Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Кольца когомологий гиперболических многообразий типа Лёбелля

Цыганков Дмитрий Александрович
403 группа

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

2023

Содержание

1 Введение

В работе изучается гомотопический тип и когомологии некомпактных гиперболических многообразий вида $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$. $\mathbb{L}^n$ - n-мерное пространство Лобачевского, $Ker\phi^{(k)}$ некоторая конкретная подгруппа конечного индекса в группе Коксетера $G(P)$, действующая свободно на $\mathbb{L}^n$. Предполагается, что многогранник P допускает реализацию в $\mathbb{L}^n$ с конечным объёмом и с углами величины $\frac{\pi}{2}$ между гипергранями. Если P компактный, то получаются известные объекты: малые накрытия, вещественные момент-угол многообразия и фактор-многообразия вещественных момент-угол многообразий по свободному действию дискретного тора $\mathbb{Z}_2^t$. Некомпактный случай разобран в данной работе.

Пусть задан $P \subset \mathbb{L}^n$ - прямоугольный многогранник конечного объёма с набором гиперграней $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$. Тогда группа Коксетера многогранника P задаётся следующим образом:

$$G(P) = \left\langle g_1, \dots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i, F_j \text{ соседние гиперграни} \right\rangle$$

Веснин в работе [1] 1987 года построил серию подгрупп конечного индекса в $G(P)$, которые действуют свободно на пространстве Лобачевского. Он рассматривал 3-мерные компактные прямоугольные многогранники, но такая же конструкция работает в других размерностях и для многогранников конечного объёма. Это и есть группы $Ker\phi^{(k)}$, где $\phi^{(k)} : G(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$ является эпиморфизмом — таким, что $Ker\phi^{(k)}$ не содержит элементов конечного порядка. Это условие эквивалентно тому, что $Ker\phi^{(k)}$ действует свободно на $\mathbb{L}^n$.

В случае, если P компактный прямоугольный многогранник в $\mathbb{L}^n$, многообразия $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ являются факторами $\mathcal{R}_P/H$, где $H = \mathbb{Z}_2^{m-k}$ действует свободно, m число гиперграней P. Для некомпактных многогранников пространство $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ будет представлять из себя некомпактное обобщение малых накрытий и вещественных момент-угол пространств.

В работе используется категорный подход к изучению таких многообразий в случае, когда они обобщают вещественные момент-угол-многообразия, то есть $Ker\phi^{(k)} = G'(P)$. Аналогичными методами Айзенберг и Бухштабер в [3] доказали, что момент-угол пространство над непростым многогранником гомотопически эквивалентно момент-угол комплексу над нерв-комплексом многогранника.

Оказывается, что такие обобщённые вещественные момент-угол комплексы можно мыслить себе как гомотопический копредел некоторой диаграммы, из этого можно понять их гомотопический тип. Гомотопические копределы хорошо взаимодействуют с разными алгебраическими инвариантами. Например, всегда есть спектральная последовательность, которая сходится к когомологиям копредела, см [4].

В случае общих многообразий типа Лёбелля $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ имеется гомотопическая эквивалентность: $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/H$, где $H \subseteq \mathbb{Z}_2^m$ свободно действующий дискретный тор на вещественном момент-угол пространстве $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$, где $\mathcal{K}_P$ нерв-комплекс многогранника P с учётом того, что некоторых вершин нет, так как они лежат на абсолюте. На самом деле, $H \cong Ker\Lambda$, где Λ получается из разложения

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Таким образом, имеется полная аналогия с малыми накрытиями. $Ker\Lambda$ действует свободно на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда Λ являестя характеристической функцией. Многообразие $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ можно однозначно построить по многограннику P и по характеристической функции Λ, поэтому будем обозначать их $N(P,\Lambda)$. Классы эквивалентности характеристических пар (P,Λ) соответствуют классам слабого эквивариантного гомеоморфизма многообразий $N(P,\Lambda)$.

Рассуждения с многообразиями $N(P,\Lambda)$ абсолютно так же обобщаются на многогранники, у которых удалили некоторые грани. Пусть $\mathring{P}$ многогранник без некоторых граней. Тогда $N(\mathring{P},\Lambda) \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_{\mathring{P}}}/H$, где Λ то же, что и для P, а $N(\mathring{P},\Lambda) \simeq \widetilde{\mathbb{L}}^n/Ker\phi^{(k)}$ - так как мы выбросили некоторые грани, их копии нужно удалить из $\mathbb{L}^n$, поэтому группа $Ker\phi^{(k)}$ будет действовать на меньшем пространстве $\widetilde{\mathbb{L}}^n$.

В [11] и [12] для колец когомологий $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/H$ даны дга-модели для любых коэффициентов. В случае, если 2 в кольце R обратима, явно описана аддитивная структура и умножение, но в общем случае эффективного описания нет.

Тем не менее, кольца когомологий $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/H$ в случае, когда это пространство гомотопически эквивалентно обобщённым малым накрытиям $N(P,\Lambda)$, а многогранник P идеальный или с одной идеальной вершиной, достаточно прост и обобщает когомологии малых накрытий.

Теми же методами, что использовали Дэвис и Янушкевич в [2] проверяется, что расслоение $N(P,\Lambda) \longrightarrow E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} N(P,\Lambda) \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^n$ устроено достаточно хорошо: несмотря на неодносвязность базы, её фундаментальная группа действует тривиально на когомологиях слоя, поэтому спектральная последовательность Лере-Серра сходится к $H^*(E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} N(P,\Lambda);\mathbb{Z}_2)$. В нашем случае в расслоении выше $N(P,\Lambda)$ заменяется многообразием типа Лёбелля.

Используется Коэн-Маколеевость нерв-комплекса идеальных прямоугольных многогранников и прямоугольных многогранников с одной идеальной вершиной. Можно сказать даже больше: если многогранник не идеальный и имеет идеальные вершины, то, если удалить все вершины, которые не лежат на абсолюте, нерв-комплекс будет Коэн-Маколеевым. Коэн-Маколеевость влечёт вырождение спектральной последовательности Лере-Серра во втором листе и даёт достаточно простой вид кольца когомологий.

