Московский государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая Работа

О вычислении характеристических чисел Чженя для $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{C}^4\right)$ с подправленной стабильно комплексной структурой

Выполнил студент группы М1:
Родюшкин Алексей Игоревич
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

Москва
2023

1. Введение

В настоящей работе приводятся вычисления характеристических чисел Чженя для грассманиана $\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{C}^4\right)$ с подправленной стабильно комплексной структурой который, в свою очередь, является SU-многообразием и может быть взят в качестве представителя маломерной образующей $-y_4$ нетривиальной градуированной компоненты Ω_8^{SU}кольца Ω^{SU}.

2. Комплексные бордизмы

В этом разделе мы приведем необходимые определения и констркции для обсуждения теории комплексных (ко-)бордизмов так как в дальнейшем она понадобится нам для описания структуры кольца SU-бордизмов.

Обозначим через η_n универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное векторное расслоение над бесконечномерным грассманианом $BU(n)$. Пусть ζ – вещественное $2n$-мерное векторное расслоение над клеточным пространством (CW-комплексом) X. Комплексную структуру на ζ можно определить одним из следующих эквивалентных способов:

1. как класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений $\zeta \to \xi$, где ξ – комплексное n-мерное расслоение над пространством X; два таких изоморфизма считаются эквивалентными, если один получается из другого с помощью композиции с изоморфизмом комплексных расслоений;

2. как гомотопический класс отображений вещественных $2n$-мерных векторных расслоений $\zeta \to \eta_n$, являющихся изоморфизмами на каждом слое;

3. как гомотопический класс поднятий отображения $X \to BO(2n)$, классифицирующего расслоение ζ, до отображения $X \to BU(n)$.

Все многообразия далее подразумеваются гладкими, компактными и без края (если не оговорено противное). Стабильно комплексная структура (иначе говоря, унитарная структура, или U-структура) на многообразии M (возможно, с краем) – это класс эквивалентности комплексных структур на стабильном касательном расслоении многообразия M, т.е. класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений

$$c_{\mathscr{T}} : \mathscr{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \xrightarrow{\cong} \xi$$

где ξ – комплексное векторное расслоение и $\underline{\mathbb{R}}^k$ обозначает тривиальное вещественное k-мерное расслоение на M.

Стабильно комплексное многообразие или *U-мнооообразие* – это пара $(M, c_{\mathscr{T}})$, состоящая из многообразия и стабильно комплексной структуры на нем.

Приведём два эквивалентных подхода к определению теории комплексных (ко-)бордизмов: геометрический и гомотопический.

Конструкция 1 (геометрические U-бордизмы)**.** Говорят, что стабильно комплексное многообразие M *ограничивает* (или *бордантно нулю*), если существует такое стабильно комплексное многообразие с краем W, что $\partial W = M$, причем стабильно комплексная структура на многообразии M совпадает с индуцированной на крае многообразия W. Индуцированная стабильно комплексная структура на ∂W определяется с помощью изоморфизма $\mathscr{T}W|_{\partial W} \cong \mathscr{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Этот изоморфизм зависит от того, рассматриваем мы внутреннюю или внешнюю нормаль к подмногообразию M в W в качестве базиса для $\underline{\mathbb{R}}$, и от того, ставим мы эту нормаль в начало или конец касательного репера к M. Мы будем использовать выбор, при котором внешняя нормаль ставится в конец репера. Тогда, используя стабильно комплексную структуру на многообразии W, с помощью изоморфизма

$$\mathscr{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \cong \mathscr{T}W|_{\partial W} \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k} \cong \xi$$

мы получаем стабильно комплексную структуру на крае $M = \partial W$.

При замене внешней нормали на внутреннюю получается другая, вообще говоря, не эквивалентная стабильно комплексная структура. Если $c_{\mathscr{T}} : \mathscr{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \xrightarrow{\cong} \xi$ – стабильно комплексная структура на M, то несложно видеть, что стабильно комплексная структура, получающаяся с помощью внутренней нормали, эквивалентна следующей:

$$\mathscr{T}M \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \oplus \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{c_{\mathscr{T}} \oplus \tau} \xi \oplus \underline{\mathbb{C}}$$

где $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – комплексное сопряжение. Обозначим эту структуру $-c_{\mathscr{T}}$.

Для топологической пары (X, A) и неотрицательного целого n рассмотрим пары (M, f), где M - компактное n-мерное стабильно комплексное многообразие с краем, $f : (M, \partial M) \to (X, A)$. Такая пара (M, f) *ограничивает*(или *бордантна нулю*), если существует компактное $(n + 1)$-мерное стабильно комплексное многообразие с краем и $F : W \to X$ такие что:

1. M является регулярным подмногообразием в ∂W и U-структура на M совпадает с ограничением U-структуры на ∂W;

2. $F|_M = f$ и $F(\partial W \setminus M) \subset A$.

Пары (M_1, f_1) и (M_2, f_2) называются *бордантными*, если дизъюнктное объединение $(M_1, f_1) \sqcup (-M_2, f_2)$ бордантно нулю. Бордантность является отношением эквивалентности: рефлексивность следует из существования такой стабильно комплексной структуры на цилиндре $M \times I$, что $\partial(M \times I) = M \sqcup (-M)$, а при доказательстве транзитивности используется склеивание многообразий и сглаживание углов. Классы эквивалентности мы далее будем называть *классами бордизмов*.

