Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Топология дополнений к конфигурациям координатных и диагональных подпространств

Выполнил студент 303 группы
Триль Всеволод Аркадьевич

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Москва, 2023 г.

Содержание

1 Введение

Конфигурации подпространств возникают в таких областях математики, как комбинаторика, алгебраическая геометрия, теория кос. Дополнения к таким пространствам также рассматриваются как конфигурационные пространства различных механических систем. Теория конфигураций восходит к работе Арнольда [3], в которой классифицирующее пространство группы крашеных кос описано как дополнение к набору всевозможных диагональных гиперплоскостей $\{z_i = z_j\}$ в $\mathbb{C}^m$. Там же было вычислено кольцо когомологий этого пространства. Дополнения к произвольной диагональной конфигурации были изучены в работе [4] в случае вещественных пространств $\mathbb{R}^m$. В ней удалось получить аддитивную структуру кольца когомологий дополнений таких конфигураций.

Дополнения к конфигурации координатных подпространств были подробно описаны в работе [1]. В ней была доказана гомотопическая эквивалентность этих пространств и момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$. На ее основе было вычислено кольцо когомологий дополнений координатной конфигурации.

В данной работе установлена связь между дополнениями к координатным и диагональным конфигурациями, а также изучена комбинаторика симплициальных комплексов, возникающих при переходе от диагональных конфигураций к координатным.

2 Основные определения

В работе будут использоваться следующие комбинаторные определения.

Определение 2.1. Абстрактным симплициальным комплексом $\mathcal{K}$ на множестве $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ называется набор подмножеств $[m]$, удовлетворяющий свойствам:

1. $\varnothing \in \mathcal{K}$;
2. если $I \in \mathcal{K}$, то для любого $J \subset I$ выполнено $J \in \mathcal{K}$.

Одноэлементные множества $\{i\} \in \mathcal{K}$ называют вершинами сиплициального комплекса, а множества $\{i\} \notin \mathcal{K}$ называют призрачными вершинами.

Определение 2.2. Пусть J — подмножество в $[m]$. Определим ограничение симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на J как

$$\mathcal{K}_J := \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\}.$$

Определение 2.3. Пусть I — симплекс в $\mathcal{K}$, то есть $I \in \mathcal{K}$. Тогда линком симплекса I называется подкомплекс вида

$$\operatorname{link}_{\mathcal{K}} I := \{J \in \mathcal{K} : J \cup I \in \mathcal{K},\ J \cap I = \varnothing\}.$$

Звездой симплекса I будем называть подкомплекс

$$\operatorname{star}_{\mathcal{K}} I := \{J \in \mathcal{K} : I \cup J \in \mathcal{K}\}.$$

Определение 2.4. Пусть $A \subset X$ — пара топологических пространств. Будем называть полиэдральным произведением пары (X, A) конструкцию следующего вида:

$$(X,A)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (X,A)^I\,, \text{ где } (X,A)^I := \{(x_1,\ldots,x_m) \in X^m : x_j \in A, \text{ если } j \in I\}.$$

Здесь X^m означает произведение m копий топологического пространства X.

Определение 2.5. Момент-угол комплексом называется пространство

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := \left(D^2, S^1\right)^{\mathcal{K}}.$$

Вещественным момент-угол комплексом будем называть пространство

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := \left(D^1, S^0\right)^{\mathcal{K}}.$$

Определение 2.6. Конфигурация подпространств — это набор $\mathcal{A} = \{L_1, \ldots, L_r\}$, где $L_1, \ldots, L_r$ — линейные подпространства в $\mathbb{C}^m$.

Конфигурация $\mathcal{A}$ называется координатной, если всякое подпространство L_j имеет вид

$$L_j = L_I := \{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = 0\}$$

для некоторого набора индексов $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$.

Конфигурация $\mathcal{A}$ называется диагональной, если всякое подпространство L_j имеет вид

$$L_j = M_I := \{(z_1,\ldots,z_m) \in \mathbb{C}^m : z_{i_1} = \cdots = z_{i_k}\}$$

для некоторого набора индексов $\{i_1, \ldots, i_k\} \in [m]$.

Определение 2.7. Симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ поставим в соответствие конфигурацию координатных подпространств $\mathcal{A}(\mathcal{K}) = \{L_I : I \notin \mathcal{K}\}$. Определим пространство $U(\mathcal{K})$ как дополнение до $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ в $\mathbb{C}^m$, то есть:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \backslash \bigcup_{I\notin\mathcal{K}} L_I.$$

Если $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс без призрачных вершин, то определено дополнение к конфигурации диагональных подпространств, а именно:

$$D(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \backslash \bigcup_{I\notin\mathcal{K}} M_I.$$

Таким же образом можно определить пространства $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ и $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ как дополнения к конфигурациям подпространств в $\mathbb{R}^m$.