Если многогранник P некомпактный, неидеальный и более чем с одной идеальной вершиной, его нерв-комплекс никогда не Коэн-Маколеев, а спектральная последовательность не вырождается во втором листе, это следует из [2]. Но удаление граней P позволяет редактировать нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$, в том числе получать Коэн-Маколеевый подкомплекс.

Стоит отметить, что прямоугольные многогранники конечного объёма могут существовать в $\mathbb{L}^n$, если $n \leq 14$ [15]. Примеры таких многогранников известны не во всех размерностях и может оказаться, что верхняя оценка неточна. Поэтому многообразия $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ могут существовать не во всех размерностях и мы будем опускать эти сложности. Было бы интересно понять, накладывает ли существование таких многообразий какие-либо ограничения на размерность или на другие комбинаторные характеристики.

2 Предварительные сведения

2.1 Малые накрытия и вещественные момент-угол многообразия

Малые накрытия и вещественные момент-угол-многообразия достаточно хорошо изучены. Есть и комплексные версии этих конструкций. Изначально малые накрытия были введены в [2]. Там же изучены когомологии малых накрытий. Про когомологии вещественных момент-угол-комплексов написано в [5], [6]. В современной форме подробнее про эти конструкции написано в [7] и ещё более подробно в [8].

Определение 2.1 *Малым накрытием над простым n-мерным многогранником называется n-мерное многообразие N такое, что:*

1)Имеется локально стандартное действие дискретного тора $\mathbb{Z}_2^n$ на N. То есть, каждая точка $x \in N$ содержится в $\mathbb{Z}_2^n$-инвариантной окрестности, которая $\mathbb{Z}_2^n$-эквивариантно гомеоморфна открытому подмножеству в $\mathbb{R}^n$, а в $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{Z}_2^n$ действует отражениями относительно координатных плоскостей

2)Имеется проекция $\pi : N \longrightarrow P$, слоями которой являются орбиты $\mathbb{Z}_2^n$ действия

Имеется возможность конструктивно определить малые накрытия.

Определение 2.2 *Пусть P n-мерный многогранник с m гипергранями $F_1, ..., F_m$. Пусть Λ - матрица размера $n \times m$ с элементами из $\mathbb{Z}_2$, столбцы $\lambda_i = (\lambda_{1i}, ..., \lambda_{ni})$ обладают следующим свойством:*

$$det(\lambda_{i_i}, ..., \lambda_{i_n}) = \pm 1, F_{i_1} \cap ... \cap F_{i_n} \neq \varnothing$$

Тогда пара (P, Λ) называется характеристической

По каждой характеристической матрице можно построить малое накрытие

$$N(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim$$

где $(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2, \quad t_1 \cdot t_2^{-1} \in T(x_1)$. $T(x) = \prod_{i : x \in F_i} T_i$, где T_i одномерный подтор в $\mathbb{Z}_2^n$, порождённый вектором λ_i. Получается, что многообразие $N(P, \Lambda)$ представляет собой склейку вдоль граней 2^n экземпляров многогранника P.

Верно и обратное: по каждому малому накрытию можно построить характеристическую матрицу такую, что из неё и многогранника можно будет построить малое накрытие.

Однако, если многогранник имеет размерность больше 3, то не всегда можно построить характеристическую матрицу, а значит не над каждым простым многогранником есть малое накрытие. Примеры есть в [2]. Так же, если многогранник не простой, никаких малых накрытий над ним нет.

По n-мерному многограннику P можно построить ещё один объект: вещественное момент-угол-многообразие $\mathcal{R}_P$. Теперь многогранник предполагается произвольным простым, ограничений в виде отсутствия характеристической матрицы нет.

Определение 2.3 *Многообразие $\mathcal{R}_P$ определяется из следующей коммутативной диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_P \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\mu"] \\
P \arrow[r, "i_P"] & \mathbb{R}^m_{\geq}
\end{tikzcd}$$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | < \mathbf{a}_i, \mathbf{x} > + b_i \geq 0; \;\; i = 1, ..., m \right\}$$

i_P - вложение многогранника в положительный ортант

$$i_P : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto (< \mathbf{a_1}, \mathbf{x} > + b_1, \ldots, < \mathbf{a_m}, \mathbf{x} > + b_m)$$

$$\mu : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\geq}, \quad (x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1^2, \ldots, x_m^2)$$

Получено n-мерное многообразие $\mathcal{R}_P = \mu^{-1}(i_P(P))$, которое задано как пересечение $m - n$ квадрик в $\mathbb{R}^m$.

Если имеется характеристическая матрица Λ для многогранника P, то можно задать $\mathbb{Z}_2$-линейное отображение $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^n$. Тогда $Ker\Lambda$ является $(m-n)-$мерным дискретным тором, который свободно действует на $\mathcal{R}_P$. Если профакторизовать по этому действию, получится малое накрытие, происходящее из характеристической пары (P, Λ):

$$\mathcal{R}_P / Ker\Lambda \cong N(P, \Lambda)$$

2.2 Построение группы $Ker\phi^{(k)}$ и многообразий типа Лёбелля

Первый пример замкнутого 3-многообразия с гиперболической структурой был построен Лёбеллем в 1931г., тогда это была известная открытая проблема. В работе [1] была построена целая серия таких многообразий.

Пусть P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$. За m обозначим число гиперграней P. Тогда прямоугольнаы группа Коксетера $G(P)$ задана образующими и соотношениями:

$$G(P) = \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i,\ \text{если } F_i, F_j \text{ соседние гиперграни} \rangle$$

Группа $G(P)$ действует на $\mathbb{L}^n$ отражениями относительно гиперплоскостей, которые содержат гиперграни P. У такого действия имеются нетривиальные стабилизаторы в гранях P, поэтому действие не свободно. На самом деле, $\mathbb{L}^n/G(P)$ представляет собой исходный многогранник.

Лемма 2.1 *Пусть имеется эпиморфизм $\phi^{(k)} : G(P) \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1)Подгруппа $Ker\phi^{(k)} \subset G(P)$ не содержит элементов конечного порядка.
2)Образы отражений $g_{i_1}, \ldots, g_{i_r}$ в любых r гранях $F_{i_1}, \ldots, F_{i_r}$, имеющих общую вершину, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^k$.
3)Группа $Ker\phi^{(k)}$ действует свободно на $\mathbb{L}^n$.