Геометрические U-бордизмы – это обобщенная теория гомологий, удовлетворяющая всем аксиомам Стинрода–Эйленберга, за исключением аксиомы размерности.

Конструкция 2 (гомотопические U-бордизмы)**.** Обозначим через $MU(n)$ пространство Тома универсального комплексного n-мерного векторного расслоения η_n над $BU(n)$. Спектр Тома $MU = \{Y_i,\ \Sigma Y_i \to Y_{i+1} : i \geqslant 0\}$ состоит из пространств $Y_{2k} = MU(k),\ Y_{2k+1} = \Sigma Y_{2k}$ со следующими структурными отображениями: $\Sigma Y_{2k} \to Y_{2k+1}$ – тождественное, а $\Sigma Y_{2k+1} \to Y_{2k+2}$ – отображение пространств Тома $\Sigma^2 MU(k) = S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$, соответствующее отображению расслоений $\eta_k \oplus \underline{\mathbb{C}} \to \eta_{k+1}$, классифицирующему $\eta_k \oplus \underline{\mathbb{C}}$. MU-спектр определяет обобщенную теорию (ко)гомологий, известную как (гомотопические) *унитарные (ко)бордизмы*. Определим (гомотопические) группы U-(ко)бордизма:

$$U_n(X, A) = \lim_{k\to\infty} \pi_{2k+n}((X/A) \wedge MU(k)),$$

$$U^n(X, A) = \lim_{k\to\infty} [\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)].$$

Группы бордизмов пространства X определяются так: $U_n(X) := U_n(X, \varnothing)$. Мы будем использовать обозначение X_+ для пунктированного пространства $X/\varnothing$, которое представляет собой дизъюнктное объединение пространства X и добавленной отмеченной точки.

Доказательство эквивалентности этих конструкций принадлежит Коннеру и Флойду и является применением идей Рене Тома, использованных для доказательства аналогичного утверждения в неориентируемом случае.

Теорема 2.1. Обобщённые теории гомологий $U'_*(X,A)$ и $U_*(X,A)$ изоморфны для клеточных пар (X,A).

С этого момента будет обозначать обе теории $U_*(X,A)$

Конструкция 3 (Произведение). Для прямого произведения расслоений $\eta_m \times \eta_n$ существуют соответствующие классифицирующее отображение $BU(m)\times BU(n)\to BU(m+n)$ (единственное с точностью до гомотопии) и отображение расслоений $\eta_m\times\eta_n \to \eta_{m+n}$. Последнее индуцирует отображение пространств Тома

$$MU(m)\wedge MU(n)\to MU(n+m)$$

которое ассоциативно и коммутативно с точностью до гомотопии. Эти отображения используются, чтобы определить умножение в комплексных (ко)бордизмах, превращающее их в мультипликативную теорию (ко)гомологий. А именно, существуют каноническое спаривание (*произведение Кронекера*)

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : U^m(X)\otimes U_n(X)\to \Omega^U_{n-m},$$

$\frown$-*произведение*:

$$\frown : U^m(X)\otimes U_n(X)\to U_{n-m}(X)$$

и $\smile$-*произведение* (или просто *произведение*)

$$\smile : U^m(X)\otimes U^n(X)\to U^{m+n}(X)$$

которые определяются следующим образом. Рассмотрим класс кобордизмов $x\in U^m(X)$, представленный отображением $\Sigma^{2l-m}X_+\to MU(l)$, и класс бордизмов $\alpha\in U_n(X)$, представленный отображением $S^{2k+n}\to X_+\wedge MU(k)$. Тогда $\langle x,\alpha\rangle\in\Omega^U_{n-m}$ представляется композицией

$$S^{2k+2l+n-m}\xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha}\Sigma^{2l-m}X_+\wedge MU(k)\xrightarrow{x\wedge\mathrm{id}} MU(l)\wedge MU(k)\to MU(l+k)$$

Если $\Delta : X_+\to (X\times X)_+ = X_+\wedge X_+ -$диагональное отображение, то $x\frown\alpha\in U_{n-m}(X)$ представляется композицией отображений

$$S^{2k+2l+n-m}\xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\alpha}\Sigma^{2l-m}X_+\wedge MU(k)\xrightarrow{\Sigma^{2l-m}\Delta\wedge\mathrm{id}} X_+\wedge\Sigma^{2l-m}X_+\wedge MU(k)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{id}\wedge x\wedge\mathrm{id}} X_+\wedge MU(l)\wedge MU(k)\to X_+\wedge MU(l+k)$$

$\smile$-произведение определяется аналогично; оно превращает $U^*(X)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}U^n(X)$ в градуированное коммутативное кольцо, называемое *кольцом комплексных кобордизмов пространства* X. Прямую сумму

$$\Omega_U := U^*(\mathrm{pt}) = \bigoplus_n U^n(\mathrm{pt})$$

часто называют просто *кольцом комплексных кобордизмов*. Оно градуировано неположительными целыми числами. Мы также будем использовать обозначение Ω^U для неотрицательно градуированного кольца $U_*(\mathrm{pt})=\bigoplus\limits_n U_n(\mathrm{pt})-$ кольца комплексных бордизмов, где $U_n(\mathrm{pt})=U^{-n}(\mathrm{pt})$. Каждое кольцо $U^*(X)$ является модулем над Ω_U.