При указанном соответствии выполнено следующее свойство. Если $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$ — это подкомплекс, то тогда $U(\mathcal{K}') \subset U(\mathcal{K})$ и $D(\mathcal{K}') \subset D(\mathcal{K})$. Следующее предложение показывает, что все дополнения к координатным и диагональным конфигурациям исчерпываются пространствами $U(\mathcal{K})$ и $D(\mathcal{K})$.

Предложение 2.8 ([1], [6]). *Построенное отображение $\mathcal{K} \mapsto U(\mathcal{K})$ задает взаимно однозначное соответствие, сохраняющее включения, между множеством симплициальных комплексов на $[m]$ и множеством дополнений к координатным конфигурациям в $\mathbb{C}^m$.*

Отображение $\mathcal{K} \mapsto D(\mathcal{K})$ задает сохраняющую включения биекцию между множеством симплициальных комплексов на $[m]$ без призрачных вершин и множеством дополнений к диагональным конфигурациям в $\mathbb{C}^m$.

Дополнения к координатной конфигурации является частным случаем пространств, представимых в виде полиэдрального произведения, что вытекает из следующего предложения.

Предложение 2.9 ([1]). *$U(\mathcal{K}) = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^\times)^{\mathcal{K}}$, где $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Поскольку каждое координатное подпространство инвариантно относительно стандартного действия тора T^m, то и дополнение $U(\mathcal{K})$ является T^m−инвариантным подмножеством в $\mathbb{C}^m$. Это позволяет установить взаимосвязь между пространствами $U(\mathcal{K})$ и момент-угол комплексами $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$.

Теорема 2.10 ([1], теорема 4.7.5). *Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ — это T^m-инваринантное подпространство в $U(\mathcal{K})$, и существует T^m-эквивариантная деформационная ретракция*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \hookrightarrow U(\mathcal{K}) \overset{\simeq}{\rightarrow} \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}.$$

Эта же теорема верна и в вещественном случае, а именно: $U(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ — это вещественный момент-угол комплекс.

Пример 2.11. Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{sk}^i(\Delta^{m-1})$. Тогда $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ гомотопически эквивалентно букету сфер S^{i+1} в количестве

$$\sum_{k=i+2}^{m} \binom{m}{k} \binom{k-1}{i+1}.$$

Действительно, по теореме 2.10 $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}}$. Заметим, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является $(i+1)$-мерным остовом куба $[-1,1]^m$ (обозначим $I := [-1,1]$).

Индукцией по $m = i+2, i+3, \ldots$ докажем, что существует гомотопическая эквивалентность $f : \mathrm{sk}^{i+1}(I^m) \to S^{i+1} \vee \cdots \vee S^{i+1}$ такая, что $f(\mathrm{sk}^i I^m) = pt$. Если $m = i+2$, то $\mathrm{sk}^{i+1}(I^m) = \partial I^m$. Стянем верхнюю грань куба I^m в точку. Получим $\partial I^m \simeq \mathrm{cone}(\partial I^{m-1}) \cup_{\partial I^{m-1}} I^{m-1}$, где I^{m-1} — нижняя грань куба I^m. Поскольку $\mathrm{cone}(\partial I^{m-1})$ — стягиваемый подкомплекс в полученном клеточном комплексе, то существует гомотопическая эквивалентность $g : \mathrm{cone}(\partial I^{m-1}) \cup_{\partial I^{m-1}} I^{m-1} \overset{\simeq}{\rightarrow} I^{m-1}/\partial I^{m-1} \cong S^{m-1}$. При этом $g(\mathrm{sk}^{m-2} I^{m-1}) = pt$. Итак, в случае $m = i+2$ утверждение доказано.

Пусть теперь $m > i+2$. Обозначим за $F_1, \ldots, F_l$ все грани размерности $i+1$, которые не содержатся целиком ни в верхней, ни в нижней гиперграни куба I^m. Каждая F_j пересекает верхнюю и нижнюю гипергрань куба I^m по граням $G_{j,1}$ и $G_{j,2}$ соответственно, $\dim G_{j,k} = i$. Стянем все F_j так, чтобы $G_{j,1}$ и $G_{j,2}$ склеились. Получим гомотопическую эквивалентность $\mathrm{sk}^{i+1} I^m \overset{\simeq}{\rightarrow} X$, где X — это остов $\mathrm{sk}^{i+1} I^{m-1}$, в котором на месте каждой грани размерности $i+1$ вклеена ещё одна такая же. Клеточный комплекс X содержит подкомплекс $A = \mathrm{sk}^{i+1} I^{m-1}$, к которому применимо предположение индукции. Следовательно, существует гомотопическая эквивалентность $g : A \to S^{i+1} \vee \cdots \vee S^{i+1}$, при которой $g(\mathrm{sk}^i I^{m-1}) = pt$.

Так как (X, A) — клеточная пара, то построенное отображение продолжается до отображения на всем X, при котором $\mathrm{sk}^i X$ отображается в точку. Поскольку X не содержит граней размерности выше $i+1$, мы получаем гомотопическую эквивалентность $f : X \to S^{i+1} \vee \cdots \vee S^{i+1}$, при которой $\mathrm{sk}^i X$ отображается в точку. Тем самым мы доказали индукционный переход и само утверждение.