Лемма была сформулирована и доказана в более частном случае: компактные прямоугольные 3-многогранники, однако она легко обобщается.

Определение 2.4 *Многообразием типа Лёбелля будем называть гиперболическое многообразие $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$*

Эпиморфизм $\phi^{(k)}$ допускает разложение в композицию по универсальному свойству гомоморфизма абеленизации:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$

Λ - линейное отображение $\mathbb{Z}_2$-пространств. Его можно мыслить себе как матрицу с элементами из $\mathbb{Z}_2$, на которую накладываются те же условия, что и на характеристическую матрицу малого накрытия над многогранником P.

В случае компактного P многообразие $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)}$ становится малым накрытием $N(P,\Lambda)$, если многогранник P допускает характеристическую матрицу.

Если же $k=m$, то $Ker\phi^{(m)}=G'(P)$. В случае компактного P снова понятно, что это за пространство: $\mathbb{L}^n/G'(P)\cong\mathcal{R}_\mathcal{P}$

В общем случае получается, что $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ имеет гомотопический тип пространства Эйленберга-Маклейна $K(Ker\phi^{(k)},1)$. Это следует из того, что $\mathbb{L}^n$ - стягиваемое универсальное накрытие.

Это ещё одна мотивация к изучению когомологий многообразий типа Лёбелля, ведь это даёт когомологии групп $Ker\phi^{(k)}$.

2.3 Коэн-Маколеевость симплициальных комплексов

Коэн-Маколеевость алгебры это гомологическое свойство, которое появилось задолго до возникновения торической топологии. Оно представляет самостоятельный интерес, поскольку такие алгебры допускают существование регулярной последовательности.

В нашем случае эта регулярная последовательность будет порождать идеал в кольце когомологий и давать вырожденность спектральной последовательности расслоения.

В определениях далее предполагается, что A является $\mathbb{N}-$градуированной алгеброй над полем $\mathbb{K}$ или над $\mathbb{Z}$. Размерность Крулля A равняется n.

Определение 2.5 *Последовательность $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ однородных элементов из A называется однородной системой параметров, если размерность Крулля $A/(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ равна нулю.*

Определение 2.6 *Однородная система параметров $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ алгебры R называется регулярной последовательностью, если λ_{i+1} не является делителем нуля в $A/(\lambda_1,\ldots,\lambda_i)$.*

Имеется следующее эквивалентное определение регулярной последовательности.

Определение 2.7 *Последовательность алгебраически независимых элементов $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in R$ называется регулярной последовательностью, если R является конечномерным свободным $\mathbb{K}[\lambda_1,\ldots,\lambda_n]-$модулем.*

Определение 2.8 *Симплициальный комплекс на множестве $[m]$ называется Коэн-Маколеевым над $\mathbb{K}$, если $\mathbb{K}[\mathcal{K}]$ удовлетворяет свойству Коэн-Маколеевости.*

Имеется следующий критерий Коэн-Маколеевости, доказанный Рейснером в [13].

Утверждение 2.1 *Кольцо $\mathbb{K}[\mathcal{K}]$ Коэн-Маколеево над $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\sigma\in\mathcal{K}$ выполнено $\widetilde{H}_i(link(\sigma);\mathbb{K})\cong 0$, где $i<dim(link(\sigma))$*

3 Основные результаты

3.1 Гомотопический тип пространства $\mathbb{L}^n/G'(P)$

Рассматривается случай $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(m)} = \mathbb{L}^n/G'(P)$, где m количество гиперграней у прямоугольного многогранника Коксетера конечного объёма P, а $dimP = n$.

Пусть $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ обозначает набор гиперграней многогранника P. Двугранные углы между F_i и F_j равны $\frac{\pi}{2}$, это даёт соответствующее соотношение. Группа Коксетера задаётся следующим образом:

$$G(P) = \left\langle g_i \mid (g_i g_j)^2 = 1,\ g_i^2 = 1 \right\rangle$$

Далее используется категорный подход, применимый ко многим объектам торической топологии, развит в работах Панова и Рея [14] и в работе Айзенберга и Бухштабера [3].

Утверждение 3.1 *Многообразие $\mathbb{L}^n/G'(P)$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$, где $\mathcal{K}_P$ нерв-комплекс многогранника P*

$\triangleright$

Предстоит проверить следующую цепочку эквивалентностей:

$$\mathbb{L}^n/G'(P) \cong (P \times \mathbb{Z}_2^m)/\sim\ \simeq \underset{Cat(P)}{hocolim}(\Phi_P) \simeq \underset{Cat(P)}{hocolim}(\widetilde{\Phi}_P) =$$

$$= \underset{Cat(G_P)}{hocolim}(\mathcal{D}_{G_P}) \simeq \underset{Cat(\mathcal{K}_P)}{hocolim}(\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P}) \simeq \underset{Cat(\mathcal{K}_P)}{colim}(\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P}) \cong (D^1, S^0)^{\mathcal{K}_P}$$

$\simeq$ обозначает гомотопическую эквивалентность, а под $\cong$ понимается гомеоморфизм. Первая эквивалентность проверяется непосредственно.

Лемма 3.1 $(P \times \mathbb{Z}_2^m)/\sim\ \simeq \underset{Cat(P)}{hocolim}(\Phi_P)$, *где* $(x, g) \sim (x, h) \iff gh^{-1} \in T(x) = \prod\limits_{i:x \in F_i} T_i$, *где T_i одномерный тор в $\mathbb{Z}_2^m$, порождённый базисным вектором e_i.*

$\triangleright$

Используется явная конструкция гомотопического копредела.

$$\underset{Cat(P)}{hocolim}(\Phi_P) = \left(\coprod_{F \in Obj(Cat(P))} B(F \downarrow Cat(P)) \times \Phi_P(F) \right) / \sim$$

Под $Cat(P)$ будет пониматься категория граней многогранника P. Объектами являются грани, включая сам многогранник P, пустое множество гранью не считаем. Морфизмами являются обратные включения граней.