Конструкция 4. Стабильно комплексное n-многообразие M имеет *фундаментальный класс бордизмов* $[M] \in U_n(M)$, который геометрически определяется как класс тождественного отображения $M \to M$. В этом случае определены изоморфизмы *двойственности Пуанкаре-Атья*:

$$D_U : U^k(M) \xrightarrow{\cong} U_{n-k}(M), \quad x \mapsto x \frown [M].$$

Мы имеем

$$H^*(BU(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}\left[c_1,\ldots,c_n\right], \quad \deg c_i = 2i$$

где c_i - универсальные характеристические классы Чженя. Для данного разбиения $\omega = (i_1,\ldots,i_k)$ числа $n = |\omega| = i_1+\cdots+i_k$ на натуральные числа определим моном $c_\omega = c_{i_1}\cdots c_{i_k}$ степени $2|\omega|$ и соответствующий характеристический класс $c_\omega(\xi)$ комплексного n-мерного расслоения ξ. Соответствующее касательное характеристическое число Чженя стабильно касательного многообразия M определяется формулой

$$c_\omega[M] := \left\langle c_\omega(\mathscr{T}M), [M]\right\rangle$$

Для каждого целого $i \geqslant 1$ положим

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Структура кольца Ω^U описывается следующей теоремой Милнора и Новикова.

Теорема 2.2 (Дж. Милнор, С. П. Новиков). **.** (1) Кольцо комплексных бордизмов Ω^U является полиномиальным кольцом над $\mathbb{Z}$ с одной образующей в каждой положительной четной размерности:

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}\left[a_i : i \geqslant 1\right], \quad \deg a_i = 2i.$$

(2) Класс бордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной полиномиальной образующей a_i тогда и только тогда, когда

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i.$$

(3) Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них равны все характеристические числа Чженя.

Конструкция 5 (формальная группа геометрических кобордизмов)**.** Рассмотрим клеточное пространство X. Так как $\mathbb{C}P^\infty \simeq MU(1)$, вторая группа когомологий $H^2(X) = [X, \mathbb{C}P^\infty]$ является подмножеством (не подгруппой!) во второй группе кобордизмов $U^2(X)$, т. е. любой элемент $x \in H^2(X)$ определяет класс кобордизмов $u_x \in U^2(X)$. Элементы из $U^2(X)$, получаемые таким образом, называются геометрическими кобордизмами пространства X.

Если $X = X^k$ – многообразие, то каждый класс когомологий $x \in H^2(X)$ двойственен по Пуанкаре к некоторому подмногообразию $M \subset X$ коразмерности 2 с фиксированной комплексной структурой в нормальном расслоении. Более того, если X - стабильно комплексное многообразие, представляющее класс бордизмов $[X] \in \Omega^U_k$, то мы имеем

$$[M] = \varepsilon D_U\left(u_x\right) \in \Omega^U_{k-2}$$

где $D_U : U^2(X) \to U_{k-2}(X)$– отображение двойственности Пуанкаре-Атья, а отображение $\varepsilon : U_{k-2}(X) \to \Omega^U_{k-2}$ есть аугментация в бордизмы точки. По определению, εD_U есть кронекеровское произведение с классом $[X]$.

Для двух геометрических кобордизмов $u, v \in U^2(X)$, соответствующих элементам $x, y \in H^2(X)$, обозначим через $u +_H v$ геометрический кобордизм, соответствующий когомологическому классу $x + y$. Тогда в $U^2(X)$ имеем следующее равенство:

$$u +_H v = F_U(u, v) = u + v + \sum_{k \geqslant 1,\ l \geqslant 1} \alpha_{kl}\ u^k v^l$$

где коэффициенты $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$ не зависят от u, v и X. Ряд $F_U(u, v)$ из соотношения выше является (коммутативной одномерной) формальной группой над кольцом комплексных кобордизмов Ω_U. Она была введена С. П. Новиковым и называется *формальной группой геометрических кобордизмов*. Подробности данной конструкции можно найти в [1, приложение E]; .

3. SU-бордизмы и SU-многообразия

Специальной унитарной структурой(*SU-структурой*) на многообразии M называется стабильно комплексная структура $c_{\mathcal{T}}$, вместе с выбором SU-структуры на комплексном векторном расслоении ξ. Эквивалентно, SU-структура - это гомотопический класс поднятия отображения $M \to BU$, классифицирующего ξ, до отображения $M \to BSU$. Стабильно комплексное многообразие $(M, c_{\mathcal{T}})$ допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый (целочисленный) класс Чженя расслоения ξ равен нулю: $c_1(\xi) = 0$. Кроме того, такая SU-структура единственна, если $H^1(M; \mathbb{Z}) = 0$ (это следует, например, из рассмотрения гомотопической последовательности расслоения $BSU \to BU$ со слоем $S^1\big)$ .SU-многообразием называется стабильно комплексное многообразие с фиксированной SU-структурой на нем. Часто, допуская некоторую вольность речи, мы будем называть SU-многообразием стабильно комплексное многообразие M с $c_1(M) = 0$, имея в виду, что такое многообразие допускает некоторую SU-структуру.

