Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

Двойственность Гейла, нормальные вееры и конус обильных дивизоров

Курсовая работа студента 3 курса
Шенгелия Михаила Николаевича
Научный руководитель:
профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва 2023

1. Введение

Для проективных торических многообразий Nef–конус содержит в качестве целых точек внутренности все обильные дивизоры и только их. В курсовой работе этот конус выражается через конфигурацию, двойственную по Гейлу к конфигурации лучей веера, задающего торическое многообразие. Тем самым конус численно эффективных (а также обильных) дивизоров описывается в терминах, отвлечённых от алгебраической геометрии. Последний факт подталкивает к предположению, что в подобных терминах можно описывать его аналог для некоммутативных деформаций торических многообразий.

2. Предварительные сведения

2.1. Двойственность Гейла

Определение. Пусть $V \cong \mathbb{R}^n$ и дана конфигурация A векторов $a_1, \dots a_k$ в двойственном пространстве V^*. Она определяет отображение $A : \mathbb{R}^k \to V$ следующим образом: $e_i \mapsto a_i$, где $e_1, \dots e_k$ – стандартный базис $\mathbb{R}^k$. Пусть $W \subset \mathbb{R}^k$ – ядро этого отображения. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^k \xrightarrow{A} V^* \longrightarrow 0,$$

и перейдем к двойственной последовательности

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{A^*} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\Gamma} W^* \longrightarrow 0.$$

При этом $A^*(v) = (\langle a_1, v\rangle, \dots, \langle a_k, v\rangle) \in \mathbb{R}^k$, где скобки обозначают спаривание. Определим $\gamma_i = \Gamma(e_i)$, $i = 1, \dots, k$. Этот набор из k векторов в пространстве $W^* \cong \mathbb{R}^{k-n}$ образует конфигурацию *двойственную по Гейлу* к исходной.

2.2. Группа Пикара торического многообразия

Пусть N – свободная абелева группа (решётка однопараметрических подгрупп тора $T_N = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$), M – двойственная к N решётка (решётка характеров тора T_N, $M = \mathrm{Hom}(T_N, \mathbb{C}^*)$), $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, Σ – рациональный веер в $N_{\mathbb{R}}$, X_Σ – соответствующее ему торическое многообразие. Далее, говоря о торическом многообразии X_Σ с веером Σ, будем подразумевать описанную выше ситуацию.

Сделаем сначала напоминание о группе классов дивизоров Вейля на торическом многообразии.

Теорема 1 (см. [1], Theorem 4.1.3)**.** Пусть X_Σ – торическое многообразие с веером Σ в с лучами a_ρ, линейно порождающими $N_\mathbb{R}$, и соответствующими им тор–инвариантными дивизорами D_ρ. Имеет место короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Div_T(X_\Sigma) \longrightarrow Cl(X_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

где M – решётка характеров T_N, $Div_T(X_\Sigma) = \bigoplus\limits_\rho \mathbb{Z}D_\rho$ – группа тор–инвариантных дивизоров Вейля на X_Σ, $Cl(X_\Sigma)$ – группа классов дивизоров Вейля, первое отображение сопоставляет характеру его главный дивизор: $m \mapsto \sum\langle m, a_\rho\rangle D_\rho$, а второе – каноническая проекция.

Замечание. В частности, из этой короткой точной последовательности следует, что $Cl(X_\Sigma)$ – абелева группа ранга $k - n$, где n – размерность многообразия X_Σ, а k – число лучей его веера Σ.

Далее лучи и соответствующие им дивизоры будут обозначаться тем же образом.

Теорема 2 (см. [1], Theorem 4.2.1)**.** В условиях предыдущей теоремы имеет место аналогичная короткая точная последовательность для дивизоров Картье:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow CDiv_T(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

где $CDiv_T(X_\Sigma)$ – группа тор–инвариантных дивизоров Картье на X_Σ.

Теорема 3 (см. [1], Proposition 4.2.5)**.** Пусть X_Σ – торическое многообразие с веером Σ в $N_\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$, и Σ содержит конус максимальной размерности n. Тогда группа Пикара $Pic(X_\Sigma)$ не имеет кручения.

Теорема 4 (см. [1], Proposition 4.2.7)**.** Пусть X_Σ – торическое многообразие с веером Σ. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) Для каждого дивизора Вейля D на X_Σ существует целое положительной число k такое, что kD – дивизор Картье.

2) Группа Пикара $Pic(X_\Sigma)$ имеет конечный индекс в группе классов дивизоров Вейля $Cl(X_\Sigma)$.

3) Веер X_Σ – симплициальный.