Построим диаграмму $\Phi_P : Cat(P) \longrightarrow Top$. $\Phi_P(F) = (S^0)^{[m] \setminus \sigma(F)}$, где $\sigma(F)$ - подмножество в $[m]$, которое состоит из тех номеров гиперграней, из которых грань F получается пересечениями: $F = \bigcap\limits_{i \in \sigma(F)} F_i$.

На морфизмах в $Cat(P)$ действие устроено так:

$$\Phi_P(\{F \supseteq G\}) = \{(S^0)^{[m]\setminus\sigma(F)} = (S^0)^{[m]\setminus\sigma(G)} \times (S^0)^{\sigma(G)\setminus\sigma(F)} \longrightarrow (S^0)^{[m]\setminus\sigma(G)}\} = q_{F,G}$$

Это одно из мест, где формально нужно обратить стрелки в $Cat(P)$, потому что под диаграммой обычно понимается ковариантный функтор.

Отношение эквивалентности задано так

$$(x,y) \sim (x, \Phi_P(F \supseteq G)(y)), \text{ где } x \in B\left(G \downarrow Cat(P)\right) \subseteq B\left(F \downarrow Cat(P)\right), y \in \Phi_P(F)$$

$B\left(F \downarrow Cat(P)\right)$ означает классифицирующее пространство категории запятой $F \downarrow Cat(P)$. Явная проверка показывает, что это пространство представляет собой барицентрическое подразбиение грани F. Здесь тоже существенно обращение морфизмов в $Cat(P)$.

Многогранник P ретрагируется на своё барицентрическое подразбиение. В случае, если многогранник неидеальный, это гомеоморфизм. Чуть более подробно см в доказательстве **Леммы 3.7**.

Это же верно и для всех граней F, поэтому мы будем отождествлять пространства F и $B(F \downarrow Cat(P))$.

Явная конструкция гомотопического копредела представляет собой дизъюнктное объединение пространств и содержит в себе пространство $P \times (\mathbb{Z}_2)^{[m]}$, в которое можно вложить все остальные. Например,

$$F_1 \times (\mathbb{Z}_2)^{[m]\setminus\{1\}} \hookrightarrow P \times (\mathbb{Z}_2)^{[m]}$$

И все такие вложения просто отождествляют вложенное подпространство с подмножеством в $P \times (\mathbb{Z}_2)^{[m]}$ в силу отношения эквивалентности. Это значит, что

$$\underset{Cat(P)}{hocolim}(\Phi_P) = P \times (\mathbb{Z}_2)^{[m]}/\sim, \text{ где } (x,t) \sim (x, q_{P,F}(t)),\ t \in \Phi_P(P) = \mathbb{Z}_2^{[m]}$$

Осталось понять, что отношение эквивалентности такое, какое нужно. Пусть $x \in relintF$, где $F = \bigcap\limits_{i \in \sigma(F)} F_i$. Тогда $q_{P,F}(t) = (0, \ldots, 0, t_r, \ldots t_m)$ - нули стоят на тех местах, в номера гиперграней которых попала точка x - не обязаны быть упорядоченными, это для наглядности. Тогда $t \cdot q_{P,F}(t)^{-1} \in \mathbb{Z}_2^{\sigma(x)}$. Проверили, что

$$(x,t) \sim (x, q_{P,F}(t)) \Longrightarrow t \cdot q_{P,F}(t)^{-1} \in \mathbb{Z}_2^{\sigma(x)}$$

В обратную сторону это тоже верно, что полностью завершает доказательство. $\triangleleft$

Диаграмма $\widetilde{\Phi}_P$ для третьей эквивалентности устроена так

$$\widetilde{\Phi}_P : Cat(P) \longrightarrow Top$$

$$\widetilde{\Phi}_P(F) = (S^0)^{[m]\setminus\sigma(F)} \times (D^1)^{\sigma(F)}$$

$$\widetilde{\Phi}_P(F \supseteq G) = (S^0)^{[m]\setminus\sigma(F)} \times (D^1)^{\sigma(F)} \hookrightarrow (S^0)^{[m]\setminus\sigma(G)} \times (D^1)^{\sigma(G)}$$

Для каждой грани F имеется гомотопическая эквивалентность $\widetilde{\Phi}_P(F) \simeq \Phi_P(F)$, которая задаёт морфизм диаграмм Φ_P и $\widetilde{\Phi}_P$. По свойствам гомотопического копредела получаем третью эквивалентность, так как он сохраняет слабые эквивалентности.

Пусть G некоторый гиперграф на m вершинах. Тогда для него, по аналогии с симплициальным комплексом, можно определить полиэдральное произведение для пары (D^1, S^0)

$$(D^1, S^0)^G = \bigcup_{\sigma \in G} (D^1)^\sigma \times (S^0)^{[m]\setminus\sigma}$$

Диаграмма $\mathcal{D}_G : Cat(G) \longrightarrow Top$ определяется так: $\mathcal{D}_G(\sigma) = (D^1)^\sigma \times (S^0)^{[m]\setminus\sigma}$ и $\mathcal{D}_G(\sigma \hookrightarrow \tau) = (D^1)^\sigma \times (S^0)^{[m]\setminus\sigma} \hookrightarrow (D^1)^\tau \times (S^0)^{[m]\setminus\tau}$, где $\sigma, \tau \in G$

Лемма 3.2 $\underset{Cat(P)}{hocolim}(\widetilde{\Phi}_P) = \underset{Cat(G_P)}{hocolim}(\mathcal{D}_{G_P})$

$\triangleright$ $Cat(P) \cong G_P$ как частично упорядоченные множества, см [3, Лемма 4.7]. Тогда категории $Cat(P)$ и $Cat(G_P)$ эквивалентны: $F \longleftrightarrow \{i | F \subseteq F_i\}$ такое соответствие задаёт два функтора $F : Cat(P) \longrightarrow Cat(G_P)$, $G : Cat(G_P) \longrightarrow Cat(P)$ композиции которых естественно изоморфны тождественным функторам на $Cat(P)$ и $Cat(G_P)$.

