},1}$ является:

$$g^{-1} = 1 + h + h^2 + ...$$

Проверим что в M выполняются необходимые соотношения группы. Имеем:

$$(1 + v_i)^{-1} = (1 + v_i)$$

$$(1 + v_i)^{-1}(1 + v_j)^{-1}(1 + v_i)(1 + v_j) = 1 + (v_i v_j + v_j v_i)(1 + v_i + v_j + v_i v_j)$$

Таким образом корректно определен сюръективный гомоморфизм групп

$$\mu : \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to M \subset U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}},$$

заданный на образующих $\mu(v_i) = v_i + 1$.

Докажем инъективность гомоморфизма. Пусть $g \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, мы будем рассматривать g, как класс эквивалентности слов из $F(\mathcal{K})$. Тогда рассматривая слово $w = v_{i_1}...v_{i_k} \in g$ – самого короткого представителя класса, нетрудно видеть, что:

$$\mu(g) = (1 + v_{i_1}) \dots (1 + v_{i_k}) = 1 + \dots + v_{i_1} \dots v_{i_k},$$

где $\mu(g)^k = v_{i_1} \dots v_{i_k}$ – различные элементы для различных g. □

Построенный в доказательстве теоремы гомоморфизм

$$\mu : \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to M \subset U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$$

будем называть **отображением Магнуса**.

Замечание 3.2. *Заметим, что отказаться от соотношения $v_i^2 = 0$ в $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ нельзя. Действительно, так как μ изоморфизм $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ и M:*

$$\mu(id) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 \Rightarrow \mu(v^2) = 1 + 2\mathrm{v} + \mathrm{v}^2 = 1 + \mathrm{v}^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{v}^2 = 0.$$

Таким образом, отображение заведомо строится не в универсальную обертывающую граф-алгебры Ли $L_{\mathcal{K}}$, так как отображение

$$L_{\mathcal{K}} \to T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j + v_j v_i = 0 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}^1 \rangle,$$

переводящее образующие в образующие, в общем случае не пропускается через $L_{\mathcal{K}} \to U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$. Действительно, пусть $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$, тогда $[v_1, v_2, v_2] \neq 0$ в $L_{\mathcal{K}}$ и $[v_1, v_2, v_2] \neq 0$ в $T_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/\langle v_i v_j + v_j v_i = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}^1 \rangle$, но $[v_1, v_2, v_2] = 0$ в $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ (см. также утв. 5).

Определим $D_i = \{a \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}} : \mu(a) - 1 \in U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}\}$.

Утверждение 4. *$\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ – центральный ряд для $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.*

Доказательство. Рассмотрим мультипликативные группы: $(U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^{\times}$ алгебры Магнуса и Γ элементов со свободным членом равным 1. Тогда согласно [19, гл. 2, §4, п.5] фильтрация $1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}$ является центральным рядом для Γ и Γ – подгруппа $(U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^{\times}$. Вообще говоря, $\Gamma = (U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^{\times}$, что следует из того факта, что произведение двух элементов имеет нулевой свободный член, как только хотя бы один из сомножителей имеет нулевой свободный член.

Далее, $M \simeq \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ – подгруппа Γ, с индуцированной из $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ фильтрацией $M_i = \mu(D_i) \subset 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},i}$. Таким образом с одной стороны

$$(M_k, M_l) \subset (1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k}, 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},l}) \subset 1 + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},k+l},$$

с другой стороны $(M_k, M_l) \subset M$, откуда $(M_k, M_l) \subset M_{k+l}$. Таким образом $\{M_k\}_{i=1}^{\infty}$ – центральный ряд на M, а значит $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ – центральный ряд на $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.

□

Следствие 3.3. *Имеем $\gamma_k \subset D_k$, т.к. γ_k – нижний центральный ряд.*

Связь отображения Магнуса со структурой алгебр Ли описывает следующее утверждение:

Теорема 3.4. *Пусть $x \in \gamma_k$, тогда:*

1) $\mu(x)^i = 0$, при $0 < i < k$

2) Если $x = (v_{i_1}, ..., v_{i_k}) \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ – простой вложенный коммутатор длины k, то $\mu(x)^k$ и $\mu(x)^{k+1}$ – "симметричные" выражения, в том смысле, что для любого монома h верно, что либо у него существует симметричная запись, т.е. $h^{-1} = h$, либо в выражении присутствует слагаемое h^{-1}.

3) В условиях предыдущего пункта $\mu(x)^k = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}]$

Следствие 3.5. *Дан граф $\mathcal{K}$ на вершинах $[m]$ с множеством ребер E. Пусть $x \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$.*

Если $\mu(x)^k \neq 0$, то $x \notin \gamma_{k+1}$. Заметим, что если для графа $\mathcal{K}_0$ на том же множестве вершин, с пустым множеством ребер верно, что $x \in \gamma_k$, то для исходного $\mathcal{K}$ верно, что $x \in \gamma_k$.

Пусть $a, b \in \gamma_k$ причем $a, b \notin \gamma_{k+1}$. Если $\mu(a)^k \neq \mu(b)^k$, то $a \neq b$.

Определим отображение $\mu_0 : L_\gamma \to U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$, на элементах $a \in \gamma_k/\gamma_{k+1}$ действующее как $\mu_0(a) = \mu(a)^k$, а на L_γ продлим по линейности.

Теорема 3.6. *Отображение μ_0 корректно определено и задает гомоморфизм алгебр Ли.*

Утверждение 5. *Для любого $\mathcal{K}$, в котором найдутся две вершины не соединенные ребром гомоморфизм μ_0 не инъективен.*

Доказательство. Приведем контрпример инъективности. Пусть ребро $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$, тогда:

$$\begin{aligned}\mu_0((v_1, v_2, v_2)) = [v_1, v_2, v_2] = [v_1v_2 + v_2v_1, v_2] = \\ = (v_1v_2 + v_2v_1)v_2 + v_2(v_1v_2 + v_2v_1) = v_1v_2^2 + 2v_2v_1v_2 + v_2^2v_1 = 0\end{aligned}$$

В то время как $\mathbb{Z}\langle v_1\rangle * \mathbb{Z}\langle v_2\rangle \subset \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$ и $(v_1, v_2, v_2) \in \mathbb{Z}\langle v_1\rangle * \mathbb{Z}\langle v_2\rangle$ – ненулевой элемент. □

Замечание 3.7. *Из теоремы 6.8, известно что для $\mathcal{K}$ представленного дизъюнктным объединением полных графов существует целый класс базисных элементов a_i в γ_k/γ_{k+1}, имеющих запись в виде квадратов элементов b_i из γ_{k-1} (таких что $b_i\gamma_k$ – базисные элементы γ_{k-1}/γ_k), т.е. $a_i = b_i^2\gamma_{k+1}$. Тогда:*

$$(\mu(a_i))^k = (\mu(b_i^2))^k = (\mu(b_i) \cdot \mu(b_i))^k$$

В то время, как $\mu(b_i)^j = 0$, при $0 < j < k$, а значит $(\mu(b_i) \cdot \mu(b_i))^j = 0$, для $0 < j < 2k$. Следовательно для всех таких a_i имеем: $\mu_0(a_i) = 0$.

4 Другие классические центральные ряды

Стоит упомянуть работу Лазарда [8] в которой было положено начало теории для центральных рядов и работу Suciu [14] в которой присутствует обзор всех описанных далее центральных рядов. См. также [1, 2] про рациональные и mod-p нижние центральные ряды.

4.1 Предварительные сведения

Подробно про мотивацию конструкции p-ограниченных алгебр Ли см. [6, 7].