Найдем число сфер в полученном букете. Пусть w — количество сфер в букете. Тогда эйлерова характеристика $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ равна $\chi(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = 1 + (-1)^{i+1} w$. С другой стороны,

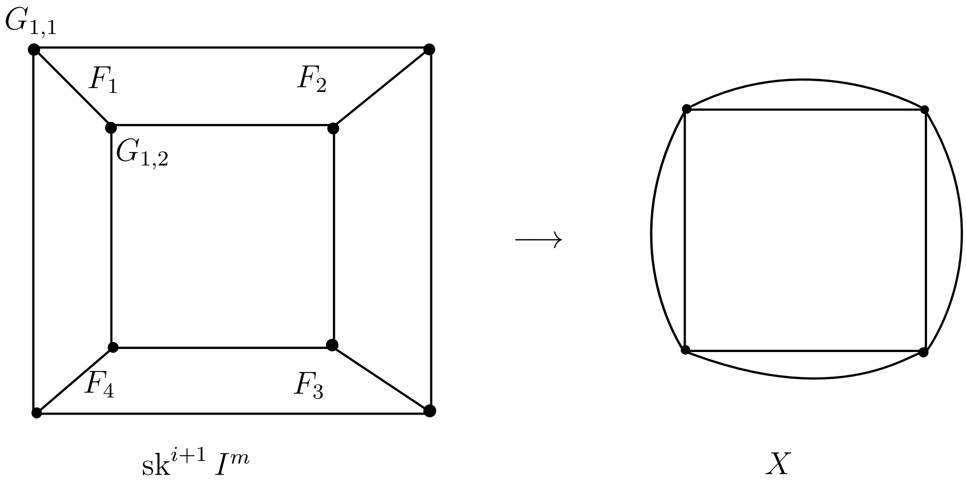


Рис. 1: Стягивание граней F_j

она равна

$$\chi(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \sum_{k=0}^{i+1} (-1)^k f_k,$$

где f_k — это f-числа куба $[-1,1]^m$, то есть количество граней размерности k в $[-1,1]^m$. Как известно, f-числа многогранника связаны с h-числами соотношением

$$f_j = \sum_{k=j}^{m} \binom{k}{j} h_{m-k}.$$

Поскольку h-числа куба равны $h_k = \binom{m}{k}$, имеем:

$$\chi(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j f_j = \sum_{j=0}^{i+1} \sum_{k=j}^{m} (-1)^j \binom{k}{j} h_{m-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{i+1} h_{m-k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} + \sum_{k=i+2}^{m} h_{m-k} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{k}{j} =$$

$$= h_m + \sum_{k=1}^{i+1} h_{m-k} (1-1)^k + \sum_{k=i+2}^{m} h_{m-k} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \left(\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1} \right) =$$

$$= 1 + \sum_{k=i+2}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{i+1} \binom{k-1}{i+1}.$$

Из полученного равенства находим, что $w = \sum_{k=i+2}^{m} \binom{m}{k} \binom{k-1}{i+1}$.

Данный пример можно обобщить и на комплексный случай. В работе [5] было доказано, что $U(\mathcal{K}) \simeq \bigvee_{k=i+2}^{m} \left(S^{i+k+1}\right)^{\vee \binom{m}{k}\binom{k-1}{i+1}}$, где $X^{\vee k}$ означает букет из k копий пространства X.

3 Связь дополнений к конфигурациям координатных и диагональных подпространств

В этом разделе будет установлено, что все дополнения к координатной конфигурации происходят из дополнений к некоторой диагональной. Также будет найдено достаточное условие того, что дополнение к диагональной конфигурации происходит из некоторой координатной.

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — абстрактный симплициальный комплекс на $[m]$. Тогда существует симплициальный комплекс $\mathcal{K}'$ такой, что $U(\mathcal{K}) \simeq D(\mathcal{K}')$. Это же верно и для пространств в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Определим симплициальный комплекс $\mathcal{K}'$ на $[m+1]$ как

$$\mathcal{K}' = \{\{i_1, \ldots, i_k\} : \{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]\} \cup \{\{i_1, \ldots, i_k, m+1\} \subset [m+1] : \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{K}\}.$$

Рассмотрим соответствующее пространство $D(\mathcal{K}') \subset \mathbb{C}^{m+1}$. Отображение F, определенное как

$$F : \mathbb{C}^{m+1} \times [0,1] \to \mathbb{C}^{m+1},$$

$$F(z_1, \ldots, z_{m+1}, t) = (z_1, \ldots, z_{m+1}) - t\frac{z_1 + \cdots + z_{m+1}}{m+1}(1, \ldots, 1), \qquad t \in [0,1],$$