Существует обобщенная теория гомологий, получающаяся из многообразий с SU-структурой, известная как SU-бордизмы. Как и в случае U-бордизмов, она может быть определена геометрически или гомотопически.

В геометрическом подходе группа бордизмов $SU_n(X)$ определяется как множество классов бордизмов непрерывных отображений $M \to X$, где M есть n-мерное SU-многообразие. Гомотопический подход основан на понятии MSU спектра. Пусть $\widetilde{\eta}_n$ - универсальное (тавтологическое) комплексное n-мерное расслоение над $BSU(n)$. Пространство Тома расслоения $\widetilde{\eta}_n$ обозначается $MSU(n)$. Спектр Тома

$$MSU = \{Z_i, \Sigma Z_i \to Z_{i+1} : i \geqslant 0\}$$

имеет $Z_{2k} = MSU(k)$ и $Z_{2k+1} = \Sigma Z_{2k}$. Группы *SU-бордизмов* и *кобордизмов* клеточной пары (X, A) определяются формулами

$$SU_n(X, A) = \lim_{k \to \infty} \pi_{2k+n}((X/A) \wedge MSU(k)),$$
$$SU^n(X, A) = \lim_{k \to \infty} \left[\Sigma^{2k-n}(X/A), MSU(k)\right].$$

Таким образом, аналогично случаю U-бордизмов, получаем мультипликативную обобщенную теорию (ко)гомологий.

Кольцо SU-бордизмов определяется как $\Omega^{SU} = SU_*(\mathrm{pt})$.

В отличие от Ω^U, кольцо Ω^{SU} имеет кручение. Первый элемент кручения появляется уже в размерности 1 : из того, что пространство Тома $MSU(k)$ не имеет клеток в размерностях от $2k+1$ до $2k+3$, следует, что $\Omega_1^{SU} = \pi_1^s = \mathbb{Z}_2$. Образующая θ группы Ω_1^{SU} представляется окружностью с нетривиальным оснащением, индуцирующим нетривиальную SU-структуру.

Первым структурным результатом о кольце Ω^{SU} была теорема С. П. Новикова 1962 г., показывающая, что Ω^{SU} становится полиномиальным кольцом после обращения двойки (хотя само Ω^{SU} не является полиномиальным даже по модулю кручения). Напомним, что по теореме 1.5 класс бордизмов $\left[M^{2i}\right] \in \Omega_{2i}^U$ является полиномиальной образующей в Ω^U тогда и только тогда, когда $s_i\left[M^{2i}\right] = \pm m_i$. Более сложные условия делимости на s_i-число позволяют определить и полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$

Теорема 3.1 (С. П. Новиков)**.** $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой четной размерности $\geqslant 4$

$$\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right][y_i : i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i тогда и толъко тогда, когда

$$s_i \left[M^{2i}\right] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностъю до степени двойки.}$$

Заметим, что с точностью до степеней двойки мы имеем

$$m_i m_{i-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq p^k, i \neq p^k - 1 \text{ ни для какого нечетного простого } p, \\ p, & \text{если } i = p^k \text{ или } i = p^k - 1 \text{ для некоторого нечетного простого } p. \end{cases}$$

Дополнительное условие делимости в размерностях $2i = 2p^k$ вытекает из следующего простого наблюдения.

Предложение 3.2. Если M^{2n} является SU-многообразием размерности $2n = 2p^k$ для некоторого простого p, то

$$s_n[M^{2n}] = 0 \bmod p$$

Доказательство. Для $n = p^k$ мы имеем

$$s_n(M^{2n}) = x_1^n + \cdots + x_n^n \equiv (x_1 + \dots x_n)^n = c_1^n(M^{2n}) = 0 \bmod p.$$

□

(Стабильной) *операцией* θ степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений

$$\theta : U^k(X, A) \to U^{k+n}(X, A)$$

определенных для всех клеточных пар (X, A), которые функториальны по (X, A) и коммутируют с изоморфизмами надстройки. Множество всех операций образует кольцо по отношению к сложению и композиции; более того, имеется структура алгебры над кольцом Ω_U. Эта алгебра обозначается A^U.

Конструкция 6 (операции и характеристические классы)**.** Существует изоморфизм Ω_U-модулей

$$A^U \cong U^*(MU) = \varprojlim U^{*+2N}(MU(N)).$$

Для элемента $a \in U^n(MU)$ из A^U, представленного отображением спектров $a : MU \to \Sigma^n MU$, мы обозначим соответствующую операцию через

$$a^* : U^*(X) \to U^{*+n}(X)$$

где X - клеточное пространство. Действие операции a^* описывается следующим образом. Для элемента $x \in U^m(X)$, представленного отображением $x : X \to \Sigma^m MU$, элемент $a^* x \in U^{m+n}(X)$ представляется композицией

$$X \xrightarrow{x} \Sigma^m MU \xrightarrow{\Sigma^m a} \Sigma^{m+n} MU$$

Таким образом определяется левое действие алгебры A^U на группах кобордизмов пространства X, превращающее U^* в функтор со значениями в категории градуированных левых A^U-модулей.