Определение 4.1. ***p-ограниченной алгеброй Ли*** *назовем алгебру Ли L над полем k характеристики p с введенной p-операцией $x \mapsto x^{[p]}$, такой, что $\forall x, y \in L$:*

1. $[x, y^{[p]}] = [x, y, ..., y]$
2. $(tx)^{[p]} = t^p x^{[p]}$, $t \in k$
3. $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} i^{-1} s_i(x, y)$, *где $s_i(x, y)$ – формальные коэффициенты перед t^{i-1} в записи $\mathrm{ad}_x(tx + y)^{p-1}$ в ассоциативной алгебре Ли*

Замечание 4.1. *Здесь, коэффициенты в пункте (3) находятся из следующего вычисления в ассоциативной алгебре Ли со скобкой $[x, y] = xy - yx$:*

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}_x(tx + y))^{p-1} = [x, tx + y, tx + y, ..., tx + y] = \\ = s_p(x, y)t^{p-1} + s_{p-1}(x, y)t^{p-2} + \cdots + s_1(x, y)\end{aligned}$$

Пример 1. *Классическим примером ограниченной алгебры Ли является свободная ассоциативная алгебра над полем характеристики p, со скобкой* $[x, y] = xy - yx$ *и* $x^{[p]} = x^p$. *Таким образом алгебра Магнуса* $U_{\mathrm{RC}_\mathcal{K}}$ *является ограниченной алгеброй Ли.*

Вычислим коэффициенты в п.(3) над полем характеристики $p = 3$.

$$(\mathrm{ad}_x(tx + y))^2 = [x, tx + y, tx + y] = [x, y, tx + y] = t[x, y, x] + [x, y, y].$$

Таким образом $s_2(x, y) = [x, y, x]$, $s_1(x, y) = [x, y, y]$, *откуда*

$$(x + y)^{[3]} = x^{[3]} + y^{[3]} + 2[x, y, x] + [x, y, y]$$

За бОльшим количеством информации по поводу p-алгебр Ли, а также за определением гомоморфизма и изоморфизма в p-алгебрах Ли см. [7, 6].

4.2 Предмет исследования

Далее приведены определения и основные свойства часто рассматриваемых модификаций нижнего центрального ряда. Основными интересующими нас объектами является N_p-ряд и p-ограниченный LCS, остальное приведено для полноты изложения.

Определение 4.2. $\{K_n\}$ *называется* N_0***-рядом****, если все последовательные факторы* K_n/K_{n+1} *нильпотентны (то есть обладают конечным LCS).*

$\{K_n\}$ *называется* ***рядом p-кручения*** *(p-центральной фильтрацией), если* $K_n^p \subset K_{n+1}$.

$\{K_n\}$ *называется* N_p***-рядом*** *(p-ограниченным рядом), если* $K_n^p \subset K_{np}$

Следующие ряды были определены в работе [13] описывающей связь LCS с гомологиями групп низкой размерности (см. соотв. раздел).

Пусть G – произвольная группа. Для подгруппы $S \subset G$, обозначим $\sqrt{S}$ **изолятор** S в G, т.е. множество элементов G, положительная степень которых лежит в S:

$$\sqrt{S} = \sqrt[G]{S} = \{x \in G \ \mid \ \exists p : x^p \in S\}.$$

Определение 4.3. *Определим* ***рациональный LCS*** *и* ***mod-p LCS****:*

$$\gamma_{n+1}^{\mathbb{Q}} = \sqrt{[G, \gamma_n^{\mathbb{Q}}]}; \quad \gamma_{n+1}^{(p)} = (\gamma_n^{(p)})^p [G, \gamma_n^{(p)}],$$

$$\gamma_0^{\mathbb{Q}} = \gamma_1.$$

Утверждение 6. *Рациональный и mod-p LCS являются центральными рядами.*

Следствие 4.2. *Определены* $\mathrm{gr}(\gamma^{\mathbb{Q}})$ *и* $\mathrm{gr}(\gamma^{(p)})$ *алгебры Ли ассоциированные с соответствующими фильтрациями* $\gamma^{\mathbb{Q}}$ *и* γ^p. *соответственно.*

Замечание 4.3. *В старых обозначениях* $L_\gamma = \mathrm{gr}(\gamma)$.

4.2.1 Свойства рационального LCS

Утверждение 7. *Свойства рационального LCS:*

1. $S \subset \sqrt{S}, \sqrt{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$

2. $\phi : G \to H, \phi(S) \subset \Rightarrow \phi(\sqrt[G]{S}) \subset \sqrt[H]{T}$

3. $\sqrt[G]{1} = \mathrm{Tors}(G)$ *– кручение* G.

4. G *– нильпотентная группа* $\Rightarrow$ *изолятор любой подгруппы* G *снова подгруппа.*

Утверждение 8 ([9, Lemma 4.4])**.** *Пусть* $K = \{K_n\}_{n \geqslant 1}$ *– центральный ряд* G. *Тогда* $\sqrt{K_n} \lhd G$*; более того все факторы* $\sqrt{K_n}/\sqrt{K_{n+1}}$ *– нильпотентные группы.*

Утверждение 9. 1. $\gamma_n^{\mathbb{Q}}(G) = \sqrt{\gamma_n(G)}$ *для* $n \geqslant 1$

2. $\gamma_n^{\mathbb{Q}}(G)$ *– абелевы группы без кручения*

3. *Все последовательные факторы* $\gamma^{\mathbb{Q}}(G)$ *нильпотентны.*

4.2.2 Свойства mod-p LCS, p-ограниченный LCS

Заметим, что для прямоугольных групп Коксетера mod-p LCS $\gamma^{(p)}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ совпадает с обычным LCS. Таким образом, mod-p LCS не несет в себе новой информации для изучения прямоугольных групп Коксетера. Для того чтобы ассоциированная с фильтрацией алгебра Ли была p-ограниченной необходимо чтобы это был N_p-ряд. Следующее построение минимального по включению N_p-ряда для LCS ввел H. Zassenhaus [17].

Определение 4.4. *Пусть $\{K_i\}_{i\geqslant 1}$ – центральная фильтрация. Будем называть p-ограниченным центральным рядом построенным по $\{K\}$ следующую фильтрацию*

$$K_n^{[p]} = \prod_{mp^j\geqslant n, m\geqslant 1, j\geqslant 0} (K_m)^{p^j}$$

Утверждение 10 ([8, Lazard, Th. 5.6], [10, Inder Bir S. Passi, Th. IV.1.9])**.** *Построенная фильтрация $\{K_n^{[p]}\}$ является минимальным по включению N_p-рядом, содержащим ряд $\{K\}$.*

Теорема 4.4 ([8, Lazard, Corollary 6.8])**.** *Алгебра Ли ассоциированная с фильтрацией $\{K_n^{[p]}\}$ является ограниченной алгеброй Ли.*

Заметим, для $g \in K_n^{[p]}$ элемент $g^p \in K_{np}^{[p]}$. Поэтому корректна и уважает градуировку индуцированная операция в p-алгебре Ли $\mathrm{gr}(\mathrm{K}^{[\mathrm{p}]})$: для $\overline{g} = gK_{n+1}^{[p]} \in K_n^{[p]}/K_{n+1}^{[p]}$ имеем $\overline{g}^{[p]} = \overline{g^p} = g^p K_{np+1}^{[p]} \in K_{np}^{[p]}/K_{np+1}^{[p]}$.

Будем далее обозначать $\mathrm{gr}^{[p]}(G) = \mathrm{gr}(\gamma^{[p]}(G))$ алгебру Ли ассоциированную с фильтрацией $\gamma^{[p]}$.