На объектах, которые одинаковы в смысле эквивалентности выше, диаграммы совпадают: $\widetilde{\Phi}_P(F) = (D^1)^{\sigma(F)} \times (S^0)^{[m]\setminus\sigma(F)} = \mathcal{D}_{G_P}(\{i | F \subseteq F_i\})$. Гомотопические копределы двух одинаковых диаграмм совпадают. $\triangleleft$

На частично упорядоченном множестве $\mathcal{K}_P$ задана функция замыкания [3, Определение 4.15]. Замкнутыми симплексами являются в точности элементы множества G_P. По [3, Лемма 6.1] имеется гомотопическая эквивалентность: $\underset{Cat(G_P)}{hocolim}(\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P}|_{G_P}) \simeq \underset{Cat(\mathcal{K}_P)}{hocolim}(\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P})$, при этом ограничение диаграммы $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P}$ совпадает с $\mathcal{D}_{G_P}$. Отсюда следует пятая эквивалентность.

Пара (D^1, S^0) является клеточной, а вложение $S^0 \hookrightarrow D^1$ является корасслоением, тогда по [8, Утверждение 8.1.1] диаграмма $\mathcal{D}_{\mathcal{K}_P}$ Риди-кофибрантна. Для таких диаграмм существует гомотопическая эквивалентность между обычным копределом и гомотопическим.

$\mathcal{R}_\mathcal{K} = \underset{I \in \mathcal{K}}{colim}(D^1, S^0)^I$. Это выполнено для любых полиэдральных произведений любых пар, а не только (D^1, S^0).
$\triangleleft$

Замечание 3.1 *В точности такого описания, как в утверждении выше, в случае общих (непрямоугольных) многогранников Коксетера конечного объёма нет. $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = RC'_\mathcal{K}$ - коммутант абстрактной прямоугольной группы Коксетера, построенной по $\mathcal{K}$, а $\pi_1(\mathbb{L}^n/G'(P)) = G'(P)$, где $G'(P)$ коммутант непрямоугольной группы Коксетера.*

Непосредственно из доказательства **Утверждения 3.1** имеется следующее обобщение на многогранники без граней. Под удалением понимается удаление не только внутренних точек грани, но и границы — то есть, подграни тоже удаляются.

Следствие 3.1 *Пусть P многогранник Коксетера с прямыми углами — компактный или некомпактный, конечного объёма. Пусть $\mathring{P}$ многогранник, в котором удалили некоторые грани. Тогда $\widetilde{\mathbb{L}}^n/G'(P)$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_{\mathring{P}}}$.*

Пространство Лобачевского разбивается на бесконечное число копий многогранника P. Если из P удалить некоторые грани $F_1, \ldots, F_s \subset P$, то, чтобы проводить ту же конструкцию склейки, нужно удалить из $\mathbb{L}^n$ все копии всех F_i. Обозначим получившееся пространство за $\widetilde{\mathbb{L}}^n$. Заметим, что идеальные вершины удаляться из $\mathbb{L}^n$ не будут, так как их там итак нет.

Под $\mathcal{K}_{\mathring{P}}$ понимается нерв-комплекс покрытия $\mathring{P}$ гипергранями. Он получается из $\mathcal{K}_P$ следующим образом: удаление некоторой грани соответствует удалению симплекса в комплексе $\mathcal{K}_P$.

Коммутант группы Коксетера $G'(P)$ свободно действует на $\widetilde{\mathbb{L}}^n$ как и ранее. Удаление некоторых граней привело к удалению некоторых орбит действия $G'(P)$ на $\mathbb{L}^n$.

В **Следствии 3.1** допускается даже удаление гиперграней, в этом случае предполагается, что $\mathcal{K}_P$ имеет призрачные вершины. В частности, удаление абсолютно всех гиперграней привело бы к тому, что $\widetilde{\mathbb{L}}^n/G'(P)$ представляло бы собой несвязное объединение 2^m копий $\mathring{P} = intP$, гомотопически это набор точек, что соответствует вещественному момент-угол пространству над симплициальным комплексом со всеми призрачными вершинами.

Интересно это тем, что такое выбрасывание граней в P соответствует выбрасыванию симплексов в нерв-комплексе $\mathcal{K}_P$. То есть, вещественное момент-угол пространство над любым подкомплексом в нерв-комплексе некомпактного или компактного многогранника Коксетера с прямыми углами можно мыслить себе как склейку некоторых многогранников в $\mathbb{L}^n$, из которых удалили некоторые грани. Интересно, насколько широкий класс $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ можно получить таким образом. Очевидно, что есть ограничение сверху на размерность $\mathcal{K}$, так как прямоугольные многогранники существуют в $\mathbb{L}^n$ не для любых n.

А ещё эффективное описание колец когомологий многообразий типа Лёбелля получается, если нерв-комплекс многогранника P Коэн-Маколеев (см. ниже). Прямоугольные многогранники конечного объёма не всегда обладают этим свойством, но удаление граней это инструмент, который позволяет редактировать нерв-комплекс, что потенциально может быть интересным.

Есть следующая интересная интерпретация **Утверждения 3.1**. Соответствующий результат известен.

Следствие 3.2 *Всякий многогранник P конечного объёма, допускающий реализацию в $\mathbb{L}^n$ с прямыми углами, является флаговым.*

$\triangleright$

$\mathcal{R}_K$ является асферическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ флаговый. В нашем случае пространство $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(m)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$ асферично, поэтому $\mathcal{K}_P$ флаговый, а значит и P флаговый.

$\triangleleft$

3.2 Гомотопический тип многообразий Лёбелля

Ниже приведено полное описание гомотопического типа пространств $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$. Предполагается, что k таково, что $Ker\phi^{(k)}$ может свободно действовать на $\mathbb{L}^n$.

Поскольку P в **Утверждении 3.1** предполагался прямоугольным многогранником конечного объёма в $\mathbb{L}^n$, здесь предполагается то же самое.

Утверждение 3.2 $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$, *где Λ получается из разложения $\phi^{(k)} : G(P) \xrightarrow{Ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$*

$\triangleright$

Из **Утверждения 3.1** известно, что $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(m)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$. Ясно, что $Ker\Lambda \cong Ker\phi^{(k)}/Ker\phi^{(m)}$

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda \simeq (\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(m)})/(Ker\phi^{(k)}/Ker\phi^{(m)}) \cong \mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$$

$\triangleleft$

Утверждение 3.2 доказано исключительно с помощью изучения структуры группы $Ker\phi^{(k)}$, поэтому имеется следующее обобщение.