Аналогично определяется действие

$$a_*: U_*(X) \to U_{*-n}(X)$$

алгебры A^U на группах бордизмов. Для элемента $x \in U_m(X)$, представленного отображением $x: \Sigma^m S \to X \wedge MU$, элемент $a_* x \in U_{m-n}(X)$ представляется Композицией

$$\Sigma^{m-n} S \xrightarrow{\Sigma^{-n} x} \Sigma^{-n}(X \wedge MU) \xrightarrow{\Sigma^{-n}(1 \wedge a} X \wedge MU$$

Существуют естественные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*^N: U_{n+2N}(MU(N)) \to U_n(BU(N)), \quad \varphi_N^*: U^n(BU(N)) \to U^{n+2N}(MU(N))$$

Так как $U_n(BU)$ есть прямой предел групп $U_n(BU(N))$, а $U^n(BU)$ - обратный предел групп $U^n(BU(N))$, и аналогично для MU, то мы также имеем стабильные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*: U_n(MU) \to U_n(BU), \quad \varphi^*: U^n(BU) \to U^n(MU)$$

Отсюда следует, что каждый универсальный характеристический класс $\alpha \in U^n(BU)$ определяет операцию $a = \varphi^*(\alpha) \in U^n(MU)$, и наоборот.

Если $x \in U_m(X)$ представляется сингулярным многообразием $M^m \xrightarrow{f} X$, то $a_* x$ можно интерпретировать геометрически следующим образом. Пусть $\alpha = (\varphi^*)^{-1} a-$ характеристический класс, соответствующий элементу a. Рассмотрим $\alpha(-\mathscr{T} M) \in U^n(M^m)$, где $\mathscr{T} M-$ касательное расслоение, а $-\mathscr{T} M-$ стабильное нормальное расслоение многообразия M. Применяя оператор двойственности Пуанкаре-Атья

$$D_U: U^n(M^m) \to U_{m-n}(M^m)$$

мы получаем элемент $D_U \alpha(-\mathscr{T} M) \in U_{m-n}(M)$, представляемый сингулярным многообразием $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M$. Тогда $a_* x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M \xrightarrow{f} X$ Имеется изоморфизм левых Ω_U-модулей

$$A^U = U^*(MU) \cong \Omega_U \widehat{\otimes} S$$

где $\widehat{\otimes}-$ пополненное тензорное произведение, а $S-$ алгебра Ландвебера-Новикова, порожденная операциями $S_\omega = \varphi^*\left(s_\omega^U\right)$, соответствующими универсальным характеристическим классам $s_\omega^U \in U^*(BU)$, которые получаются из симметризации мономов $t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$, индексированных разбиениями $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$. Следовательно, каждый элемент $a \in A^U$ может быть записан единственным образом в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in \Omega_U$.

Таким образом, в случае $X = \mathrm{pt}$ мы имеем представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(\mathrm{pt})$ и $\Omega^U = U_*(\mathrm{pt})$. В отличие от случая обычных (ко)гомологий верна следующая лемма.

Теорема 3.3. Представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(\mathrm{pt})$ и $\Omega^U = U_*(\mathrm{pt})$ точны.

Кроме представления алгебры A^U на бордизмах $U_*(X)$ любого пространства X определим еще одно представление алгебры A^U на $U_*(BU)$ следующим образом.

Конструкция 7 (представление алгебры A^U на $U_*(BU), a \mapsto \widetilde{a}$)**.** Пусть $a \in U^n(MU)$ - элемент из A^U. Положим

$$\widetilde{a} := \varphi_* a_* \varphi_*^{-1}: U_m(BU) \to U_{m-n}(BU).$$

Геометрический смысл этой операции описывается следующим образом. Рассмотрим класс бордизмов $[M, \xi] \in U_m(BU)$, где ξ - стабильное расслоение, индуцированное сингулярным многообразием $M \to BU$ из (стабильного) тавтологического расслоения над BU. Элемент $a \in U^n(MU)$ определяет универсальный характеристический класс $\alpha = (\varphi^*)^{-1}\, a \in U^n(BU)$ и, следовательно, класс $\alpha(\xi) \in U^n(M)$. Рассмотрим двойственный по Пуанкаре-Атья класс $D_U(\alpha(\xi)) = [Y_a, f_a] \in U_{m-n}(M)$, где $Y_a \xrightarrow{f_a} M$ - сингулярное многообразие в M. Тогда

$$\widetilde{a}[M,\xi] = \left[Y_a, f_a^*(\xi + \mathscr{T}M) - \mathscr{T}Y_a\right] \in U_{m-n}(BU).$$

Применяя аугментацию $\varepsilon : U_*(BU) \to \Omega^U$, мы получаем

$$\varepsilon(\widetilde{a}[M,\xi]) = [Y_a] = \left\langle (\varphi^*)^{-1}\, a, [M,\xi] \right\rangle \in U_{m-n}(\mathrm{pt}) = \Omega^U_{m-n},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает кронекеровское произведение в (ко)бордизмах пространства BU

Теорема 3.4. Представление $a \mapsto \widetilde{a}$ алгебры A^U на $U_*(BU)$ точно.