4.2.3 Примеры

Пример 2. *Для $G = \mathbb{Z}$ имеем $\mathrm{gr}_n^{[p]}(G) = \mathbb{Z}_p$, для $n = p^j, \forall j \geqslant 0$ и $\mathrm{gr}_n^{[p]}(G) = 0$, иначе.*

Пример 3. *Пусть $\mathcal{K} = pt \bigcup pt$, $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$; тогда для $\gamma_n(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}$ для $n > 1$ – свободная группа порожденная коммутатором $(g_1, g_2, g_1, ..., g_1)$ длины n. Таким образом, $\gamma_k \cong (\gamma_2)^{2^{k-2}}$, для $k > 1$(здесь мы использовали $(a, g_1, g_1) = (g_1, a)^2(a, g_1^2) = (g_1, a)^2$ в $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$).*

Таким образом $\gamma_1(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\gamma_n(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}_2$, при $n > 1$. С другой стороны несложно убедиться, что $\gamma_n^{[2]} = (\gamma_2)^{2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}}$:

$$\gamma_n^{[2]} = \gamma_n \times ... \times \gamma_2^{2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}} = (\gamma_2)^{2^{n-2}} \times ... \times \gamma_2^{2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}} = \gamma_2^{2^{\lceil \log_2(n) \rceil - 1}}.$$

Например, $\gamma_3^{[2]} = \gamma_4^{[2]} \cong \mathbb{Z}$ порождены коммутатором $(g_1, g_2, g_1) = (g_1, g_2, g_2) = (g_2, g_1)^2$, а $\gamma_k^{[2]} \cong \mathbb{Z}, k = 5..8$ порождены коммутатором $(g_1, g_2)^{2^2}$. Заметим далее, что согласно определению коммутатора 2.2 в алгебре Ли имеем $[g_1, g_2, g_2] \in \mathrm{gr}_3^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ – элемент градуировки 3 в $\mathrm{gr}^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ и в ней $[g_1, g_2, g_2] = 0$. С другой стороны, $[g_1, g_2, g_2] \neq (g_1, g_2, g_2)\gamma_4$, а $0 \neq (g_1, g_2, g_2)\gamma_4 = [g_2, g_1]^2 \in \mathrm{gr}_4^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.

$\mathrm{gr}_n^{[2]}(G) = \mathbb{Z}_2$, для $n = 2^j, \forall j > 0$ и $\mathrm{gr}_n^{[2]}(G) = 0$, иначе.

Утверждение 11. *Для $k < 4 : \gamma_k = \gamma_k^{[2]}$. Более того, $\gamma_4^{[2]} = \gamma_4\gamma_2^2$.*

Доказательство.

$$\gamma_1^{[p]} = \gamma_1$$

$$\gamma_2^{[p]} = \gamma_2\gamma_1^2 = \gamma_2,$$

т.к. $\gamma_1^2 = id$.

$$\gamma_3^{[p]} = \gamma_3\gamma_2^2\gamma_1^4 = \gamma_3,$$

т.к. $\gamma_2^2 \subset \gamma_3$

$$\gamma_4^{[p]} = \gamma_4\gamma_3^2\gamma_2^2\gamma_1^4 = \gamma_4\gamma_2^2.$$

□

Пример 4. *Покажем на примере, что вообще говоря, не всегда верно, что* $\gamma_3^{[2]} = \gamma_4^{[2]}$. *Пусть дан граф* $\mathcal{K}$ *на вершинах* $[3]$ *с одним ребром* $\{\{1,2\}\}$. *Тогда согласно Валдингеру имеем: Базисные элементы* γ_2/γ_3 *—* $[3,1],[3,2]$, *базисные элементы* γ_3/γ_4 *—* $[[3,1],2]$ *(существенный коммутатор) и квадраты базисных элементов* γ_2/γ_3 *—* $[3,1]^2 = [3,1,1],[3,2]^2 = [3,2,2]$.

Рассматривая ограниченный LCS имеем $\gamma_4^{[2]} = \gamma_4\gamma_2^2$. *Известно, что коммутатор* $[[3,1],2] \notin \gamma_4$, *не выражается через* $[3,1]^2 = [3,1,1],[3,2]^2 = [3,2,2]$, *то есть* $[[3,1],2] \notin \gamma_2$. *Следовательно,* $[[3,1],2] \notin \gamma_4^{[2]}$, *но* $[[3,1],2] \in \gamma_3^{[2]} = \gamma_3$.

5 Об ассоциированном градуированном кольце группового кольца

Первые две части раздела являются изложением результатов одноименной работы Квиллена [12]. В третьей части приведена связь с проблемой размерных подгрупп (dimension subgroup problem).

5.1 Предварительные сведения

Определение 5.1. *Пусть* R *— коммутативное кольцо с единицей, а* G *— группа. Тогда* ***групповым кольцом*** $R[G]$ *называется множество конечных формальных сумм вида* $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g, \quad a_g \in R$, *которые складываются и умножаются следующим образом:*

Если $\alpha = \sum_{g\in G} a_g g,\ \beta = \sum_{g\in G} b_g g$, *то*

$$\alpha + \beta = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{g\in G} \left(\sum_{\substack{xy=g,\\ x,y\in G}} a_x b_y \right) g.$$

Неформально говоря, групповое кольцо $R[G]$ — это свободный модуль над кольцом R, базисные элементы которого – элементы группы G, умножение базисных элементов определяется как умножение элементов группы, а на остальные элементы умножение «распространяется по линейности».

Определение 5.2. ***Аугментационным гомоморфизмом*** *называется гомоморфизм* $\varepsilon : R[G] \to R$, *по определению заданный* $\varepsilon(\sum r_i g_i) = \sum r_i$, *где* $r_i \in R$, $g_i \in G$.

Аугментационный идеал $\overline{R[G]}$ *– ядро гомоморфизма* ε.

Неформально, $\varepsilon(g) = 1_R$, для любого $g \in G$ и $\varepsilon(r) = r$ для $r \in R$, а на остальные элементы умножение «распространяется по линейности».

Аугментационный идеал $\overline{R[G]}$ является двусторонним идеалом в $R[G]$, порожденным элементами вида $\{g - g' | g, g' \in G\}$. Базисом $\overline{R[G]}$, как свободного R-модуля является $\{g - 1 | g \in G\}$.

5.2 Основная теорема

Пусть K – поле, $\mathrm{char}K = p^\alpha$. Алгебру ассоциированную с фильтрацией по аугментационному идеалу будем обозначать:

$$\mathrm{gr}(KG) = \bigoplus_{n\geqslant 1} (\overline{KG})^n / (\overline{KG})^{n+1}$$

Рассмотрим следующую фильтрацию на группе G:

$$D_r^{\mathbb{Z}_p} = \{x \in G | x - 1 \in (\overline{KG})^r\}$$

Утверждение 12. *Фильтрация* $D_r^{\mathbb{Z}_p}$ *является p-ограниченным рядом* G.

Следствие 5.1. *Имеет место включение*

$$\gamma_r^{[p]}(G) \subset D_r^{\mathbb{Z}_p}.$$

И индуцированный гомоморфизм ограниченных алгебр Ли

$$\mathrm{gr}^{[p]}(G) \to \mathrm{gr}(KG)$$

заданный на $x\gamma_{r+1}^{[p]} \in \gamma_r^{[p]}/\gamma_{r+1}^{[p]}$ *как* $x\gamma_{r+1}^{[p]} \mapsto (x-1)(\overline{KG})^r$.

Утверждение 13 ([12, Lemma 2.1])**.** *Пусть* $w : L_1 \to L_2$ *– гомоморфизм p-алгебр Ли над* K*, тогда* w *сюръективно (инъективно) тогда и только тогда, когда сюръективно (инъективно)* $Uw : UL_1 \to UL_2$.

Теорема 5.2 ([12, Th. 2.4], [8, Th. 6.10])**.** *Для произвольной группы* G *p-нижний центральный ряд совпадает с размерным рядом* $D_r^{\mathbb{Z}_p}(G)$ *(рядом порожденным фильтрацией* $(\overline{KD})^r$*):*

$$\gamma_r^{[p]}(G) = D_r^{\mathbb{Z}_p}(G).$$

Теорема 5.3 ([12, Quillen, Th. 1], [10, Passi, Th. VIII.5.2])**.** *Имеет место изоморфизм градуированных алгебр над* K*:*

$$\overline{U}(\mathrm{gr}^{[p]}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} K) \to \mathrm{gr}(KG)$$

Определение 5.3. *Элемент* p *биалгебры называется* ***примитивным****, если*

$$\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1,$$

где μ *– коумножение в биалгебре.*

Утверждается также, что $\mathrm{gr}(KG)$ является алгеброй Хопфа порожденной примитивными элементами, а следовательно содержит в себе подалгебру Ли $\mathcal{P}\mathrm{gr}(KG)$ состоящую из примитивных элементов. Таким образом, утверждение теоремы эквивалентно изоморфизму алгебр Ли: $\mathrm{gr}^{[p]}(G) \simeq \mathcal{P}\mathrm{gr}(KG)$.