Следствие 3.3 *Если P прямоугольный многогранник конечного объёма в $\mathbb{L}^n$, а $\overset{\circ}{P}$ представляет собой многогранник, из которого удалили некоторые грани, то*

$$\widetilde{\mathbb{L}}^n/Ker\phi^{(k)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_{\overset{\circ}{P}}}/Ker\Lambda$$

Пусть теперь $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ произвольный вещественный момент-угол комплекс, $\mathcal{K}$ некоторый симплициальный комплекс на m вершинах. Пусть есть $\mathbb{Z}_2-$линейное отображение $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$ - эпиморфизм. Λ называется характеристической функцией, если

$$\Lambda(e_{i_1}), \dots \Lambda(e_{i_s}) \text{ линейно независимы в } \mathbb{Z}_2^k \text{ при } \{i_1, \dots i_s\} \in \mathcal{K}$$

На $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ стандартным образом действует группа $\mathbb{Z}_2^m$. Любую достаточно большую подгруппу в $\mathbb{Z}_2^m$ можно представлять себе как $Ker\Lambda$. Следующая лемма доказана в [10, lemma 1.1].

Лемма 3.3 *Группа $Ker\Lambda$ действует на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ свободно тогда и только тогда, когда Λ является характеристической функцикей*

Так как многообразие $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$ однозначно строится по многограннику P и $\mathbb{Z}_2-$линейному отображению $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \longrightarrow \mathbb{Z}_2^k$, введём обозначение $N(P,\Lambda) = \mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$.

(P,Λ) можно рассматривать как аналог характеристической пары для малых накрытий. Две пары (P_1,Λ_1) и (P_2,Λ_2) называются *эквивалентными*, если P_1 и P_2 комбинаторно эквивалетны и $\Lambda_1 = A\Lambda_2 B$, где $A \in GL(n,\mathbb{Z}_2)$, B диагональная матрица с ± 1 на диагонали. По аналогии с [2; предложение 1.8] доказывается лемма.

Лемма 3.4 *Имеется взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности характеристических пар (P,Λ) и классами слабого эквивариантного (относительно действия группы $\mathbb{Z}_2^m$) гомеоморфизма многообразий $N(P,\Lambda)$*

В итоге класс эквивалентности характеристической пары (P,Λ) взаимно-однозначно с точностью до слабого эквивариантного гомеоморфизма соответствует многообразию $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)}$, где $Ker\phi^{(k)}$, Λ, P связаны следующим образом:

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^k$$
$$Ker\phi^{(k)} = \Lambda \circ ab$$

3.3 Кольца когомологий многообразий Лёбелля

Для произвольных коэффициентов нет эффективного описания кольца когомологий, под R в формуле для аддитивной структуры далее понимается коммутативное кольцо с единицей и с обратимой 2, это связано с использованием конструкции трансфера в [11] и тем, что накрытие $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{K}}/Ker\Lambda$ является 2^s-листным.

$$H^p(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}/Ker\Lambda; R) \cong \bigoplus_{\omega \in \phi(row\Lambda)} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_\omega; R)$$

Под $\mathcal{K}_\omega$ понимается полный подкомплекс в $\mathcal{K}$ на вершинах из ω. $row\Lambda$ — линейное $\mathbb{Z}_2-$пространство, порождённое строками матрицы Λ. А $\phi : (\mathbb{Z}_2^m, +) \longrightarrow (2^{[m]}, \Delta)$ изоморфизм групп, устроенный так: $\phi(v) = \{i | v_i \neq 0\}$. На прямой сумме выше описано умножение в [11].

Дэвис и Янушкевич в [2] считали когомологии малых накрытий и квазиторических многообразий над простым многогранником P из соображений вырождения во втором листе спектральной последовательности Лере-Серра расслоения

$$N(P,\Lambda) \longrightarrow E\mathbb{Z}_2^n \times_{\mathbb{Z}_2^n} N(P,\Lambda) \longrightarrow B\mathbb{Z}_2^n$$

Спектральная последовательность сходится, несмотря на неодносвязность базы. Явно проверяется, что фундаментальная группа $\pi_1(B\mathbb{Z}_2^n) = \mathbb{Z}_2^n$ действует тривиально на когомологиях слоя.

Вырождение происходит засчёт Коэн-Маколеевости нерв-комплекса $\mathcal{K}_P$, который в случае простого многогранника P является триангуляцией сферы.

Можно проследить, что и в нашем случае имеет место вырождение спектральной последовательности Лере-Серра того же расслоения с тем лишь изменением, что P прямоугольный многогранник Коксетера конечного объёма.

Самым простым вариантом будет не проверять, что доказательство Дэвиса и Янушкевича сходимости спектральной последовательности такое же в нашем случае. Ими в [2] были посчитаны когомологии малых накрытий над $P_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{K}$ Коэн-Маколеев симплициальный комплекс, а $P_{\mathcal{K}}$ двойственный простой полиэдральный комплекс к $\mathcal{K}$. Оказывается, что наша конструкция малых накрытий над некомпактными многогранниками Коксетера гомотопически представляет собой частный случай конструкции малых накрытий над $P_{\mathcal{K}}$.

Следующий результат доказан в статье [3, Утверждение 4.3] в случае произвольного многогранника P. Пусть имеется следующее отображение

$$\sigma : CatP \longrightarrow \mathcal{K}_P, \sigma(F) = \{i | F \subseteq F_i\}$$

Лемма 3.5 *Пусть F грань многогранника P, тогда $link(\sigma(F))$ строго деформационно ретрагиуруется на симплициальный подкомплекс, гомеоморфный сфере S^{dimF-1}.*

Явно доказывается, что линк гомотопически эквивалентен $\partial F \simeq S^{dimF-1}$. Однако, если удалить вершины многогранника, аналогичным образом можно доказать подобный результат и для многогранника, у которого удалены некоторые вершины.

