Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Когомологическая жёсткость многообразий Ботта

Цыганков Д.А.
303 группа

Научный руководитель:
Панов Т.Е.

2021

Содержание

1 Введение

Как известно, если гладкие многообразия диффеоморфны, то их кольца когомологий изоморфны. Обратное верно не всегда, поэтому, чтобы понять, когда это выполняется, нужно рассматривать более узкие классы многообразий.

Для частных случаев многообразий Ботта известно, что они определяются своими кольцами когомологий. Однако в общем случае вопрос открыт даже для многообразий Ботта. В данной работе рассмотрен случай башен Ботта высоты 3

2 Предварительные сведения

2.1 Башни Ботта

Башня Ботта высоты n определяется как последовательность расслоений

$$B_n \to B_{n-1} \to ... \to B_1 \to B_0 = \{pt\}$$

Где $B_1 = \mathbb{C}P^1$, $B_i = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{i-1})$; $i = 2, ..., n$. $\mathbb{C}P(\cdot)$ обозначает комплексную проективизацию, $\underline{\mathbb{C}}$ - тривиальное одномерное расслоение, ξ_{i-1} - комплексное одномерное расслоение над B_{i-1}. Слоем каждого из расслоений $p_i : B_i \to B_{i-1}$ является $\mathbb{C}P^1$. *Многообразием Ботта* называется B_n

Можно применить теорему (**D.4.2, [1]**) для вычисления колец когомологий B_n.

Теорема 2.1 *Пусть u_n первый класс Черна тавтологического линейного расслоения над $B_n = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \xi_{n-1})$. Тогда имеет место изоморфизм $H^*(B_n) \cong H^*(B_{n-1})[u_n]/(u_n^2 - c_1(\xi_{n-1})u_n)$*

На самом деле, в данных обозначениях имеется в виду следдующее $u_{n-1} = p_n^*(u_{n-1}) \in H^2(B_n)$. Для $u_i \in H^*(B_k), i \leq k$ всё аналогично. Линейное расслоение ξ_{n-1} определяется своим первым классом Черна, который можно записать в виде линейной комбинации

$$c_1(\xi_{n-1}) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{n-1,n}u_{n-1} \in H^2(B_{n-1})$$

Значит, любая башня Ботта определяется набором целых чисел $\{a_{ij} : 1 \le i < j \le n\}$. Соотношение из теоремы теперь имеет вид

$$u_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}u_iu_n$$

Следствие 2.1.1 *$H^*(B_n) \cong \mathbb{Z}[u_1, ..., u_n]/(u_1^2, u_i^2 = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}u_ju_i)$, где $2 \le i \le n$*

2.2 Характеристические классы Штифеля-Уитни

В этом разделе (2.2) считается, что все когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$. Пусть M связное замкнутое гладкое многообразие размерности n. *Квадратом Стинрода* называется когомологическая операция, определенная как

$$Sq(x) = x + Sq^1(x) + ... + Sq^n(x), \quad Sq : H^*(M) \to H^*(M)$$

$Sq^i : H^k(M) \to H^{k+i}(M)$ аддитивный гомоморфизм. Можно ввести k-й *класс Ву*: $v_k(M) \in H^k(M)$. Он определяется из слеующих свойств

$$(2.1) \quad v_k(M) \cup x = Sq^k(x), \quad \forall x \in H^{n-k}(M)$$

$$Sq(v(M)) = w(M)$$

Где $v(M) = 1 + v_1(M) + ... + v_n(M)$ полный класс Ву. Аналогично, $w(M) = 1 + w_1(M) + ... + w_n(M)$ полный класс Штифеля-Уитни (**см. [5] стр. 132**). Пусть M' другое связное замкнутое гладкое многообразие размерности n.