Утверждение 14. $\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \simeq \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/(v_i^2 - 1, \forall i; \quad v_iv_jv_iv_j - 1 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K})$

Доказательство. Заметим, что корректно определено отображение

$$\phi : \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{K}^0)/(v_i^2 - 1, \forall i; \quad v_iv_jv_iv_j - 1 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}) \to \mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$$

заданное на образующих как $1 \mapsto 1 \cdot id$ и $v_i \mapsto 1 \cdot v_i$.

Действительно, $\phi(v_iv_jv_iv_j - 1) = 1 \cdot v_iv_jv_iv_j - 1 \cdot id = 0 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}$ и $\phi(v_i^2) = 1 \cdot v_i^2 = 1 \cdot id$. С другой стороны, в обоих кольцах, всевозможные записи монома a совпадают со всевозможными записями слова a в моноиде на m образующих с соотношениями $v_i^2 = id, \forall i; \quad v_iv_jv_iv_j = id \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}$. □

Замечание 5.4. *Заметим, что соотношение* $v_iv_jv_iv_j = 1$ *равносильно тому что* $v_iv_j + v_jv_i = 0$.

Пример 5. *Рассмотрим* $\mathcal{K} = \{x_0, x_1\}$ *– дизъюнктное объединение двух точек. Тогда* $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \{\sum a_ig_i | a_i \in \mathbb{Z}_2, \sum a_i = 0\}$*, где в свою очередь* $g_i \in \{xyxy..., yxyxy...\}$*. В свою очередь* $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \{\sum a_ig_i | \sum a_i = 0\}$ *целиком содержит образ эндоморфизма* μ*, заданного на образующих* $\mu : x \mapsto 1 + x$.

Идеалы $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}^k$ *представляют из себя линейную комбинацию многочленов, каждый из которых разлагается в произведение* k *и более многочленов из* $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$*. Следовательно факторы* $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}^k/\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}^{k+1}$ *суть линейная комбинация многочленов, каждый из которых можно разложить в произведение* k *множителей, но нельзя разложить в произведение* $k+1$ *множителя.*

5.3 Проблема размерных подгрупп.

Больше информации можно найти в [3, п. 1.6, 3.2].

Определение 5.4. ***Фильтрованной алгеброй*** *A_* будем называть ассоциативную алгебру A с заданной на ней фильтрацией идеалами: $\dots \subset A_2 \subset A_1 \subset A$, такой что $\forall i, j : A_i A_j \subset A_{i+j}$.*

Алгебру ассоциированную с фильтрованной алгеброй A_* в общем случае будем обозначать $\mathrm{gr}(A_*) = \oplus_{n\geqslant 1} A_n/A_{n+1}$. Так, примером является $\mathrm{gr}(KG)$.

Теорема 5.5 ([8, Lazard, Th. 3.1], [3, Th. 1.36])**.** *Пусть $A_* = \{A_i\}_i$ – фильтрованная алгебра. Тогда $A_*^\times = A^\times \cap (1 + A_*)$ – центральная фильтрация на $A_1^\times \subseteq A^\times$. И отображение $x \mapsto x - 1$ индуцирует вложение градуированных алгебр Ли: $\mathrm{gr}(A_*^\times) \hookrightarrow \mathrm{gr}(A_*)$*

Следствие 5.6. *Для любого гомоморфизма $\alpha : G \to A^\times$ существует пуллбэк фильтрации на $A^\times$ определенной в предыдущей теореме до центральной фильтрации $\alpha^{-1}(1 + A_*)$ на $G_1 = \alpha^{-1}(1 + A_1)$.*

Пример 6. *Рассмотрим вложение G в KG фильтрованную аугментационным идеалом. Тогда пуллбэк дает следующую фильтрацию:*

$$D_*^K(G) = G \cap (1 + \overline{KG}^*)$$

называемую ***размерным рядом*** *(dimension series).*

Вопрос совпадения фильтраций $D_*^{\mathbb{Z}}(G)$ и $\gamma_*(G)$ называется **проблемой размерностых подгрупп**. Таким образом к данному моменту мы уже знаем, что $D_*^{\mathbb{Z}}(G) \cong \gamma_*(G)$ для свободной группы G и $D_*^{\mathbb{Z}_p}(G) \cong \gamma_*^{[p]}(G)$ для любых групп.

6 Основной результат

Определение 6.1. *Если X – непустое множество, то свободной p-ограниченной алгеброй Ли $FL^{[p]}(X)$ называется такая p-алгебра Ли, порожденная множеством X, что любое отображение $\phi : X \to G$, где G – p-алгебра Ли, продолжается до p-гомоморфизма $\hat{\phi} : FL^{[p]}(X) \to G$.*

Больше доказательство существования свободной p-алгебры Ли явным построением можно найти в [18], нам же она необходима для построения p-граф алгебры Ли, играющей такую же роль для p-нижнего центрального ряда прямоугольных групп Кокстера, как и граф алгебра Ли, для нижнего центрального ряда групп Артина или свободная алгебра Ли для нижнего центрального ряда свободной группы.

Определение 6.2. *Пусть дан граф $\mathcal{K}$ на множестве вершин $\mathcal{K}^0$. Тогда p-граф алгеброй Ли будем называть:*

$$L_{\mathcal{K}}^{[p]} = FL_{\mathbb{Z}_p}^{[p]}(\mathcal{K}^0)/\langle [v_i, v_j] = 0, \{i,j\} \in \mathcal{K}; \quad v_i^{[p]} = 0\rangle$$

Утверждение 15. *Тождественное отображение $id : \mathcal{K}^0 \to \mathcal{K}^0$ продолжается до эпиморфизма p-алгебр Ли $e_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}^{[2]} : L_{\mathcal{K}}^{[2]} \to \mathrm{gr}^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$.*

Доказательство. По построению $\gamma^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$: $g \in \gamma_n^{[2]}$, то $g^2 \in \gamma_{2n}^{[2]} \subset \gamma_{n+1}^{[2]}$, следовательно $\mathrm{gr}^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ – 2-ограниченная алгебра Ли над $\mathbb{Z}_2$. Как 2-алгебра Ли, она порождается элементами $\gamma_1^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})/\gamma_2^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$. Таким образом, гомоморфизм из свободной p-алгебры Ли существует и единственен согласно существованию и единственности универсального объекта.

Далее, в $\mathrm{gr}^{[2]}(\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ верно, что $[v_i, v_j] = 0$, для $\{i,j\} \in \mathcal{K}^0$ и $v_i^{[2]} = \overline{v_i^2} = 0$. □

См. [6, стр. 212-213] или приложение 3 по поводу универсальной обертывающей p-алгебры Ли. Для p-алгебры Ли $L^{[p]}$ ее универсальной обертывающей является $\overline{U}(L^{[p]})$ – фактор универсальной обертывающей $U(L^{[p]})$ как обычной алгебры Ли по идеалу $\mathcal{B}$ порожденному элементами вида $a^p - a^{[p]}$.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 6.1. *Имеет место изоморфизм алгебр Ли*

$$\mathrm{gr}^{[2]}\,\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \cong L^{[2]}_{\mathcal{K}}$$

Вспоминая мотивацию к поставленной задаче изучения нижнего центрального ряда, тот факт что $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = \pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}})$ и что для $\mathbf{k}$ – поля

$$H_*(\Omega(\mathbb{C}P)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \cong \frac{T\langle u_1,...,u_m\rangle}{(u_i^2=0, u_iu_j+u_ju_i=0, \Leftrightarrow \{i,j\}\in\mathcal{K})}$$

на уровне универсальных обертывающих можно сформулировать следующее

Следствие 6.2. *Имеет место изоморфизм ассоциативных алгебр*

$$\overline{U}(\mathrm{gr}^{[2]}\,\pi_1((\mathbb{R}P^\infty)^{\mathcal{K}})) = H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbb{Z}_2)$$

Теорема 6.1 следует из утверждения 13, теоремы 5.3 и цепочки $\overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \cong$ $\cong \mathrm{gr}(\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})$ которая будет доказана ниже.