Доказательство. Полагая $\xi = -\mathscr{T}M$ в конструкции 7, мы получаем

$$\widetilde{a}[M, -\mathscr{T}M] = [Y_a, -\mathscr{T}Y_a]\,.$$

Из этого следует, что мы можем рассматривать представление $a \mapsto a_*$ на $U_*(\mathrm{pt})$ как подпредставление в представлении $a \mapsto \widetilde{a}$ на $U_*(BU)$. Так как представление $a \mapsto a_*$ точно по теореме 3.3 , представление $a \mapsto \widetilde{a}$ также точно. $\square$

4. Образующие SU-бордизмов и многообразия Калаби-Яу

Заметим, что для $i \geqslant 5$ каждая образующая $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ может быть задана квазиторическим многообразием в силу следующей теоремы:

Теорема 4.1 ([2])**.** Существуют квазиторические SU-многообразия M^{2i}, $i \geqslant 5$, такие, что $s_i(M^{2i}) = m_i m_{i-1}$, если i нечетно, и $s_i(M^{2i}) = 2m_i m_{i-1}$, если i четно. Эти квазиторические SU-многообразия имеют минимально возможные характеристические числа s_i и представляют полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

С другой стороны, каждое квазиторическое SU-многообразие вещественной размерности $\leqslant 8$ бордантно нулю по теореме:

Теорема 4.2 ([5]; теорема 6.13)**.** Квазиторическое SU-многообразие M^{2n} представляет 0 в Ω^U_{2n} при $n < 5$.

Причина в том, что род Кричевера $\varphi_K : \Omega^U \to R_K$ (см. [1]; E.5]) обращается в нуль на квазиторических SU-многообразиях, однако φ_K является изоморфизмом в размерностях < 10.

Напомним, что имеют место соотношения

$$\Omega^{SU}_4 = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle,\ \Omega^{SU}_6 = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \Omega^{SU}_8 = \mathbb{Z}\langle \frac{1}{4}y_2^2, y_4\rangle$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2(y_2) = -48,\ s_3(y_3) = m_3m_2 = 6,\ s_4(y_4) = 2m_4m_3 = 20$$

Более подробно об этих соотношениях можно прочить [2].

Пример . Сфера S^6 имеет T^2-инвариантную почти комплексную структуру, происходящую из представления сферы в виде однородного простран- ства $G_2/SU(3)$ исключительной группы Ли $G2$ (см. [6, § 13]). Поэтому S^6 является SU-многообразием с $s_3[S^6] = 3c_3[S^6] = 6$. Таким образом, класс SU-бордизма $[S^6]$ можно взять в качестве y_3.

5. Характеристические числа Чженя и s-числа для $\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)$

Также в работе было показано, что образующая $-y_4 \in \Omega^{SU}_8$ представляется грассманианом $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ двумерных плоскостей $\mathbb{C}^4$ с подправленной стабильно комплексной структурой.

Пусть γ – тавтологическое двумерное расслоение над $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ и пусть $\gamma^\perp$ – расслоение ортогональных двумерных плоскостей. Тогда имеем $\mathscr{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ и

$$\mathscr{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^4) \cong \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma}.$$

Таким образом, стандартная комплексная структура на $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ задается изоморфизмом стабильных расслоений

$$\mathscr{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 4\overline{\gamma} - \overline{\gamma}\gamma$$

где мы обозначили $4\overline{\gamma} = \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}\gamma = \overline{\gamma} \otimes \gamma = \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)$. Мы заменим стабильно комплексную структуру на следующую:

$$\mathscr{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 2\overline{\gamma} + 2\gamma - \overline{\gamma}\gamma$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$.Заметим, что $c_1(\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) = 0$, так что $\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)$ является SU-многообразием. Оно имеет то же кольцо когомологий, что и грассманиан:

$$H^*(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) \cong \mathbb{Z}\left[c_1, c_2\right] / \left(c_1^3 = 2c_1c_2, c_2^2 = c_1^2c_2\right)$$

где $c_i = c_i(\gamma)$. Старшая группа когомологий $H^8(\mathrm{Gr}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) \cong \mathbb{Z}$ порождена классом $c_1^2c_2$.

Теперь вычислим класс

$$s_4(\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) = 2s_4(\bar{\gamma}) + 2s_4(\gamma) - s_4(\bar{\gamma}\gamma).$$

Мы имеем

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4,$$

откуда

$$s_4(\bar{\gamma}) = s_4(\gamma) = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 2c_2^2 = 2c_1^2c_2 - 4c_1^2c_2 + 2c_1^2c_2 = 0.$$