Лемма 2.1 *Пусть существует такое r, что $H^*(M)$ порождается $H^r(M)$. Если $H^*(M) \cong H^*(M')$, то $\phi(w(M')) = w(M)$ для любого изоморфизма $\phi : H^*(M') \to H^*(M)$*

Доказательство
Сначала проверим, что ϕ и Sq коммутируют. $H^*(M') \cong H^*(M)$ порождены элементами степени r, поэтому $Sq(y) = y + y^2$ и $Sq(\phi(y)) = \phi(y) + \phi(y)^2$ выполнено $\forall y \in H^r(M')$. Поэтому равенство $Sq(\phi(y)) = \phi(Sq(y))$ проверено для всех элементов степени r. Но тогда это же верно и для всех элементов из $H^*(M')$ в силу того, что $H^*(M')$ и $H^*(M)$ порождены элементами степени r.

$$(2.2) \quad \phi(v_k(M')) \cup \phi(y) = \phi(Sq^k(y)) = Sq^k(\phi(y)), \quad \forall y \in H^{n-k}(M')$$

Используя (2.1) и (2.2), можно получить (2.3)

$$(2.3) \quad \phi(v_k(M')) = v_k(M)$$

Тогда следующая цепочка равенств завершает доказательство леммы.

$$\phi(w(M')) = \phi(Sq(v(M'))) = Sq(\phi(v(M')) = Sq(v(M)) = w(M)$$

$\square$

2.3 Лемма о $H^*(B_3, \mathbb{Q})$.

$H^*(B_2, \mathbb{Q})$ является подкольцом в кольце $H^*(B_3, \mathbb{Q})$ с $u_3 = 0$ (см. **Следствие 2.1.1**). Так как $u_1^2 = 0$ и $(a_{12}u_1 + 2u_2)^2 = 0$, $H^*(B_2, \mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^2, \mathbb{Q})$. Но для B_3 этот изоморфизм не всегда есть, как показывает следующая лемма

Лемма 2.2 *Следующие условия эквивалентны:*
(1) $H^*(B_3, \mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^3, \mathbb{Q})$
(2) $(\sum_{i=1}^3 a_i u_i)^2 = 0$ *для некоторых чисел* $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_3 \neq 0$
(3)$a_{23}(2a_{13} + a_{12}a_{23}) = 0$

Доказательство
(1) $\Leftrightarrow$ (2) Следствие из рассуждений перед леммой
(2) $\Rightarrow$ (3) Известны соотношения $u_1^2 = 0$, $u_2^2 = a_{12}u_1u_2$, $u_3^2 = a_{13}u_1u_3 + a_{23}u_2u_3$. Далее нужно раскрыть $(\sum_{i=1}^3 a_i u_i)^2 = 0$ и обнулить коэффициенты перед u_iu_j

$$(\sum_{i=1}^3 a_i u_i)^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 u_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j u_i u_j$$

$$u_1u_2 : a_2^2 a_{12} + 2a_1a_2 = 0$$

$$u_1u_3 : a_3^2 a_{13} + 2a_1a_3 = 0$$

$$u_2u_3 : a_3^2 a_{23} + 2a_2a_3 = 0$$

Осталось выразить a_{12}, a_{13}, a_{23} из системы уравнений. Можно считать дополнительно, что $a_2 \neq 0$, так как иначе $a_{23} = 0$ и равенство верно.

$$a_{12} = -\frac{2a_1}{a_2}; \quad a_{13} = -\frac{2a_1}{a_3}; \quad a_{23} = -\frac{2a_2}{a_3}$$

Дальше уже ясно, что $a_{23}(2a_{13} + a_{12}a_{23}) = 0$
(3) $\Rightarrow$ (2) Легко проверить, что $(a_{13}u_1 + a_{23}u_2 - 2u_3)^2 = 0$