Утверждение 16. $\overline{U}(FL^{[p]}(\mathcal{K}_0)) = \mathbb{T}(\mathcal{K}^0)$

Доказательство. По определению, функтор универсальной обертывающей $\overline{U}$ из категории p-ограниченных алгебр Ли (p-RestrLie) в категорию ассоциативных алгебр (AssAlg) является левым сопряженным к Forget : AssAlg → p-RestrLie – забывающему функтору. С другой стороны, $FL^{[p]}$: Set → p-RestrLie является левым сопряженным к Forget : p-RestrLie → Set композиция $\overline{U}\circ FL^{[p]}$: Set → AssAlg является левым сопряженным функтором к Forget : AssAlg → Set, то есть $\overline{U}$ естественно изоморфно функтору $\mathbb{T}$ построения тензорной алгебры. □

Теорема 6.3. *Пусть граф* $\mathcal{K}$ *задан на множестве вершин* $[m]$, *а образующие* $L^{[2]}_{\mathcal{K}}$ – $\{v_i\}_{i=0}^m$. *Тогда*

$$\overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(a_0,...,a_m)/(a_i^2=0,\forall i;\quad a_ia_j+a_ja_i=0\Leftrightarrow\{i,j\}\in\mathcal{K})$$

Доказательство. Будем обозначать $\overline{a}=a_0,...,a_m$ и $\overline{\phi(v)}=\phi(v_0),\dots,\phi(v_1)$, обозначим также

$$\mathcal{U} = \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\overline{a})/(a_i^2=0,\forall i;\quad a_ia_j+a_ja_i=0\Leftrightarrow\{i,j\}\in\mathcal{K}).$$

Зафиксируем гомоморфизм алгебр Ли $i: L^{[2]}_{\mathcal{K}}\to\mathcal{U}$ заданный на образующих $i: v_i\mapsto a_i$. Действительно, так как $\phi([v_i,v_j]) = [a_i,a_j] = 0 \Leftrightarrow \{i,j\}\in\mathcal{K}^1$ и $\phi(v_i^2)=a_i^2=0$, то гомоморфизм определен корректно.

Для произвольной ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\phi: L^{[2]}_{\mathcal{K}}\to A$ определим отображение $f:\mathcal{U}\to A$, заданное как $P(\overline{a})\mapsto P(\overline{\phi(v)})$ на $P\in\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\overline{a})$. Таким образом заданное отображение единственно.

Покажем, что данное отображение корректно определено. Обратное означало бы, что $\exists P,Q\in\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\overline{a})$, такие что $P(\overline{a})=Q(\overline{a})$, но $P(\phi(v_1),\dots,\phi(v_1))\neq Q(\phi(v_1),\dots,\phi(v_1))$. Обозначим $D=P-Q$. Тогда $D(\overline{a})=0$ в $\mathcal{U}$, то есть

$$D(\overline{a}) = \sum L_k(\overline{a})\rho_k(\overline{a})R_k(\overline{a}),$$

где $\rho_k\in\{a_i^2=0,\forall i;\quad a_ia_j+a_ja_i=0\Leftrightarrow\{i,j\}\in\mathcal{K}\}$. Но тогда $\phi(\rho_k(\overline{a}))=\rho_k(\overline{\phi(v_k)})=0$, откуда $\phi(D(\overline{a}))=0$ – противоречие.

Покажем, что f – гомоморфизм. Пусть $z=P(\overline{a})$, $w=Q(\overline{a})$, где $P,Q\in\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(\overline{a})$. Тогда

$$f(z+w) = (P+Q)(\overline{\phi(v)}) = P(\phi(v))+Q(\phi(v)) = f(z)+f(w),$$

$$f(zw) = (PQ)(\overline{\phi(v)}) = P(\phi(v))Q(\phi(v)) = f(z)f(w)$$

□

Теорема 6.4. *Рассмотрим две алгебры*

$$\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \cong \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(v_1,\dots,v_m)/(v_i^2-1=0,\forall i;\quad v_iv_j+v_jv_i=0\Leftrightarrow\{i,j\}\in\mathcal{K})$$

и

$$\overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(a_1,\dots,a_m)/(a_i^2=0,\forall i;\quad a_ia_j+a_ja_i=0\Leftrightarrow\{i,j\}\in\mathcal{K}).$$

На которых заданы аугментации:

1. $\varepsilon : \mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \to \mathbb{Z}_2$ *задан как* $\varepsilon : v_i \mapsto 1$

2. $\tilde{\varepsilon} : \overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}}) \to \mathbb{Z}_2$ *задан как* $\tilde{\varepsilon} : a_i \mapsto 0$

Тогда отображение $\tilde{\mu} : v_i \mapsto a_i + 1$ *задает изоморфизмы* $\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \simeq \overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}})$ *и* $\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \operatorname{Ker}\tilde{\varepsilon}$.

Доказательство. Действительно, построенное отображение соответствует обратимой замене переменной $a_i = v_i - 1$ задающей изоморфизм $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(a_1, \dots, a_m) \simeq \mathbb{T}_{\mathbb{Z}_2}(v_1, \dots, v_m)$. Совпадение идеалов

$$(v_i^2 - 1 = 0, \forall i; \quad v_iv_j + v_jv_i = 0 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}) =$$
$$= (a_i^2 = 0, \forall i; \quad a_ia_j + a_ja_i = 0 \Leftrightarrow \{i,j\} \in \mathcal{K}) \quad (1)$$

следует из прямого равенства соответствующих порождающих идеала:

$$v_i^2 - 1 = (a_i + 1)^2 - 1 = a_i^2$$

$$v_iv_j + v_jv_i = (a_i + 1)(a_j + 1) + (a_j + 1)(a_i + 1) = a_ia_j + a_ja_i.$$

Второе ($\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \operatorname{Ker}\tilde{\varepsilon}$) следует из того что при отображении $\tilde{\mu}$ все коэффициенты перед мономами суммируются в свободном члене. □

Следствие 6.5. $\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} \cong \mathrm{gr}(\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}})\big(= \bigoplus(\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^i/(\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}})^{i+1}\big)$

Доказательство. Алгебра $\overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}})$ имеет естественную $\mathbb{Z}$-градуировку в которой $deg(a_i) = 1$. Обозначим тогда $\overline{U}(L^{[2]}_{\mathcal{K}}) = \oplus_{i \geqslant 0} A_i$.

Тогда $\overline{\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}} = \operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Ker}\overline{\varepsilon} = \oplus_{i \geqslant 1} A_i$, откуда $\mathrm{gr}\,\mathbb{Z}_2\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} = \oplus_{i \geqslant 0} A_i$. □

Приложение 1. Фундаментальные коммутаторы

В работах Пренера [11] и Валдингера [16] подробно изучен вопрос построения базиса присоединенной алгебры Ли для групп вида:

$$G = Q_1 * \cdots * Q_m,$$

где $Q_i = \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ – произведение конечного числа циклических групп порядка 2. Отметим, что все эти группы являются прямоугольными группами Кокстера. Соответствующий комплекс $\mathcal{K} = \coprod_{i=1}^{m} \Delta_i$ имеет вид дизъюнктного объединения симплексов Δ_i. Действительно, если Δ_i задан на множестве вершин $\{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$

$$Q_i = F(v_{i_1}, ..., v_{i_k})/\{v_{i_l} v_{i_m} v_{i_l} v_{i_m} = 1, \quad 1 \leqslant l, m \leqslant k\}$$

Напомним для начала классический результат для свободной группы $F(v_1, ..., v_n)$ [19, 21]:

Определение 6.3. ***Базисными коммутаторами размерности*** *1 назовем все свободные порождающие $v_1, ..., v_n$ с введенным порядком:*

$$v_1 < v_2 < \cdots < v_n.$$

Размерность *базисного коммутатора c будем обозначать $D(c)$, таким образом $D(v_i) = 1$. Определив и упорядочив базисные коммутаторы размерности меньше k определим* ***базисные коммутаторы размерности*** *k как $c_m = (c_i, c_j)$ где c_i и c_j – базисные коммутаторы, такие, что:*

(i) $D(c_i) + D(c_j) = n$,

(ii) $c_i > c_j$,

(iii) если $c_i = (c_s, c_t)$, тогда $c_j \geqslant c_t$.