2.3. Конус численно эффективных дивизоров

Определение. Пусть X – нормальное алгебраическое многообразие. Дивизор Картье D на X называется численно эквивалентным нулю, если для любой неприводимой компактной кривой C в X выполнено $D \cdot C = 0$. Дивизоры Картье D_1, D_2 на X называются численно эквивалентными (обозначается $D_1 \equiv D_2$), если $D_1 - D_2$ численно эквивалентен нулю.

Определение. Дивизор Картье D на нормальном алгебраическом многообразии X называется численно эффективным, если для любой неприводимой компактной кривой C выполнено $D \cdot C \geq 0$. Положим $N^1(X) = (CDiv(X)/\equiv) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, где $CDiv(X)/\equiv$ – фактор группы классов дивизоров Картье по отношению численной эквивалентности, и рассмотрим в $N^1(X)$ конус, натянутый на классы численно эффективных дивизоров Картье. Полученный конус называется Nef–конусом и обозначается $Nef(X)$.

Теорема 5 (см. [1], Theorem 6.3.15)**.** Пусть X_Σ – торическое многообразие, и его веер Σ имеет выпуклый носитель полной размерности. Тогда дивизор Картье $D \sim 0$ тогда и только тогда, когда он численно эквивалентен 0.

Теорема 6 (см. [1], Theorem 6.3.12)**.** Пусть X_Σ – торическое многообразие, веер которого имеет выпуклый носитель полной размерности. Тогда дивизор Картье D численно эффективен в том и только в том случае, когда он не имеет базисных точек.

Таким образом, в случае торических многообразий Nef–конус оказывается конусом в $Pic(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, натянутым на классы дивизоров без базисных точек.

Теорема 7 (см. [1], Theorem 6.3.22)**.** Пусть X_Σ – проективное торическое многообразие. Тогда Nef–конус – строго выпуклый, имеет полную размерность, и целые точки его внутренности суть в точности классы обильных дивизоров на X_Σ.

Теорема 8 (см. [1], Proposition 6.3.24)**.** Пусть X_Σ – компактное торическое многообразие с симплициальным веером X_Σ. Оно проективно тогда и только тогда, когда конус численно эффективных дивизоров $Nef(X_\Sigma)$ имеет полную размерность в $Pic(X_\Sigma) \otimes \mathbb{R}$.

Замечание. Если веер не симплициальный, теорема неверна (*см.* [1]*, Example 6.3.26*).

2.4. Кусочно-линейные функции на веере

Определение. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ выпукло. Функция $\varphi : S \to \mathbb{R}$ называется *выпуклой*, если для любых $u, v \in S$ и $t \in (0, 1)$ выполнено $\varphi(ut + (1-t)v) \geq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v)$, и *строго выпуклой*, если неравенство строгое.

Определение. Пусть $D = \sum\limits_{\rho} c_\rho D_\rho$ – тор-инвариантный дивизор Картье на торическом многообразии X_Σ. Функция φ_D на веере определяется следующими свойствами:

1) φ_D линейна на каждом конусе веера Σ.

2) $\varphi_D(a_\rho) = -c_\rho$

На каждом конусе σ явная формула для D оказывается следующей: $\varphi_D(u) = \langle m_\sigma, u\rangle$, где $\{m_\sigma\}$ – локальные данные Картье дивизора D.

Теорема 9 (см. [1], Theorem 6.1.7)**.** Пусть $|\Sigma|$ – выпуклый, полной размерности, D – дивизор Картье на X_Σ. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) D не имеет базисных точек.

2) φ_D выпукла.

3) $\varphi_D(u) \leq \langle m_\sigma, u\rangle$ для любого конуса полной размерности σ и точки $u \in |\Sigma|$.

Теорема 10 (см. [1], Lemma 6.1.13, Theorem 6.1.14)**.** Пусть $|\Sigma|$ – выпуклый, полной размерности, D – дивизор Картье на X_Σ. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) D обилен.

2) φ_D строго выпукла.

3) $\varphi_D(u) < \langle m_\sigma, u\rangle$ для любого конуса полной размерности σ и точки $u \in |\Sigma| \setminus \sigma$.

3. Нормальные вееры

Сформулируем критерий нормальности веера в терминах двойственной по Гейлу конфигурации.