$\square$

2.4 Проективизация расслоений

Пусть B гладкое многообразие, а E комплексное векторное расслоение над B

Теорема 2.2 *Пусть* $\pi : \mathbb{C}P(E) \to B$ *проекция. Если* $H^*(B)$ *конечно порождено и без кручения, то* $\pi^* : H^*(B) \to H^*(\mathbb{C}P(E))$ *инъективно и справедлива формула*

$$H^*(P(E)) \cong H^*(B)[u]/(\sum_{q=0}^{n} c_q(E)u^{n-q})$$

В случае гладких торических многообразий, а поэтому и для башен Ботта, теорема верна. Под u понимается минус первый класс Черна тавтологического расслоения над $\mathbb{C}P(E)$. Размерность (комплексная) расслоения E равна n. Соотношение из теоремы переписывается и в другом виде

$$c(E) = \prod_{i=1}^{n}(1 + y_i)$$

Где предполагается, что $E = \xi_1 \oplus ... \oplus \xi_n$, ξ_i - одномерные расслоения, y_i соответствующие первые классы Черна

$$\sum_{q=0}^{n} c_q(E)u^{n-q} = \prod_{i=1}^{n}(u + y_i) \quad (2.5)$$

Можно посчитать и полный класс Черна ([**6**]) касательного расслоения вдоль слоёв $T_f\mathbb{C}P(E)$

$$c(T_f\mathbb{C}P(E)) = \prod_{i=1}^{n}(1 + u)^{n-q}c_q(E) = \prod_{i=1}^{n}(1 + u + y_i)$$

Ещё можно посчитать полный класс Понтрягина

$$p(T_f\mathbb{C}P(E)) = \prod_{i=1}^{n}(1 + (u + y_i)^2) \quad (2.6)$$

Пусть $E' \to B'$ другое комплексное векторное расслоение над гладким многообразием B', размерность слоёв такая же, как у расслоения выше.

Утверждение 2.1 *Пусть $\phi : H^*(\mathbb{C}P(E')) \to H^*(\mathbb{C}P(E))$ изоморфизм и $\phi(H^*(B')) = H^*(B)$. Тогда $\phi(p(T_f\mathbb{C}P(E'))) = p(T_f\mathbb{C}P(E))$. Если ещё выполнено $\phi(p(B')) = p(B)$, то $\phi(p(\mathbb{C}P(E'))) = p(\mathbb{C}P(E))$*

Доказательство
Пусть $u' \in H^2(\mathbb{C}P(E))$ определяется аналогично u.

$$\phi(u') = \varepsilon u + w, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad w \in H^2(B) \quad (2.7)$$

Для u' имеются такие же соотношения, что и для u. Можно использовать соотношение (2.5)

$$\phi(\prod_{i=1}^{n}(u' + y_i')) = \prod_{i=1}^{n}(\varepsilon u + w + \phi(y_i'))$$

$$\prod_{i=1}^{n}(\varepsilon u + w + \phi(y_i')) = \varepsilon^n \prod_{i=1}^{n}(u + y_i) \quad (2.8)$$

В обеих частях равенства (2.8) заменим u на $u+i$ и $u-i$, где i мнимая единица. Получим два равенства, перемножим соответствующие части

$$\prod_{i=1}^{n}(1+(\varepsilon u+w+\phi(y_i'))^2)=\prod_{i=1}^{n}(1+(u+y_i)^2)$$

Используя (2.6), (2.7), (2.8), завершим доказательство первой части утверждения

$$\phi(p(T_f\mathbb{C}P(E')))=\phi(\prod_{i=1}^{n}(1+(u'+y_i')^2))=\prod_{i=1}^{n}(1+(\varepsilon u+w+\phi(y_i'))^2)$$

$$\phi(p(T_f\mathbb{C}P(E')))=\prod_{i=1}^{n}(1+(u+y_i)^2)=p(T_f\mathbb{C}P(E))$$

Вторая часть утверждения получается как следствие из того, что

$$T\mathbb{C}P(E)\cong T_f\mathbb{C}P(E)\oplus\pi^*(TB)$$

□

2.5 Характеристические классы Понтрягина

Лемма 2.3 *Первый класс Понтрягина для* B_3 *имеет вид*

$$p_1(B_3)=a_{23}(2a_{13}+a_{12}a_{23})u_1u_2$$

То есть, $p_1(B_3)=0$ *тогда и только тогда, когда* $H^*(B_3,\mathbb{Q})\cong H^*((\mathbb{C}P^1)^3,\mathbb{Q})$