Пусть $c_{m_1} = (c_{i_1}, c_{j_1})$, $c_{m_2} = (c_{i_2}, c_{j_2})$ – два коммутатора одной размерности. Тогда $c_{m_1} > c_{m_2}$, если $c_{i_1} > c_{i_2}$ или $c_{i_1} = c_{i_2}$, но $c_{j_1} > c_{j_2}$. Базисный коммутатор размерности n больше чем любой базисный коммутатор меньшей размерности.

Теорема 6.6. *Базисные коммутаторы размерности n являются базисом фактор-группы $\gamma_n(F)/\gamma_{n+1}(F)$.*

Далее приведем результаты рассмотренных работ:

Определение 6.4. *Элемент c назовем* ***G-простым базисным коммутатором****, если он удовлетворяет четырем условиям:*

(i) c либо является образующей v_i, либо является вложенным коммутатором $c = (\ldots(v_{j_1}, v_{j_2}), \ldots, v_{j_\omega})$ таким что

$$v_{j_1} > v_{j_2} \quad \text{и} \quad v_{j_2} \leqslant v_{j_3} \leqslant \cdots \leqslant v_{j_\omega}.$$

(ii) Если $D(c) > 1$, то $(v_{j_1}, v_{j_2}) \neq 1$ в G.

(iii) Любая образующая v_i возникает в записи $c = (\ldots(c_{j_1}, c_{j_2}), \ldots, c_{j_\omega})$ не более одного раза.

(iv) Если $D(c) > 1$ и $(c_{j_1}, c_{j_\tau}) = 1$ в G для $1 < \tau \leqslant \omega$, тогда $c_{j_1} \geqslant c_{j_\tau}$.

Утверждение 17. *G-простые коммутаторы размерности больше 1 – свободные образующие $\gamma_2(G)$.*

Замечание 6.7. *Заметим что в работах Панова и Веревкина [22, теорема 4.5] данный результат установлен в большей общности, для любых групп прямоугольных групп Кокстера.*

Определение 6.5. ***Существенными коммутаторами*** *назовем:*

i) Все G-простые коммутаторы размерности больше 1.

ii) Базисные коммутаторы $c = (c_L, c_R)$, такие что c_L, c_R – существенные.

Определение 6.6. ***Фундаментальные коммутаторы*** *размерности 2 – это все существенные коммутаторы размерности 2. Определив все фундаментальные коммутаторы размерности ниже k, определим фундаментальные коммутаторы размерности $k + 1$ как:*

i) Существенные коммутаторы размерности $k + 1$.

ii) Квадраты фундаментальных коммутаторов размерности k.

Теорема 6.8 ([11, теорема 4.39]). *Образы фундаментальных коммутаторов размерности n образуют базис фактор группы $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$.*

Пример 7. *Рассмотрим графы на трех вершинах $\{v_1, v_2, v_3\}$: $\mathcal{K}_1$ без ребер и $\mathcal{K}_2$ с множеством ребер $\{v_1v_2\}$.*

G-простые коммутаторы для $\mathcal{K}_1$:
Размерности 1: $1, \quad 2, \quad 3$
Размерности 2: $[2,1], \quad [3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[2,1],3], \quad [[3,1],2]$

G-простые коммутаторы для $\mathcal{K}_2$:
Размерности 1: $1, \quad 2, \quad 3$
Размерности 2: $[3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[3,1],2]$

Существенные коммутаторы для K_1:
Размерности 2: $[2,1], \quad [3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[2,1],3], \quad [[3,1],2]$
Размерности 4: $[[3,1],[2,1]], \quad [[3,2],[2,1]], \quad [[3,2],[3,1]]$
Размерности 5: $[[[2,1],3],[2,1]], \quad [[[2,1],3],[3,1]], \quad [[[2,1],3],[3,2]], \quad [[[3,1],2],[2,1]],$ $[[[3,1],2],[3,1]], \quad [[[3,1],2],[3,2]]$

Существенные коммутаторы для K_2:
Размерности 2: $[3,1], \quad [3,2]$
Размерности 3: $[[3,1],2]$
Размерности 4: $[[3,2],[3,1]]$
Размерности 5: $[[[3,1],2],[3,1]], \quad [[[3,1],2],[3,2]]$

Таким образом:
$\dim L^2_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 3$, $\dim L^3_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 5$, $\dim L^4_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 8$, $\dim L^5_{\gamma(\mathcal{K}_1)} = 14$ *и*
$\dim L^2_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 2$, $\dim L^3_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 3$, $\dim L^4_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 5$, $\dim L^5_{\gamma(\mathcal{K}_2)} = 7$.

Для вычислений предложенный алгоритм был реализован на языке python. Таким образом в некотором виде, вычисление базиса для групп указанного вида возможно. Однако остается открытым вопрос связи построенного базиса, с базисом состоящим из простых вложенных коммутаторов.

Приложение 2. Доказательства

Доказательство теоремы 3.4. Первое утверждение следует того что $x \in \gamma^i \subset D^i$ и определения фильтрации D.

Докажем следующие два пункта индукцией по длине коммутатора. База индукции:

$$\mu((v_i, v_j)) = \mu(v_iv_jv_iv_j) = (1+v_i)(1+v_j)(1+v_i)(1+v_j) = \\ = 1 + v_iv_j + v_jv_i + v_jv_iv_j + v_iv_jv_i + v_iv_jv_iv_j$$

Откуда $\mu((v_i, v_j))^2 = v_iv_j + v_jv_i = [v_i, v_j]$ и $\mu((v_i, v_j))^3 = v_jv_iv_j + v_iv_jv_i$ – имеют симметричную запись.

Далее, пусть по предположению индукции и пользуясь п.1

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})) = 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}},k+2},$$

где $u^{k+1} \in U^{\infty,k+1}_{RC_{\mathcal{K}}}$ имеет симметричную запись. Из симметричности записи следует что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1}) = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{RC_{\mathcal{K}},k+2}$, то есть

$$\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1})^i = \mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}))^i,$$

для $i \subset \{k, k+1\}$. Далее прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}})) &= \mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k})^{-1} v_{i_{k+1}}^{-1} (v_{i_1}, ..., v_{i_k}) v_{i_{k+1}}) = \\
&= (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+2})(1 + v_{i_{k+1}}) \circ \\
&\circ (1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+2})(1 + v_{i_{k+1}}) = \\
&= 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} [v_{i_1}, ..., v_{i_k}] + u^{k+1} v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+2} = \\
&= 1 + [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}] + u^{k+1} v_{i_{k+1}} + v_{i_{k+1}} u^{k+1} + U^{\infty}_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+2}
\end{aligned}$$

получаем что $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+1} = [v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}]$ и $\mu((v_{i_1}, ..., v_{i_k}, v_{i_{k+1}}))^{k+2}$ – симметричные выражения. □

Для доказательство теоремы 3.6 докажем предварительно

Утверждение 18. *Пусть $x \in \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$, причем $\mu(x) \in 1 + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k}$. Тогда $\mu(x)^k = \mu(x^{-1})^k$.*