Лемма 3.6 *Пусть F грань произвольного непростого многогранника P без некоторых вершин, тогда $link(\sigma(F))$ строго деформационно ретрагиуруется на симплициальный подкомплекс, гомеоморфный $S^{dimF-1} \backslash \{r\, pt\}$ - сфере без некоторого набора точек.*

Утверждение 3.3 *Пусть многогранник P является некомпактным n-мерным многогранником Коксетера. Тогда:*

1)Если из P удалить все вершины, не лежащие на абсолюте, его нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ будет Коэн-Маколеевым. В частности нерв-комплекс идеального многогранника Коксетера Коэн-Маколеев.

2)Пусть P, имеет только одну вершину на абсолюте. Тогда нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев. Если идеальных вершин несколько, а многогранник не является идеальным, свойство Коэн-Маколеевости выполняться не будет.

▷

Сначала проверим 1 пункт утверждения. $\mathcal{K}_P$ является $(n-2)$-мерным чистым комплексом, если любая грань F представлена в виде пересечения $codimF$ гиперграней.

Многогранник Коксетера комбинаторно в гранях (кроме идеальных вершин) выглядит как куб . Куб простой многогранник, и у него любая грань F представляется в виде пересечения $codimF$ гиперграней, значит $dim\mathcal{K}_P = n-2$, а все максимальные симплексы имеют одинаковую размерность и комплекс чистый, поэтому можем легко считать размерность линков:

$$dim(link(\sigma(F))) = dim(\mathcal{K}_P) - codimF$$

Нужно проверить следующие равенства на гомологии:

$$\widetilde{H}_i(link(\sigma(F))) = 0 \quad \forall i < dim(link(\sigma(F)))$$

По **Лемме 3.6** $link(\sigma(F))$ представляет собой сферу без некоторого набора точек, то есть гомотопически это букет из некоторого числа сфер: $link(\sigma(F)) \simeq \bigvee S^{dimF-2}$. Если $dimF = 2$, то получается окружность без точек, гомотопически это набор точек.

Гомомологии линка $link(\sigma(F))$ во всех случаях нулевые до размерности $dimF-2$. То есть, нужно проверить, что на размерность линка выполнено следующее неравенство

$$dimF - 2 \geq dim(link(\sigma(F)))$$

$$dim(link(\sigma(F)) = dim(\mathcal{K}_P) - codimF = dimF - 2$$

Теперь проверим 2 часть утверждения. Пусть многогранник P некомпактный с 1 идеальной вершиной.

Если многогранник P имеет размерность n, то нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ представляет из себя триангулированную сферу S^{n-1} с дыркой - идеальная вершина соответствует триангулированной сфере $\mathcal{S} = S^{n-2}$, которая является подкомплексом в $\mathcal{K}_P$.

Это соответствие следует из того, что все грани $F \subset P$ комбинаторно устроены как грани простого многогранника: любая грань $F \subset P$ является пересечением $codimF$ гиперграней. То есть, каждое ребро, выходящее из идеальной вершины, даёт $(n-2)$-мерный симплекс в нерв-комплексе и все эти симплексы образуют триангуляцию сферы, то есть граничат друг с другом правильным образом.

Линки показывают локальную структуру симплициального комплекса. Поэтому достаточно проверить, что $\widetilde{H}_i(lk(\sigma)) = 0 \; \forall \; \sigma \in \mathcal{S}, \; i < dim(lk(\sigma))$.

Если $\sigma \in \mathcal{S}$, то $lk(\sigma)$ состоит из симплексов 2 типов: одни лежат в $\mathcal{S}$ и образуют сферу $S^{n-2-dim\sigma}$, а другие в $\mathcal{K}_P \backslash \mathcal{S}$ и образуют часть сферы $S^{n-1-dim\sigma}$ с границей $S^{n-2-dim\sigma}$. Линки являются стягиваемыми множествами, поэтому приведённые гомологии нулевые в любой размерности.

Итого все линки имеют нулевые приведённые гомологии в нужных размерностях, поэтому нерв-комплекс многогранника Коксетера с одной идеальной вершиной Коэн-Маколеев.

Пусть есть r идеальных вершин, но P не является идеальным. Тогда $\mathcal{K}_P$ это сфера S^{n-1} с r непересекающимися дырками - это снова триангулированные сферы, а значит $\mathcal{K}_P \simeq \bigvee_{r-1} S^{n-2}$. Линк пустого множества это $\mathcal{K}_P$ - $(n-1)$-мерный комплекс, у которого в размерности $n-2$ имеются ненулевые гомологии, поэтому $\mathcal{K}_P$ не Коэн-Маколеев. $\triangleleft$

Следующая конструкция была описана в [2, стр. 428].

Определение 3.1 *Пусть $\mathcal{K}$ $(n-1)-$мерный симплициальный комплекс, а $\mathcal{K}'$ барицентрическое подразбиение. Тогда для каждого симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ $F_\sigma = \{\sigma = \sigma_0 < \cdots < \sigma_k\} \in \mathcal{K}'$. Тогда двойственным простым полиэдральным комплексом называется конус $P_\mathcal{K} = cone\mathcal{K}$ с его разложением в грани F_σ.*

Пояснение. Для $(k-1)-$мерного симплекса $\sigma \in \mathcal{K}$ F_σ считается гранью коразмерности k и F_σ является геометрической реализацией конуса над $\mathcal{K}_{>\sigma} = \{\tau \in \mathcal{K} | \sigma < \tau\}$.

По аналогии с малыми накрытиями, $(P_\mathcal{K} \times \mathbb{Z}_2^n)/\sim$ называется малым накрытием над $P_\mathcal{K}$. Эквивалентность $\sim$ устроена аналогично.

Лемма 3.7 *Пусть P некомпактный многогранник Коксетера конечного объёма. Тогда P ретрагируется на подмножество, гомеоморфное двойственному простому полиэдральному комплексу нерв-комплекса $\mathcal{K}_P$.*

$\triangleright$

Проверяется следующая цепочка эквивалентностей:

$$P \simeq P' \cong Cone(\mathcal{K}_P) \cong P_{\mathcal{K}_P}$$

Где под $P_{\mathcal{K}_P}$ понимается двойственный к $\mathcal{K}_P$ простой полиэдральный комплекс, P' барицентрическое подразбиение P.