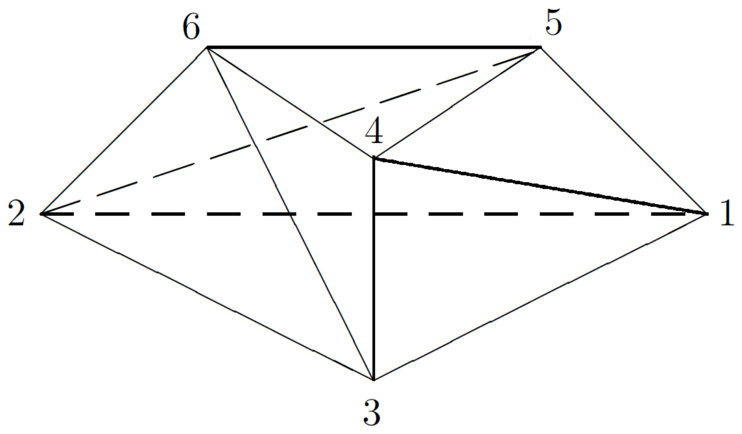
Теорема 11. Пусть полный веер Σ задан конфигурацией $(A, \mathcal{C})$, то есть его лучи принадлежат множеству $A = \{a_1, \dots a_k\}$ векторов из $V^* \cong \mathbb{R}^n$ и набор $\{a_i\}_{i\in I}$ образует конус веера тогда и только тогда, когда $I \in \mathcal{C}$, и пусть Γ – двойственная к A по Гейлу конфигурация. Тогда нормальность веера Σ эквивалентна условию

$$\bigcap_{J\in\mathcal{C}} relint\, Cone \Gamma_{\hat{J}} \neq \varnothing$$

Замечание. При этом по всякой точке пересечения относительных внутренностей конусов строится многогранник, нормальный веер которого совпадает с данным. А именно, точке $\delta = \sum\limits_{i=1}^{k} b_i\gamma_i$ сопоставляется многогранник

$$P = \{v \in V : \langle a_i, v\rangle + b_i \geq 0, \quad i \in 1, \dots, k\}.$$

Пример. Всякий нормальный веер полон. Обратное неверно: рассмотрим веер в $V^* \cong \mathbb{R}^3$ с шестью лучами $a_1 = e_1$, $a_2 = e_2$, $a_3 = e_3$, $a_4 = -e_1 - e_2$, $a_5 = -e_2 - e_3$, $a_6 = -e_1 - e_3$, где e_i – базис V^* (см. картинку ниже: внутри тетраэдра со срезанной вершиной располагается точка 0, а восемь трёхмерных конусов веера натянуты треугольники, на которые разделены грани тетраэдра). Легко понять, что он полон и, кроме того, симплициален.



Рассмотрим двойственную по Гейлу конфигурацию. Несложно убедиться, что она будет состоять из векторов $\gamma_1 = e_1 + e_3$, $\gamma_2 = e_1 + e_2$, $\gamma_3 = e_2 + e_3$, $\gamma_4 = e_1$, $\gamma_5 = e_2$, $\gamma_6 = e_3$ в пространстве $W^* \cong \mathbb{R}^3$, естественный базис которого обозначен также e_i. Прежде чем применить сформулированный выше критерий, спроецируем конфигурацию на плоскость, натянутую на векторы e_1, e_2, e_3 и изобразим векторы $\frac{\gamma_1}{2}$, $\frac{\gamma_2}{2}$, $\frac{\gamma_3}{2}$, γ_4, γ_5, γ_6 точками с соответствующими номерами на треугольнике, полученном как пересечение плоскости с положительным октантом. Конусы $\Gamma_{\hat{I}}$ из *Теоремы 11* будут натянуты на три вектора из Γ каждый, так как все конусы веера Σ натянуты треугольники. На треугольнике конус $\Gamma_{\hat{I}}$ будет изображаться как треугольник с вершинами с номерами из $\hat{I}$. Легко проверить, что пересечение внутренностей треугольников окажется пустым. Следовательно, рассматриваемый веер не нормален.

4. Утверждение работы

Пусть конфигурация векторов $(A, \mathcal{C})$ определяет симплициальный веер Σ с выпуклым носителем полной размерности в $\mathbb{R}^n$, $A = \{a_1 \dots a_k\}$ – множество его лучей, $D_1, \dots D_k$ – соответствующие им тор–инвариантные дивизоры.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow CDiv_T(X_\Sigma) \longrightarrow Pic(X_\Sigma) \longrightarrow 0,$$

и помножим её тензорно на $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Z}$. Получим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow M_\mathbb{R} \longrightarrow CDiv_T(X_\Sigma)_\mathbb{R} \longrightarrow Pic(X_\Sigma)_\mathbb{R} \longrightarrow 0.$$

По *Теореме 4* существует натуральное число λ такое, что λD_i – дивизоры Картье для всех i. Поэтому можно считать, что проекция на $Pic(X_\Sigma)_\mathbb{R}$ задана формулой $\sum\limits_i c_i D_i \mapsto \sum\limits_i c_i \frac{[\lambda D_i]}{\lambda}$. Отметим также, что первое отображение – это в точности A^* из определения двойственности Гейла. Тогда проекцию можно считать отображением Γ, а двойственная по Гейлу конфигурация состоять из векторов $\gamma_i = \frac{[\lambda D_i]}{\lambda}$.