задает гомотопию между тождественным отображением $id : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$ и ортогональной проекцией $P : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$ на гиперплоскость $\pi : z_1 + \cdots + z_m = 0$. При этом для каждого $t \in [0,1]$ пространство $F(D(\mathcal{K}'), t)$ содержится в $D(\mathcal{K})$. Действительно, равенство $z_{i_1} = \cdots = z_{i_k}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполнено $z_{i_1} - t\frac{z_1 + \cdots + z_{m+1}}{m+1} = \cdots = z_{i_k} - t\frac{z_1 + \cdots + z_{m+1}}{m+1}$. Это означает, что $z \notin D(\mathcal{K}') \Rightarrow z \notin F(D(\mathcal{K}'), t)$, то есть $F(D(\mathcal{K}'), t) \subset D(\mathcal{K}')$. Поскольку $F(z,t) = z$ для всякого $z \in \pi$, $t \in [0,1]$, мы получаем, что $F(D(\mathcal{K}'), 1) = D(\mathcal{K}') \cap \pi$, и, следовательно, $D(\mathcal{K}') \simeq D(\mathcal{K}') \cap \pi$.

Рассмотрим линейный изоморфизм $A : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$, определенный по формулам

$$y_i = z_i - z_{m+1}, \text{ если } i = 1, \ldots, m,$$
$$y_{m+1} = z_1 + \ldots z_m + z_{m+1}.$$

Мы утверждаем, что $A(D(\mathcal{K}') \cap \pi) = U(\mathcal{K})$, где $U(\mathcal{K}) \subset \{y_{m+1} = 0\} \subset \mathbb{C}^{m+1}$. Действительно, по определению $\mathcal{K}'$ все подмножества, которые не входят в $\mathcal{K}'$, имеют вид $\{i_1, \ldots, i_k, m+1\}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}$. Отсюда получаем:

$$A(D(\mathcal{K}') \cap \pi) = A\left(\left(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{z_{i_1} = \cdots = z_{i_k} = z_{m+1}\}\right) \cap \{z_1 + \cdots + z_{m+1} = 0\}\right) =$$

$$= \left(\mathbb{C}^{m+1} \setminus \bigcup_{\{i_1, \ldots, i_k\} \notin \mathcal{K}} \{y_{i_1} = \cdots = y_{i_k} = 0\}\right) \cap \{y_{m+1} = 0\} = U(\mathcal{K}),$$

где в последнем равенстве $U(\mathcal{K})$ рассматривается как подпространство в гиперплоскости $\{y_{m+1} = 0\}$. Таким образом, невырожденное линейное отображение $A : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$ индуцирует гомеоморфизм между $D(\mathcal{K}') \cap \pi$ и $U(\mathcal{K})$. Следовательно, мы получаем гомотопическую эквивалентность $D(\mathcal{K}') \simeq D(\mathcal{K}') \cap \pi \cong U(\mathcal{K})$. $\square$

Следствие 3.2. *Если $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, содержащий грань на $m-1$ вершине, то тогда существует симплициальный комплекс $\mathcal{K}'$ такой, что $D(\mathcal{K}) \simeq U(\mathcal{K}')$.*

Доказательство. Перенумеруем вершины $\mathcal{K}$, чтобы $\{1, 2, \dots, m-1\} \in \mathcal{K}$. Применим рассуждения Утверждения 3.1 к симплициальному комплексу $\mathcal{K}' = \operatorname{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$ на множестве $[m-1]$. Поскольку $\mathcal{K} = \{\{i_1, \dots, i_k\} : \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m-1]\} \cup \{\{i_1, \dots, i_k, m\} : \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}'\}$, получим, что $U(\mathcal{K}') \simeq D(\mathcal{K})$. □

Итак, дополнения к диагональным конфигурациям, отвечающим симплициальным комплексам на m вершинах размерности $m-2$, можно свести к дополнениям к координатным. Такие симплициальные комплексы обладают интересными комбинаторными свойствами. Например, любой чистый симплициальный комплекс размерности $m-2$ представляется в виде джойна симплекса и границы симплекса.

Утверждение 3.3. *Пусть $\mathcal{K}$ — чистый симплициальный комплекс на $[m]$ размерности $m-2$ без призрачных вершин. Тогда $\mathcal{K} = \Delta^p * \partial\Delta^q$ для некоторых p и q, причем допускается $p = 0$.*

Доказательство. Пусть $I_1, \dots, I_n$ — все грани размерности $m-2$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$, v_k — номер той вершины, которая не входит в I_k, $k = 1, \dots, n$. При этом $\{v_1, \dots, v_n\} \notin \mathcal{K}$.

Рассмотрим пересечение граней $I_1 \cap \dots \cap I_n$. Если $n = m$, то $\mathcal{K} = \partial\Delta^{m-1}$ и утверждение доказано. Иначе это непустой симплекс на $m-n$ вершинах. Обозначим их номера за $w_1, \dots, w_{m-n}$. Покажем, что $\mathcal{K} = \Delta^{m-n-1} * \partial\Delta^{n-1}$, где Δ^{m-n-1} — симплекс на множестве вершин $\{w_1, \dots, w_{m-n}\}$, Δ^{n-1} — симплекс на множестве вершин $\{v_1, \dots, v_n\}$. Для любых $J_1 \in \Delta^{m-n-1}$, $J_2 \in \partial\Delta^{n-1}$ выполнено включение $J_1 \cup J_2 \subset \mathcal{K}$, поскольку J_2 не содержит какую-то вершину v_k и, следовательно, целиком содержится в I_k, а J_1 содержится в I_k по определению Δ^{m-n-1}. Значит, $\Delta^{m-n-1} * \partial\Delta^{n-1} \subset \mathcal{K}$.