Выбрасывание вершины из многогранника понятным образом меняет барицентрическое подразбиение. Для многогранника без удалённых вершин оно совпадает (как топологическое пространство) с самим многогранником. Удаление вершины соответствует вырезанию шара около вершины, поэтому получается гомеоморфное пространство.

Если удалить все вершины, то барицентрическое подразбиение будет гомотопически эквивалентно, но не гомеоморфно исходному многограннику.

То есть, в любом случае многогранник P ретрагируется на барицентрическое подразбиение P'.

Далее проверим, что P' гомеоморфно конусу над нерв-комплексом $\mathcal{K}_P$.

Если идеальная вершина одна, то барицентрическое подразбиение гомеоморфно шару с вырезанным шариком около границы, а конус над нерв-комплексом гомеоморфен ровно тому же. В случае большего числа идеальных вершин всё аналогично.

Двойственный полиэдральный комплекс к $\mathcal{K}_P$ гомеоморфен конусу над $\mathcal{K}_P$. $\triangleleft$

Замечание 3.2 ***Лемма 3.7*** *даёт другое доказательство того, что*

$$\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(k)} \simeq \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}/Ker\Lambda$$

$$\mathbb{L}^n/G'(P) \cong (P \times \mathbb{Z}_2^m)/\sim \simeq (P_{\mathcal{K}_P} \times \mathbb{Z}_2^m)/\sim \simeq (cc(\mathcal{K}_P) \times \mathbb{Z}_2^m)/\sim = \mathcal{R}_{\mathcal{K}_P}$$

Далее используется ***Утверждение 3.2.***

Замечание 3.3 *Рассуждения, аналогичные* ***Лемме 3.7*** *и* ***Замечанию 3.2****, подходят и для обобщения на прямоугольные многогранники конечного объёма с выброшенными гранями (другое доказательство* ***Следствия 3.1****).*

Пусть $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)} = N(P,\Lambda)$ (или $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n-1)} = N(P,\Lambda)$ в случае идеального P) , то есть над многогранником Коксетера P существует характеристическая матрица Λ размера $n \times m$ (или $(n-1) \times m$), а значит и само многообразие $N(P,\Lambda)$.

Обобзначим $\lambda_i = \lambda_{i1}v_1 + \cdots + \lambda_{im}v_m$, где $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}_2$ элементы матрицы Λ, а v_i стандартные образующие кольца Стенли-Райснера $\mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]$.

Следствие 3.4 *Пусть P многогранник Коксетера конечного объема*
1)Пусть P идеальный. Тогда

$$H^*(\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n-1)};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$$

2)Пусть P некомпактный с одной вершиной на абсолюте. Тогда

$$H^*(\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)};\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\mathcal{K}_P]/(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

$\triangleright$

Если многогранник идеальный, то нерв-комплекс будет иметь размерность $n-2$, поэтому малые накрытия будут задаваться эпиморфизмом $\phi^{(n-1)}$.

Если многогранник не является идеальным, то размерность увеличивается на единицу и эпиморфизм уже будет $\phi^{(n)}$.

Нерв-комплекс $\mathcal{K}_P$ Коэн-Маколеев по **Утверждению 3.3**, а пространства $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n)} = (P \times \mathbb{Z}_2^n)/\sim$ и $\mathbb{L}^n/Ker\phi^{(n-1)} = (P \times \mathbb{Z}_2^{n-1})/\sim$ являются частным случаем конструкции малых накрытий над полиэдральным комплексом, двойственным к некоторому симплициальному комплексу - в нашем случае нерв-комплекс. Это следует из **Леммы 3.9**. Поэтому можно сослаться на [2, теорема 5.12]. $\triangleleft$

Замечание 3.4 *В [2, теорема 5.12] доказано больше: $\mathbb{Z}_2$ числа Бетти b_i малых накрытий над простым полиэдральным комплексом $P_{\mathcal{K}}$ равны h числам $P_{\mathcal{K}}$: $b_i(N(P_{\mathcal{K}})) = h_i(P_{\mathcal{K}})$. Здесь тоже существенно, чтобы $\mathcal{K}$ был Коэн-Маколеевым.*

Список литературы

[1]А.Ю. Веснин, *Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля*, Сиб. матем . журн ., 28:5 (1987), 50–53;
[2]M.W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J., 62:2 (1991), 417–451.
[3]Anton Aizenberg and Victor Buchstaber, *Nerve complexes and moment-angle spaces of convex polytopes.* Trudy Mat. Inst. Steklova 275 (2011), 22–54
[4]Daniel Dugger, *A primer on homotopy colimits.* University of Oregon (2008)
[5]Li Cai, *On products in a real moment-angle manifold* (2015).
https://arxiv.org/pdf/1410.5543.pdf
[6]Matthias Franz, *Dga models for moment-angle-complexes* (2022).
https://arxiv.org/pdf/2006.01571.pdf
[7]В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, *Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками* (2017). Успехи мат. наук, т. 72, вып. 2 (434)
[8] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology.* Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.
[9]Э.Б. Винберг, *Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности*, Тр. ММО, 47, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102;
[10]Suyoung Choi, Shizuo Kaji, and Stephen Theriault, *Homotopy decomposition of a suspended real toric space*, Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 23 (2017), no. 1, 153-161. MR 3633130
[11]S. Choi, H. Park, *Multiplicative structure of the cohomology ring of real toric spaces*, Homology Homotopy Appl. 22 (2020), 97-115;
[12]M. Franz *The cohomology rings of real toric spaces and smooth real toric varieties*, https://arxiv.org/pdf/2008.08961.pdf (2021)
[13]G. Reisner *Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings*, Adv. Math. 14 (1976), 30-49.
[14]Panov T.E., Ray N. *Categorical aspects of toric topology*, Providence, RI: Amer. Math. Soc. (2008) P. 293–322. (Contemp. Math.; V. 460).
[15]Leonid Potyagailo, Ernest Vinberg *On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces*, Comment. Math. Helv. 80 (2005), 63–73