Доказательство. Пусть $\mu(x) = 1 + u_k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}$ и $\mu(x^{-1}) = 1 + u'_1 + \cdots + u'_k + + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mu(xx^{-1}) &= (1 + u_k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1})(1 + u'_1 + \cdots + u'_k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}) = \\
&= 1 + u'_1 + \cdots + u'_k + u_k + u_k(u'_1 + \cdots + u'_k) + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}) = \\
&= 1 + u'_1 + \cdots + u'_k + u_k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}) = 0
\end{aligned}$$

Откуда $\mu(xx^{-1})^1 = u'_1 = 0$, $\mu(xx^{-1})^2 = u'_2 = 0$, $\ldots$, $\mu(xx^{-1})^{k-1} = u'_{k-1} = 0$ и $\mu(xx^{-1})^k = u'_k + u_k = 0$, откуда $u'_k = u_k$. □

Доказательство теоремы 3.6 . Корректность отображения как гомоморфизма алгебр следует из определения μ и п.3 теоремы 3.4. Действительно, пусть $a, b \in \gamma_k$ отличаются умножением на элемент из γ_{k+1}, будем считать $a = b \cdot o, \quad o \in \gamma_{k+1}$. Тогда:

$$\mu(a) = \mu(b)\mu(o),$$

откуда

$$1 + \mu(a)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1} = (1 + \mu(b)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1})(1 + \mu(o)^{k+1} + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+2}) = 1 + \mu(b)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1}.$$

Докажем, что отображение является гомоморфизм алгебр Ли, то есть переводит коммутатор в коммутатор. Из линейности определения скобки Ли в присоединенной алгебре Ли следует, что достаточно доказать для двух коммутаторов $a \in \gamma_k$, $b \in \gamma_l$ что:

$$\mu([a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}])^{k+l} = [\mu(a)^k, \mu(b)^l]$$

Будем действовать индукцией по $k + l$. Предположение индукции – что формула верна, для $k + l \leqslant i$. База индукции $i = 1, 2, 3$ следует из корректности отображения на простых вложенных коммутаторах. Докажем шаг индукции. Пусть $a \in \gamma_k$, $b \in \gamma_l$ – вложенные(не обязательно простые) коммутаторы и $k + l = i + 1$. Тогда отображение корректно на a и b, т.е. $\mu(a)^k$ и $\mu(b)^l$ – вложенные коммутаторы в $U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}}$ той же записи что и a и b соответственно. Имеем:

$$[a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}] = (a, b)\gamma_{k+l+1} = a^{-1}b^{-1}ab\gamma_{k+l+1}.$$

откуда с учетом утверждения 18

$$\begin{aligned}
\mu([a\gamma_{k+1}, b\gamma_{l+1}])^{k+l} &= \mu(a^{-1}b^{-1}ab)^{k+l} = (\mu(a^{-1})\mu(b^{-1})\mu(a)\mu(b))^{k+l} = \\
= ((1 + \mu(a)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1})&(1 + \mu(b)^l + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, l+1})(1 + \mu(a)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+1})(1 + \mu(b)^l + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, l+1}))^{k+l} = \\
&= (1 + \mu(a)^k\mu(b)^l + \mu(b)^l\mu(a)^k + U_{\mathrm{RC}_{\mathcal{K}}, k+l+1})^{k+l} = [\mu(a)^k, \mu(b)^l]
\end{aligned}$$

□

Приложение 3. U-алгебра ограниченной алгебры Ли.

В данном разделе представлено изложение основного результата из [7, Jacobson].

Пусть $x_1, x_2, \cdots$ (возможно бесконечное множество) – базис p-алгебры Ли $\mathfrak{L}$, тогда имеются выражения $[x_i x_j] = \sum x_q \gamma_{qij}$, $x_i^{[p]} = \sum x_r \mu_{ri}$ (конечные суммы), где коэффициенты $\gamma_{qij}, \mu_{r,i}$ называются *структурными коэффициентами* и для них имеют место соотношения

$$\gamma_{qij} = -\gamma_{qji}, \quad \sum_q \gamma_{rqk}\gamma_{qij} + \sum_q \gamma_{rqi}\gamma_{qjk} + \sum_q \gamma_{rqj}\gamma_{qki} = 0 \tag{2}$$

$$\sum_r \gamma_{sir}\mu_{rj} = \sum_Q \gamma_{sq_{p-1}i}\gamma_{q_{p-1}q_{p-2}j}\cdots\gamma_{q_1ij} \tag{3}$$

Сформулируем теорему, доказываемую в данном параграфе:

Теорема 6.9 (Restricted PWB [7, Jacobson])**.** *Если $\mathfrak{L}$ – это ограниченная алгебра Ли, то существует ассоциативная алгебра $\mathfrak{U}$ с следующими свойствами:*

1. *$\mathfrak{L}$ изоморфна подалгебре $\{\mathfrak{L}\}$ в $\mathfrak{U}_l$.*

2. *$\mathfrak{U}$ является обертывающей алгеброй $\{\mathfrak{L}\}$.*

3. *Если $\mathfrak{L}$ гомоморфна подалгебре $\overline{\mathfrak{L}}$ в любой $\mathfrak{B}_l$, где $\mathfrak{B}$ – это обертывающая алгебра $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{U}$ гомоморфна $\mathfrak{B}$.*

Пусть $x_1, x_2, \cdots$ (возможно, бесконечное множество) – базис пространства $\mathfrak{L}$ над полем Φ характеристики p. Положим $[x_i x_i] = \sum x_q \gamma_{qii}$ и $x_i^{[p]} = \sum x_r \mu_{ri}$, где γ и μ удовлетворяют 2, 3. Тогда для $a = \sum x_i \alpha_i$, $b = \sum x_i \beta_i$ (конечные суммы) положим $[ab] = \sum x_k \gamma_{ki} \alpha_i \beta_j$. Очевидно, что 2 означает, что $\mathfrak{L}$ является алгеброй Ли относительно $[ab]$. Уравнение 3 эквивалентно

$$\left[x_i x_i^{[p]}\right] = \left[\cdots [x_i \overbrace{x_j] \cdots x_j}\right]$$

Покажем, что при подходящем определении $a^{[p]}$ $\mathfrak{L}$ – это ограниченная алгебра Ли.

Пусть $\mathfrak{A}$ – векторное пространство с базисом $x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n}$, где $\kappa_i \geqq 0$ – целые числа и хотя бы одно $\kappa_i > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, то есть $\mathfrak{A}$ – не коммутативные многочлены от x_i над Φ с соотношениями $x_i x_j - x_j x_i - \sum x_q \gamma_{qii} = 0$. Другими словами, $\mathfrak{A}$ – универсальная обертывающая $\mathfrak{L}$ как алгебры Ли (забывая об ограниченной структуре). Для любого конечного набора мономов подалгебра $\mathfrak{A}$ натянутая на эти мономы имеет конечный базис $\{x_{i_\alpha}\}_{\alpha=1}^k \subset \{x_i\}_{i=1}^\infty$. Произведение

$$(x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\boldsymbol{\kappa}_n}) \left(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}\right)$$

определяется повторяющимися "выправлениями", т.е. подстановками для $x_i x_j$, при $i > j$, выражения $x_j x_i + \sum x_k \gamma_{kij}$. Биркгоффом и Виттом было показано, что это произведение единственным образом определено в $\mathfrak{A}$ и является ассоциативным.

Пусть $\mathfrak{B}$ – идеал в $\mathfrak{A}$, имеющий базис $y_i = x_i^p - x_i^{[p]}$. Так как

$$[b x_i^p] = [\cdots [b x_i]\, x_i] \cdots x_i] = \left[b x_i^{[p]}\right],$$

то y_i коммутирует с любым линейным b и, следовательно, с любым элементом $\mathfrak{A}$.

Если терм $x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n}$ имеет степень $\geqq p$ в x_i, мы можем заменить x_i^p на $y_i + x_i^{[p]}$ и воспользоваться $x_i^{[p]} = \sum x_r \mu_{ri}$. После конечного числа таких подстановок мы можем записать любой $a = \sum x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n} \cdot \rho_{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ в форме $\sum x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} u_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$, где $\lambda_i < p$, а u – полиномы от $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Таким образом, любой $b = \sum a_i y_i + \sum y_i \alpha_i$ в $\mathfrak{B}$ имеет форму $\sum x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \cdot v_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, где v – полином от $y_1, y_2, \cdots, y_n$ с нулевым свободным членом.