Обратное включение $\mathcal{K} \subset \Delta^{m-n-1} * \partial\Delta^{n-1}$ тоже верно. Действительно, любое множество $J \in \mathcal{K}$ имеет вид $J = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}, v_{j_1}, \dots, v_{j_l}\}$, причем среди вершин $v_{j_1}, \dots, v_{j_l}$ присутствуют не все $v_1, \dots, v_n$, так как $\{v_1, \dots, v_n\} \notin \mathcal{K}$. Следовательно, $J = J_1 \cup J_2$, $J_1 = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_k}\} \in \Delta^{m-n-1}$, $J_2 = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_l}\} \in \partial\Delta^{n-1}$. □

Из этого утверждения вытекает, что кольцо когомологий момент-угол комплексов, соответствующих чистым симплициальным комплексам размерности $m-2$, изоморфно кольцу когомологий сферы. В самом деле, если $\mathcal{K} = \Delta^p * \partial\Delta^q$, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \cong \mathcal{Z}_{\Delta^p} \times \mathcal{Z}_{\partial\Delta^q} \cong D^{2p+2} \times S^{2q+1} \simeq S^{2q+1}$, откуда получаем, что $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(S^{2q+1})$. Оказывается, верно и обратное утверждение.

Утверждение 3.4. *Пусть $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(S^{2q+1})$. Тогда $\mathcal{K} = \Delta^p * \partial\Delta^q$ для некоторого p.*

Доказательство. Пусть $\omega \subset [m]$ — минимальное множество, не содержащееся в $\mathcal{K}$. Тогда $\mathcal{K}_\omega$ — это граница симплекса $\partial\Delta^{|\omega|-1}$, следовательно, $\widetilde{H}^{|\omega|-2}(\mathcal{K}_\omega) \cong \mathbb{Z}$. Согласно формуле Хохстера

$$H^k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{k-|J|-1}(\mathcal{K}_J),$$

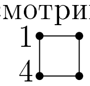
и поэтому $H^{2|\omega|-1}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \neq 0$. Поскольку $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H^*(S^{2q+1})$, единственная ненулевая группа когомологий содержится в размерности $2q+1$, то есть $|\omega| = q+1$.

Пусть теперь $J \subset [m]$ — другое подмножество, которое не содержится в $\mathcal{K}$. Проверим, что $J \supset \omega$. Действительно, рассмотрев минимальное $J' \subset J$ такое, что $J' \notin \mathcal{K}$, получим $|J'| = q+1$, $\widetilde{H}^{q-1}(\mathcal{K}_{J'}) \cong \mathbb{Z}$. При этом, так как $\operatorname{rank} H^{2q+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 1$, то $\mathcal{K}_\omega$ и $\mathcal{K}_{J'}$ — один и тот же подкомплекс. Следовательно, $J' = \omega$, и $J \supset \omega$.

Поскольку ω — единственное минимальное подмножество, не содержащееся в $\mathcal{K}$, мы имеем $[m]\backslash\omega \in \mathcal{K}$. Осталось показать, что $\mathcal{K} = \partial\Delta^{|\omega|-1} * \Delta^{m-|\omega|-1}$, где $\partial\Delta^{|\omega|-1} = \mathcal{K}_\omega$, $\Delta^{m-|\omega|-1} = \mathcal{K}_{[m]\backslash\omega}$. Действительно, все подмножества $J \in \mathcal{K}$ имеют вид $J = I_1 \cup I_2$, где $I_1 \subset \omega$, $I_2 \subset [m]\backslash\omega$, причём $I_1 \neq \omega$, так как $\omega \notin \mathcal{K}$. Также для любых $I_1 \in \mathcal{K}_\omega$, $I_2 \in \mathcal{K}_{[m]\backslash\omega}$ выполнено $I_1 \cup I_2 \in \mathcal{K}$, так как в противном случае $I_1 \cup I_2 \supset \omega$, что невозможно. Тем самым мы получили включения $\mathcal{K} \subset \partial\Delta^{|\omega|-1} * \Delta^{m-|\omega|-1}$ и $\partial\Delta^{|\omega|-1} * \Delta^{m-|\omega|-1} \subset \mathcal{K}$, что и требовалось. $\square$

Таким образом, в утверждении 3.3 мы описали все сипмлициальные комплексы $\mathcal{K}$ размерности $m-2$, для которых кольцо когомологий $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ изоморфно кольцу когомологий сферы.

Отметим также, что условие наличия грани размерности $m-2$ в симплициальном комплексе $\mathcal{K}$ не является необходимым для того, чтобы нашелся $\mathcal{K}'$, для которого $D(\mathcal{K}) \simeq U(\mathcal{K}')$. Это видно на следующем примере.