Доказательство
Так как $p(B_1)=1$, используем (2.6).

$$\begin{aligned}p(B_2)&=(1+u_2^2)(1+(u_2-a_{12}u_1)^2)\\&=1\end{aligned}$$

Последнее равенство из-за $u_2^2=a_{12}u_1u_2$
Ещё раз используем (2.6)

$$\begin{aligned}p(B_3)&=(1+u_3^2)(1+(u_3-a_{13}u_1-a_{23}u_2)^2)\\&=1+u_3^2+(u_3-a_{13}u_1-a_{23}u_2)^2\\&=1+a_{23}(2a_{13}+a_{12}a_{23})u_1u_2\end{aligned}$$

□

3 Основной результат

Теорема 3.1 *Многообразия* B_3 *и* B'_3 *диффеоморфны тогда и только тогда, когда их кольца когомологий изоморфны*

$H^*(B_3) \cong \mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3]/(u_1^2, u_2^2 - a_{12}u_1u_2, u_3^2 - a_{13}u_1u_3 - a_{23}u_2u_3)$. Пусть имеется еще одна башня Ботта

$$B'_3 \to B'_2 \to B'_1 \to B'_0 = \{pt\}$$

Обозначания для неё аналогичные: u'_i, a'_{ij}.

Пусть $H^*(B_3) \cong H^*(B'_3)$. Если показать, что существует $\phi : H^*(B'_3) \to H^*(B_3)$ изоморфизм такой, что $\phi(w_2(B'_3)) = w_2(B_3)$ и $\phi(p_1(B'_3)) = p_1(B_3)$, где w_2 второй класс Штифеля-Уитни, а p_1 первый класс Понтрягина, то B_3 и B'_3 диффеоморфны, как следует из **[3]** и **[4]**

То, что второй класс Штифеля-Уитни переходит во второй класс Штифеля-Уитни при ϕ, следует из леммы 2.1. В нашем случае $r = 2$ (см. обозначения из леммы)

Пусть $H^*(B_3, \mathbb{Q}) \cong H^*(B'_3, \mathbb{Q}) \cong H^*((\mathbb{C}P^1)^3, \mathbb{Q})$. Тогда $p_1(B_3) = p_1(B'_3) = 0$ по лемме 2.3, и $\phi(p_1(B'_3)) = p_1(B_3)$

Пусть $H^*(B_3, \mathbb{Q})$ не изоморфно $H^*((\mathbb{C}P^1)^3, \mathbb{Q})$. Тогда по лемме 2.3 не найдется таких чисел $a_i \in \mathbb{Q}, a_3 \neq 0$, что квадрат элемента $\sum_{i=1}^3 a_iu_i$ равен нулю. При этом $u_1^2 = (u_2 - \frac{a_{12}}{2}u_1)^2 = 0$ и $u_1, u_2 - \frac{a_{12}}{2}u_1$ порождают подкольцо $H^*(B_2, \mathbb{Q})$. То же верно и для B'_2, а значит образы u'_1 и $u'_2 - \frac{a'_{12}}{2}u'_1$ при изоморфизме ϕ порождают подкольцо $H^*(B_2, \mathbb{Q})$. Значит, $\phi(H^*(B'_2, \mathbb{Q}) \subset H^*(B_2, \mathbb{Q})$ и можно применить утверждение 2.1 и получить, что $\phi(p_1(B'_3)) = p_1(B_3)$, так как $p(B'_2) = p(B_2) = 1$

□

Список литературы

[1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[2] S. Choi, M. Masuda and D. Y. Suh, *Topological classification of generalized Bott manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2) (2010) 1097–1112.

[3] P. E. Jupp, *Classification of certain 6-manifolds*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 73: 293–300, 1973.

[4] C. T. C. Wall, *Classification problem in differential topology.* V : On certain 6-manifolds Invent. Math., 1: 355–374, 1966.

[5] J. W. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*, Ann. of Math. Studies 76, Princeton N.J. 1974.

[6] A. Borel and F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces* I, Amer. J. Math., 80: 458–538, 1958.