Остается вычислить $s_4(\bar{\gamma}\gamma)$. Используя принцип расщепления, запишем $\gamma = \eta_1 + \eta_2$ для некоторых линейных расслоений η_1, η_2 и вычислим $c(\bar{\gamma}\gamma)$:

$$\begin{aligned}
c(\bar{\gamma}\gamma) &= c\left(\left(\bar{\eta}_1 + \bar{\eta}_2\right)\left(\eta_1 + \eta_2\right)\right) = c\left(\bar{\eta}_1\eta_2 + \bar{\eta}_2\eta_1\right) = c\left(\bar{\eta}_1\eta_2\right)c\left(\bar{\eta}_2\eta_1\right) \\
&= \left(1 - c_1\left(\eta_1\right) + c_1\left(\eta_2\right)\right)\left(1 - c_1\left(\eta_2\right) + c_1\left(\eta_1\right)\right) \\
&= 1 - c_1\left(\eta_1\right)^2 - c_1\left(\eta_2\right)^2 + 2c_1\left(\eta_1\right)c_1\left(\eta_2\right) \\
&= 1 - \left(c_1\left(\eta_1\right) + c_1\left(\eta_2\right)\right)^2 + 4c_1\left(\eta_1\right)c_1\left(\eta_2\right) = 1 - c_1(\gamma)^2 + 4c_2(\gamma).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_1(\bar{\gamma}\gamma) = c_3(\bar{\gamma}\gamma) = c_4(\bar{\gamma}\gamma) = 0,\ c_2(\bar{\gamma}\gamma) = 4c_2 - c_1^2 \tag{5.1}$$

и

$$s_4(\bar{\gamma}\gamma) = 2c_2(\bar{\gamma}\gamma)^2 = 2\left(4c_2 - c_1^2\right)^2 = 2\left(16c_2^2 - 8c_1^2c_2 + c_1^4\right) = 20c_1^2c_2.$$

Отсюда получаем, что

$$s_4(\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) = -20c_1^2c_2.$$

Итого, мы имеем: $s_4[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)] = -20$ и $[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)] = -y_4 \in \Omega_8^{SU}$.

Вычислим $c_4(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4))$ используя формулу Уитни:

$$c_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j+k=i} c_j(\xi)c_k(\eta) \tag{5.2}$$

Выпишем согласно (5.2) частные случаи для c_1,c_2,c_3,c_4:

$$\begin{aligned}
&c_1(\xi \oplus \eta) = c_1(\xi) + c_1(\eta), \\
&c_2(\xi \oplus \eta) = c_2(\xi) + c_1(\xi)c_1(\eta) + c_2(\eta), \\
&c_3(\xi \oplus \eta) = c_3(\xi) + c_2(\xi)c_1(\eta) + c_1(\xi)c_2(\eta) + c_3(\eta), \\
&c_4(\xi \oplus \eta) = c_4(\xi) + c_3(\xi)c_1(\eta) + c_2(\xi)c_2(\eta) + c_1(\xi)c_3(\eta) + c_4(\eta).
\end{aligned}$$

Пользуясь (5.2), вычислим $c_i(-\bar{\gamma}\gamma)$:

$$\begin{aligned}
c_1(\bar{\gamma}\gamma + (-\bar{\gamma}\gamma)) &= c_1(\bar{\gamma}\gamma) + c_1(-\bar{\gamma}\gamma) = 0 \Rightarrow c_1(-\bar{\gamma}\gamma) = -c_1(\bar{\gamma}\gamma), \\
c_2(\bar{\gamma}\gamma + (-\bar{\gamma}\gamma)) &= c_2(\bar{\gamma}\gamma) - c_1^2(\bar{\gamma}\gamma) + c_2(-\bar{\gamma}\gamma) = 0 \Rightarrow c_2(-\bar{\gamma}\gamma) = c_1^2(\bar{\gamma}\gamma) - c_2(\bar{\gamma}\gamma), \\
c_3(\bar{\gamma}\gamma + (-\bar{\gamma}\gamma)) &= c_3(\bar{\gamma}\gamma) - 2c_1(\bar{\gamma}\gamma)c_2(\bar{\gamma}\gamma) + c_1^3(\bar{\gamma}\gamma) + c_3(-\bar{\gamma}\gamma) = 0, \\
&\Rightarrow c_3(-\bar{\gamma}\gamma) = -c_1^3(\bar{\gamma}\gamma) + 2c_1(\bar{\gamma}\gamma)c_2(\bar{\gamma}\gamma) - c_3(\bar{\gamma}\gamma), \\
c_4(\bar{\gamma}\gamma + (-\bar{\gamma}\gamma)) &= c_4(\bar{\gamma}\gamma) + 3c_1^2(\bar{\gamma}\gamma)c_2(\bar{\gamma}\gamma) + c_4(-\bar{\gamma}\gamma) - 2c_1(\bar{\gamma}\gamma)c_3(\bar{\gamma}\gamma) - c_2^2(\bar{\gamma}\gamma) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow c_4(\bar{\gamma}\gamma) = c_1^4(\bar{\gamma}\gamma) + 2c_1(\bar{\gamma}\gamma)c_3(\bar{\gamma}\gamma) + c_2^2(\bar{\gamma}\gamma) - 3c_1^2(\bar{\gamma}\gamma)c_2(\bar{\gamma}\gamma) - c_4(\bar{\gamma}\gamma)
\end{aligned}$$