Пример 3.5. Рассмотрим симплициальный комплекс, являющийся границей четырехугольника: $\mathcal{K} =$ 

. Соответствующее дополнение к диагональной конфигурации имеет вид $D(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^4 \backslash (\{z_1 = z_3\} \cup \{z_2 = z_4\})$. Рассмотрим гомотопию

$$F : \mathbb{C}^4 \times [0,1] \to \mathbb{C}^4,$$

$$F(z_1, z_2, z_3, z_4, t) = (z_1, z_2, z_3, z_4) - t\frac{z_1 + z_3}{2}(1,0,1,0) - t\frac{z_2 + z_4}{2}(0,1,0,1)$$

между тождественным отображением $id : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ и ортогональной проекцией $P : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ на плоскость $\eta : \{z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0\}$. Как и в утверждении 3.1, при каждом $t \in [0,1]$ выполнено включение $F(D(\mathcal{K}), t) \subset D(\mathcal{K})$. Поскольку $F(z,t) = z$ для любого $z \in \eta$, мы получаем гомотопическую эквивалентность $D(\mathcal{K}) \simeq D(\mathcal{K}) \cap \eta$. Рассмотрим линейный изоморфизм $A : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, определенный формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 - z_3, \\ y_2 &= z_2 - z_4, \\ y_3 &= z_1 + z_3, \\ y_4 &= z_2 + z_4. \end{aligned}$$

Этот изоморфизм индуцирует гомеоморфизм $D(\mathcal{K}) \cap \eta \cong U(\mathcal{K}') \subset \{y_3 = 0, y_4 = 0\} \subset \mathbb{C}^4$, где $\mathcal{K}'$ — пустой симплициальный комплекс на множестве $\{1, 2\}$. Действительно,

$$A(D(\mathcal{K}) \cap \eta) = A\left(\left(\mathbb{C}^4 \backslash (\{z_1 = z_3\} \cup \{z_2 = z_4\})\right) \cap \{z_1 + z_3 = 0, z_2 + z_4 = 0\}\right) =$$

$$= \left(\mathbb{C}^4 \backslash (\{y_1 = 0\} \cup \{y_2 = 0\})\right) \cap \{y_3 = 0, y_4 = 0\} = U(\mathcal{K}'),$$

где в последнем равенстве $U(\mathcal{K}')$ рассматривается как подпространство в $\{y_3 = 0, y_4 = 0\}$.

Таким образом, мы получили, что $D(\mathcal{K}) \simeq U(\mathcal{K}')$, хотя симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на 4 вершинах не содержит граней размерности 2.

4 Обобщение результатов

Утверждение 3.1 можно обобщить следующим образом.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$. Тогда имеет место следующая гомотопическая эквивалентность*

$$D(\mathcal{K}) \simeq U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D(\mathcal{K}_{[m-1]}),$$

где симплициальные комплексы $\mathcal{K}_{[m-1]}$ и $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$ (ограничение $\mathcal{K}$ на множество $[m-1]$ и линк вершины $\{m\}$ соответственно) понимаются как симплициальные комплексы на $[m-1]$, а пространства $U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\})$ и $D(\mathcal{K}_{[m-1]})$ рассматриваются в одном и том же пространстве $\mathbb{C}^{m-1}$. При этом симплициальный комплекс $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$ может содержать призрачные вершины.

Доказательство. Как и в утверждении 3.1, имеет место гомотопическая эквивалентность $D(\mathcal{K}) \simeq D(\mathcal{K}) \cap \pi$. Рассмотрим линейный изоморфизм $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, определенный формулами

$$\begin{aligned} &y_i = z_i - z_m, \text{ если } i \leqslant m-1 \\ &y_m = z_1 + \dots z_{m-1} + z_m \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что он задает гомеоморфизм между $D(\mathcal{K}) \cap \pi$ и $U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D(\mathcal{K}_{[m-1]}) \subset \{y_m = 0\} \subset \mathbb{C}^m$. Действительно, все подмножества, которые не входят в $\mathcal{K}$, имеют вид $\{i_1, \dots, i_k, m\}$, где $\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$, либо $\{i_1, \dots, i_k\}$, где $\{i_1, \dots, i_k\} \subset [m-1]$, $\{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}_{[m-1]}$. Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} &D(\mathcal{K}) \cap \pi = \\ &= \mathbb{C}^m \setminus \left(\bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = z_m\} \cup \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}_{[m-1]}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k}\} \right) \cap \\ &\cap \{z_1 + \dots + z_m = 0\} = \left(\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k} = z_m\} \right) \cap \\ &\cap \left(\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}_{[m-1]}} \{z_{i_1} = \dots = z_{i_k}\} \right) \cap \{z_1 + \dots + z_m = 0\} \end{aligned}$$