Теперь

$$\begin{aligned} x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} y_1^{m_1} \cdots y_n^{m_n} &= x_1^{\lambda_1}(x_1^p - x_1^{[p]})^{m_1} \cdots x_n^{\lambda_n}(x_n^p - x_n^{[p]})^{m_n} \\ &= x_1^{\lambda_1 + pm_1} \cdots x_n^{\lambda_n + pm_n} + \cdots \end{aligned}.$$

Здесь не указанные слагаемые имеют степень $< \sum\lambda_i + p\sum m_i$. Рассмотрим слагаемые максимальной степени $N = \sum\lambda_i + p\sum m_i$ в b, где мы предполагаем, что $b \neq 0$, а следовательно, одно из v не равно 0. Поскольку хотя бы одно $m > 0$, то $N > p$. Два слагаемых максимальной степени различаются, если $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n; m_1, \cdots, m_n) \neq (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n; m'_1, \cdots, m'_n)$. Таким образом, эти слагаемые встречаются только один раз и не могут уничтожиться. Из этого следует, что при записи b в нормальной форме $\sum x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n}\rho_{\kappa_1\ldots\kappa_n}$, хотя бы одно из x имеет степень $> p$. Таким образом, классы $\{x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}\}$, $\lambda_i < p$, за исключением $\{x_1^0 \cdots x_n^0\}$, определяемые элементами $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}$ по модулю $\mathfrak{B}$, образуют базис для разностной алгебры $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$.

Поскольку классы $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots$ линейно независимы, и $[\{x_i\}\{x_j\}] = \sum\{x_q\}\gamma_{qij}$, отображение $\sum x_i\alpha_i \to \sum\{x_i\}\alpha_i$ является изоморфизмом между $\mathfrak{L}$ и обычной подалгеброй Ли $\{\mathfrak{L}\}$ в $\mathfrak{U}_l$. Поскольку $\{x_i\}^p = \{x_i^p\} = \{x_i^{[p]}\} = \sum\{x_r\}\mu_{ri}$, то $\{\mathfrak{L}\}$ является (ограниченной) подалгеброй $\mathfrak{U}_l$. Следовательно, если мы определим $(\sum x_i\alpha_i)^{[p]}$ как элемент, соответствующий $\{\sum x_i\alpha_i\}^p$, то $\mathfrak{L}$ становится ограниченной алгеброй Ли, в которой $x_i^{[p]}$ определяется исходным образом.

Если $\mathfrak{L}$ изначально является ограниченной алгеброй Ли, то следующее отображение является изоморфизмом: $\sum x_i\alpha_i \to \{\sum x_i\alpha_i\}$.

Теперь предположим, что $\sum x_i\alpha_i \to \sum \tilde{x}_i\alpha_i$ является гомоморфизмом между $\mathfrak{L}$ и $\overline{\mathfrak{L}}$, подалгеброй $\mathfrak{V}_l$, где мы предполагаем, что любой элемент $\mathfrak{V}$ является многочленом в элементах $\overline{\mathfrak{L}}$. Мы имеем

$$\bar{x}_i\bar{x}_j = \bar{x}_j\bar{x}_i + \sum \bar{x}_q\gamma_{qij}, \quad \bar{x}_i^p = \sum \bar{x}_r\mu_{ri}.$$

Первый набор уравнений подразумевает, что

$$\sum x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n}\rho_{\kappa_1}\ldots\rho_{\kappa_n} \to \sum \overline{x}_1^{\kappa_1} \cdots \overline{x}_n^{\kappa_n}\rho_{\kappa_1\cdots\kappa_n}$$

является гомоморфизмом между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{V}$. Из-за второго набора уравнений $x_i^p - x_i^{[p]}$ отображаются в 0, и поэтому наше соответствие индуцирует гомоморфизм между $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{V}$. Это отображение является продолжением гомоморфизма между $\mathfrak{L}$ и $\overline{\mathfrak{L}}$.

Список литературы

[1] T. D. Cochran и S. L. Harvey. “Homology and derived series of groups”. В: *Geometry & Topology* 9.4 (2005), с. 2159—2191.

[2] T. D. Cochran и S. L. Harvey. “Homology and derived series of groups II: Dwyer’s theorem”. В: *Geometry & Topology* 12.1 (2008), с. 199—232.

[3] J. Darné. “On the stable Andreadakis problem”. В: *Journal of Pure and Applied Algebra* 223.12 (2019), с. 5484—5525. ISSN: 0022-4049. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2019.04.010. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002240491930101X.

[4] G. Duchamp и D. Krob. “The free partially commutative Lie algebra: bases and ranks”. В: *Advances in Mathematics* 95.1 (1992), с. 92—126.

[5] G. Duchamp и D. Krob. “The lower central series of the free partially commutative group”. В: *Semigroup Forum*. Т. 45. 1. Springer. 1992, с. 385—394.

[6] N. Jacobson. *Lie Algebras (russian translate)*. Издательство "МИР". МИР, 1964. ISBN: 9780486136790. URL: https://books.google.ru/books?id=jTSoAAAAQBAJ.

[7] N. Jacobson. “Restricted Lie algebras of characteristic p”. В: *Transactions of the American Mathematical Society* 50.1 (1941), с. 15—25.

[8] M. Lazard. “Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie”. В: *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*. Т. 71. 2. 1954, с. 101—190.

[9] G. Massuyeau. “Finite-type invariants of 3-manifolds and the dimension subgroup problem”. В: *Journal of the London Mathematical Society* 75.3 (2007), с. 791—811. DOI: https://doi.org/10.1112/jlms/jdm034.

[10] I. Passi. *Group Rings and Their Augmentation Ideals*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 9783540352976. URL: https://books.google.ru/books?id=glt7CwAAQBAJ.

[11] R. Prener. “The lower central series of special groups generated by elements of order two”. Дис. ... док. Polytechnic Institute of Brooklyn, 1969.

[12] D. G. Quillen. “On the associated graded ring of a group ring”. В: *Journal of Algebra* 10.4 (1968), с. 411—418.

[13] J. Stallings. “Homology and central series of groups”. В: *Journal of Algebra* 2.2 (1965), с. 170—181. ISSN: 0021-8693. DOI: https://doi.org/10.1016/0021-8693(65)90017-7.

[14] A. I. Suciu. “Lower central series and split extensions”. В: *arXiv preprint arXiv:2105.14129* (2021).

[15] R. D. Wade. “The lower central series of a right-angled Artin group”. В: *L’Enseignement Mathématique* 61.3 (2016), с. 343—371.

[16] H. V. Waldinger. “The lower central series of groups of a special class”. В: *Journal of Algebra* 14.2 (1970), с. 229—244.

[17] H. Zassenhaus. “Ein Verfahren, jeder endlichenp-Gruppe einen Lie-Ring mit der Charakteristikp zuzuordnen.” В: *Abh.Math.Semin.Univ.Hambg.* 13 (1939), с. 200—2007. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02940757.

[18] Ю. Бахтурин. *Тождества в алгебрах Ли*. "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1985. URL: https://books.google.ru/books?id=iCk%5C_zgEACAAJ.

[19] Н. Бурбаки. *Группы и алгебры Ли*. Мир, 1972.

[20] Я. А. Верёвкин. “Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера”. В: *Труды Математического института имени ВА Стеклова* 305.0 (2019), с. 61—70.

[21] В. Магнус, А. Каррас и Д. Солитэр. *Комбинаторная теория групп: Представление групп в терминах образующих и соотношений*. Наука, 1974.

[22] Т. Е. Панов и Я. А. Верёвкин. “Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера”. В: *Математический сборник* 207.11 (2016), с. 105—126.