Обращаясь к результатам (5.1) имеем следующее:

$$\begin{aligned} &c_1(-\bar\gamma\gamma) = c_3(-\bar\gamma\gamma) = 0,\\ &c_2(-\bar\gamma\gamma) = -c_2(\bar\gamma\gamma) = c_1^2 - 4c_2,\\ &c_4(-\bar\gamma\gamma) = c_2^2(\bar\gamma\gamma) = 10c_1^2c_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пользуясь результатами (5.3) и формулой Уитни получаем, что:

$$\begin{aligned} c_4(2\bar\gamma + 2\gamma - \bar\gamma\gamma) = {} & c_4(2\bar\gamma + 2\gamma) + c_3(2\bar\gamma + 2\gamma)c_1(-\bar\gamma\gamma) + \\ & + c_2(2\bar\gamma + 2\gamma)c_2(-\bar\gamma\gamma) + c_1(2\bar\gamma + 2\gamma)c_3(-\bar\gamma\gamma) + c_4(-\bar\gamma\gamma) = \\ & = c_4(2\bar\gamma + 2\gamma) + c_2(2\bar\gamma + 2\gamma)c_2(-\bar\gamma\gamma) + c_4(-\bar\gamma\gamma). \end{aligned}$$

Вычисляя $c_i(2\gamma)$ и $c_i(2\bar\gamma)$, находим, что:

$$\begin{aligned} &c_4(2\gamma) = c_4(2\bar\gamma) = c_4 + c_1c_3 + c_2c_2 + c_3c_1 + c_4 = c_2^2 = c_1^2c_2,\\ &c_3(2\gamma) = c_3 + c_2c_1 + c_1c_2 + c_3 = 2c_1c_2,\ c_3(2\bar\gamma) = -c_3 - c_2c_1 - c_1c_2 - c_3 = -2c_1c_2,\\ &c_2(2\gamma) = c_2(2\bar\gamma) = c_2 + c_1c_1 + c_2 = c_1^2 + 2c_2,\\ &c_1(2\gamma) = c_1 + c_1 = 2c_1,\ c_1(2\bar\gamma) = -c_1 - c_1 = -2c_1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Тогда пользуясь результатами (5.4) получим, что:

$$\begin{aligned} c_4(2\bar\gamma + 2\gamma) &= c_4(2\bar\gamma) + c_3(2\bar\gamma)c_1(2\gamma) + c_2(2\bar\gamma)c_2(2\gamma) + c_1(2\bar\gamma)c_3(2\gamma) + c_4(2\gamma) = \\ &= c_1^2c_2 - 4c_1^2c_2 + (c_1^2 + 2c_2)^2 - 4c_1^2c_2 + c_1^2c_2 = -6c_1^2c_2 + c_1^4 + 4c_1^2c_2 + 4c_2^2 = \\ &= -6c_1^2c_2 + 2c_1^2c_2 + 4c_1^2c_2 + 4c_1^2c_2 = 4c_1^2c_2,\\ c_2(2\bar\gamma + 2\gamma) &= c_2(2\bar\gamma) + c_1(2\bar\gamma)c_1(2\gamma) + c_2(2\gamma) = c_1^2 + 2c_2 - 4c_1^2 + c_1^2 + 2c_2 = -2c_1^2 + 4c_2. \end{aligned}$$

Итого:

$$\begin{aligned} c_4(2\bar\gamma + 2\gamma - \bar\gamma\gamma) &= c_4(2\bar\gamma + 2\gamma) + c_2(2\bar\gamma + 2\gamma)c_2(-\bar\gamma\gamma) + c_4(\bar\gamma\gamma) = \\ &= 4c_1^2c_2 + (4c_2 - 2c_1^2)(c_1^2 - 4c_2) + 10c_1^2c_2 = \\ &= 14c_1^2c_2 + 4c_1^2c_2 - 16c_2^2 - 2c_1^4 + 8c_1^2c_2 = \\ &= 26c_1^2c_2 - 16c_1^2c_2 - 4c_1^2c_2 = 6c_1^2c_2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что:

$$c_4(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) = 6c_1^2c_2 \Rightarrow c_4[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = 6.$$

Теперь пользуясь тем, что $c_1(\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)) = 0$, $s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4$ и $s_4[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)] = -20$, мы можем найти $c_2^2[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)]$. Действительно,

$$2c_2^2[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)] = s_4 + 4c_4[\widetilde{\mathrm{Gr}}_2\left(\mathbb{C}^4\right)] = -20 + 24 = 4 \Rightarrow c_2^2[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = 2.$$

Список литературы

[1] **V. M. Buchstaber, T. E. Panov.** *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr.,204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] **И. Ю. Лимонченко, Т. Е. Панов, Г. С. Черных**, "*SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители*", УМН, **74**:3(447) (2019), 95–166; Russian Math. Surveys, **74**:3 (2019), 461–524

[3] **Т. Е. Панов.** *Топология-2.* URL: http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-topology2.pdf.

[4] **Т. Е. Панов.** *Геометрия и топология-5.* URL: http://higeom.math.msu.su/people/taras/teaching/panov-gt5.pdf

[5] **V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray**, "*Toric genera*", Int. Math. Res. Not. IMRN, **2010**:16 (2010), 3207–3262.

[6] **A. Borel, F. Hirzebruch**, "*Characteristic classes and homogeneous spaces. I*", Amer. J. Math., **80** (1958), 458–538.