Так как A — линейный изоморфизм, имеем:

$$\begin{aligned} A(D(\mathcal{K}) \cap \pi) &= \left(\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \{y_{i_1} = \dots = y_{i_k} = 0\} \right) \cap \\ &\cap \left(\mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}_{[m-1]}} \{y_{i_1} = \dots = y_{i_k}\} \right) \cap \{y_m = 0\} = \\ &= U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D(\mathcal{K}_{[m-1]}), \end{aligned}$$

где в последнем равенстве $U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\})$ и $D(\mathcal{K}_{[m-1]})$ рассматриваются как подпространства в гиперплоскости $\{y_m = 0\}$. Таким образом, отображение A индуцирует гомеоморфизм между $D(\mathcal{K}) \cap \pi$ и пересечением $U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D(\mathcal{K}_{[m-1]}) \subset \{y_m = 0\} \subset \mathbb{C}^m$, и, следовательно, мы получаем гомотопическую эквивалентность $D(\mathcal{K}) \simeq U(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D(\mathcal{K}_{[m-1]})$. □

Как и в утверждении 3.1, данный результат также верен для пространств $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ и $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$.

Следствие 4.2. $D(\mathrm{cone}(\mathcal{K})) \simeq D(\mathcal{K})$.

Доказательство. Применим утверждение 4.1 к симплициальному комплексу $\mathrm{cone}(\mathcal{K}) = \mathcal{K} * \{m+1\}$. Поскольку линк вершины $\{m+1\}$ этого конуса совпадает с основанием и равен $\mathcal{K}$, то получаем, что $D(\mathrm{cone}(\mathcal{K})) \simeq U(\mathcal{K}) \cap D(\mathcal{K})$. При этом $D(\mathcal{K}) \subset U(\mathcal{K})$, следовательно, пересечение этих пространств равно $D(\mathcal{K})$. $\square$

Полученный в утверждении 4.1 результат можно применять для вычисления когомологий дополнения к конфигурации диагональных подпространств. В частности, это позволяет воспроизвести результат работы [2] для групп когомологий дополнений к конфигурациям «k равных координат», то есть к дополнениям всевозможных пространств $\{x_{i_1} = \dots = x_{i_k}\}$ в $\mathbb{R}^m$ при фиксированном k.

Теорема 4.3 ([2], теорема 1.1)**.** *Пусть $\mathcal{K} = \mathrm{sk}^d(\Delta^{m-1})$ — d-мерный остов симплекса на m вершинах, $\frac{m}{2} - 2 < d < m-1$. Тогда когомологии $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$ имеют вид:*

$$H^k(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})) = 0, \text{ если } k \neq 0, d$$
$$H^0(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})) = \mathbb{Z}$$
$$H^d(D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})) = \mathbb{Z}^s, \text{ где } s = \sum_{l=d+2}^{m} \binom{m}{l}\binom{l-1}{d+1}$$

Доказательство. Здесь мы обозначаем i-ое число Бетти топологического пространства P за $\beta^i(P)$.

Будем доказывать теорему индукцией по размерности $m = d+2, \dots, 2d+3$. В случае $m = d+2$ имеем гомотопическую эквивалентность $D_{\mathbb{R}}(\mathrm{sk}^d \Delta^{m-1}) = \mathbb{R}^m \setminus \{x_1 = \dots = x_m\} \simeq S^{m-2}$, и утверждение выполнено.

Пусть теперь $\frac{m}{2} - 2 < d < m-2$. Обозначим $\mathcal{K} = \mathrm{sk}^d \Delta^{m-1}$. Тогда согласно утверждению 4.1: $D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}) \simeq U_{\mathbb{R}}(\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}) \cap D_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_{[m-1]})$. Поскольку в d-мерном остове присутствуют все грани на $d+1$ вершине, то $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\} = \mathrm{sk}^{d-1} \Delta^{m-2}$, $\mathcal{K}_{[m-1]} = \mathrm{sk}^d \Delta^{m-1}$. Обозначим $A = D_{\mathbb{R}}(\mathrm{sk}^d \Delta^{m-2})$, $B = U_{\mathbb{R}}(\mathrm{sk}^{d-1} \Delta^{m-2})$. Рассмотрим объединение пространств A и B в $\mathbb{R}^{m-1}$.

$$A \cup B = \mathbb{R}^{m-1} \setminus \left(\bigcup_{\{i_1,\dots,i_k\} \notin \mathcal{K}_{[m-1]}} \{x_{i_1} = \dots = x_{i_k}\} \cap \bigcup_{\{j_1,\dots,j_l\} \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}} \{x_{j_1} = \dots = x_{j_l} = 0\} \right).$$

Любая грань $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, не входящая в $\mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$, содержит по крайней мере $d+1$ вершину, а грань $J = \{j_1, \dots, j_l\}$, не входящая в $K_{[m-1]}$, содержит по крайней мере $d+2$ вершины. Следовательно, у этих граней есть общая вершина в $\mathcal{K}_{[m-1]}$ (по условию теоремы $m-1 < (d+1)+(d+2)$), и пересечение подпространств M_I и L_J, соответствующих этим граням, будет иметь вид:

$$\{x_{i_1} = \dots = x_{i_k} = x_{j_1} = \dots = x_{j_l} = 0\}$$

Таким образом, объединение пространств A и B будет некоторой координатной конфигурацией.