Предложение. Пусть X_Σ – торическое многообразие, заданное симплициальным веером с выпуклым носителем полной размерности. В описанных выше обозначениях Nef–конус выражается в терминах двойственной по Гейлу конфигурации следующим образом:

$$Nef(X_\Sigma) = \bigcap_{I \in \mathcal{C}} Cone\Gamma_{\hat{I}}, \tag{1}$$

где пересечение берется по наборам индексов $I \in \mathcal{C}$, то есть таким, что векторы A_I образуют конус в Σ. Также, если X_Σ ещё и проективно, то Nef–конус имеет полную размерность в $Pic(X_\Sigma)_\mathbb{R}$, и верно следующее:

$$int\, Nef(X_\Sigma) = \bigcap_{I \in \mathcal{C}} int\, Cone\Gamma_{\hat{I}}. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала покажем включение слева направо. Пусть $D = \sum\limits_i \alpha_i D_i$ – тор-инваринатный дивизор Картье без базисных точек. Его образ в $Pic(X_\Sigma)$ равен $\Gamma(D) = \sum\limits_i \alpha_i \gamma_i = \sum\limits_i -\varphi_D(a_i)\gamma_i$, где второе равенство верно по определению функции φ_D. Далее, зафиксируем $I \in \mathcal{C}$. Тогда на конусе $ConeA_I$ функция φ_D равна $\varphi_D(u) = \langle m_I, u\rangle$. Перепишем $\Gamma(D)$ в другом виде:

$$\begin{aligned}\Gamma(D) = \sum_i -\varphi_D(a_i)\gamma_i = \sum_{i \in I} -\langle m_I, a_i\rangle\gamma_i + \sum_{j \in \hat{I}} -\varphi_D(a_j)\gamma_j = \sum_{i \in I} -\langle m_I, a_i\rangle\gamma_i + \sum_{j \in \hat{I}} -\langle m_I, a_i\rangle\gamma_j \\ - \sum_{j \in \hat{I}} -\langle m_I, a_i\rangle\gamma_j + \sum_{j \in \hat{I}} -\varphi_D(a_j)\gamma_j = -\sum_i \langle m_I, a_i\rangle\gamma_i + \sum_{j \in \hat{I}} (\langle m_I, a_j\rangle - \varphi_D(a_j))\gamma_j = \\ = -\Gamma A^*(m_I) + \sum_{j \in \hat{I}} (\langle m_I, a_j\rangle - \varphi_D(a_j))\gamma_j = \sum_{j \in \hat{I}} (\langle m_I, a_j\rangle - \varphi_D(a_j))\gamma_j.\end{aligned} \tag{3}$$

Последний переход верен ввиду равенства $\Gamma A^* = 0$.

Пользуясь *Теоремой 9* (или, для доказательства включения для второго равенства Предложения, *Теоремами 10 и 7*), и применяя описанное выше рассуждение ко всем $I \in \mathcal{C}$, заключаем, что

$$Nef(X_\Sigma) \subset \bigcap_{I \in \mathcal{C}} Cone\Gamma_{\hat{I}},$$

а также

$$relint\, Nef(X_\Sigma) \subset \bigcap_{I \in \mathcal{C}} relint\, Cone\Gamma_{\hat{I}}$$

для проективного случая. Отметим, наконец, что, так как в проективном случае размерность Nef–конуса полная, относительные внутренности можно заменить обычными.

Докажем теперь обратное включение для равенства (2) (для равенства (1) аналогично). Так как отображение проекции сюръективно, всякая целая точка $Pic(X_\Sigma)_\mathbb{R}$ есть образ некоторого тор–инвариантного дивизора Картье D. Из формулы (3) следует, что если $\Gamma(D) \in \bigcap_{I \in \mathcal{C}} relint\, Cone\Gamma_{\hat{I}}$, то $\varphi_D(a_j) < \langle m_I, a_j \rangle$ при $j \in \hat{I}$ для всех $I \in \mathcal{C}$. Отсюда, в свою очередь, ввиду кусочной линейности функции φ_D, следует строгая выпуклость φ_D, откуда, пользуясь *Теоремой 10*, заключаем, что дивизор D обилен, и, следовательно, по *Теореме 7* его класс лежит во внутренности Nef–конуса.

Таким образом, мы доказали, что целые точки соответствующих конусов совпадают, а значит, совпадают и сами конусы. $\square$

Список литературы

[1] David Cox, John Little, Hal Schenck. Toric Varieties.

[2] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, 2015.