Более того, это объединение будет совпадать с $U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_{[m-1]}) = U_{\mathbb{R}}(\mathrm{sk}^d(\Delta^{m-2}))$. В самом деле: любое подпространство, которое вырезается из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $A\cup B$, имеет вид $L_{I\cup J}$ для некоторых $I \notin \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{m\}$, $J \notin \mathcal{K}_{[m-1]}$. По определению симплициального комплекса, если $J \notin \mathcal{K}_{[m-1]}$, то и $I\cup J \notin \mathcal{K}_{[m-1]}$ для любой грани I. Значит, $A\cup B = \mathbb{R}^{m-1}\setminus\bigcup_{J\notin\mathcal{K}_{[m-1]}} L_J = U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_{[m-1]})$.

Вычислим когомологии пространств A, B и $X = A\cup B = U_{\mathbb{R}}(\mathcal{K}_{[m-1]})$. По предположению индукции $H^d(A) = \mathbb{Z}^{\beta^d(A)}$, где $\beta^d(A) = \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1}$, $H^0(A) = \mathbb{Z}$, и $H^n(A) = 0$ в остальных случаях. Поскольку $U(\mathrm{sk}^i(\Delta^{n-1})) \simeq \mathcal{R}_{\mathrm{sk}^i(\Delta^{n-1})}$ есть букет сфер S^{i+1} в количестве $\sum_{k=i+2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k-1}{i+1}$, когомологии пространства B равны:

$H^0(B) = \mathbb{Z}$
$H^d(B) = \mathbb{Z}^{\beta^d(B)}$, где $\beta^d(B) = \sum_{k=d+1}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d}$
$H^n(B) = 0$ в остальных случаях.

Аналогично получаем, что группы когомологий пространства X имеют вид:

$H^0(X) = \mathbb{Z}$
$H^{d+1}(X) = \mathbb{Z}^{\beta^{d+1}(X)}$, где $\beta^{d+1}(X) = \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1}$
$H^n(X) = 0$ в остальных случаях.

Поскольку множества A и B открыты в X, имеет место точная последовательность Майера–Виеториса:

$$\dots \to H^n(X) \to H^n(A)\oplus H^n(B) \to H^n(A\cap B) \to H^{n+1}(X) \to \dots$$

При $n=0$ фрагмент точной последовательности примет вид

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \to H^0(A\cap B) \to 0.$$

Так как $H^0(A\cap B)$ — свободная абелева группа, то из этого фрагмента получаем, что $H^0(A\cap B) = \mathbb{Z}$. При $n \neq 0, d$ группа $H^n(A\cap B)$ будет расположена между двумя нулевыми группами в точной последовательности, и, следовательно, будет нулевой. При $n = d$ имеем:

$$0 \to \mathbb{Z}^{\beta^d(A)}\oplus\mathbb{Z}^{\beta^d(B)} \to H^d(A\cap B) \to \mathbb{Z}^{\beta^{d+1}(X)} \to 0$$

Следовательно, $H^d(A\cap B) = H^d(A)\oplus H^d(B)\oplus H^{d+1}(X)$ и является свободной абелевой группой. Вычислим ее ранг $\beta^d(A\cap B)$:

$$\beta^d(A\cap B) = \beta^d(A) + \beta^d(B) + \beta^{d+1}(X) =$$
$$= \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1} + \sum_{k=d+1}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d} +$$
$$+ \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1} = \binom{m-1}{d+1} + \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k}{d+1} +$$
$$+ \sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1} = \binom{m-1}{d+1} + \sum_{l=d+3}^{m}\binom{m-1}{l-1}\binom{l-1}{d+1} +$$

$$+\sum_{k=d+2}^{m-1}\binom{m-1}{k}\binom{k-1}{d+1}=\binom{m-1}{d+1}+\sum_{k=d+3}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{k-1}{d+1}+\binom{m-1}{d+1}$$

$$+\binom{m-1}{d+2}=\sum_{k=d+3}^{m-1}\binom{m}{k}\binom{k-1}{d+1}+\binom{m}{d+2}+\binom{m-1}{d+1}=\sum_{k=d+2}^{m}\binom{m}{k}\binom{k-1}{d+1}.$$

Тем самым мы доказали индукционный переход и получили утверждение теоремы.

□

Список литературы

[1] V. M. Buchtaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015

[2] A. Björner, V. Welker, *The homology of "k-equal"manifolds and related partition lattices*, Advances in Math., **110** (1995), 277–313

[3] В. И. Арнольд, *Кольцо когомологий группы крашеных кос*, Матем. заметки, 1969. Т. 5. С. 227-231

[4] I. Peeva, V. Reiner, V. Welker, *Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions*, Composito Math., **117** (1999), no. 1, 30–49

[5] J. Grbić, S. Theriault, *The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement*, Topology **46** (2007), no. 4, 357–396

[6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus Actions and their applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series, vol.24, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002