ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Исчисление Шуберта на многообразиях ограниченных флагов

Выполнил студент 303 группы
Витковский Андрей Владиславович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Т.Е. Панов

Москва, 2022 г.

1 Введение

В данной работе приведено классическое исчисление Шуберта на многообразии полных комплексных флагах; построенное по аналогии исчисление Шуберта на многообразии ограниченных флагов, а также доказана следующая теорема:

Теорема 1.1. *Клеточное разбиение Шуберта многообразия ограниченных флагов совпадает с классическим клеточным разбиением как квазиторического многообразия.*

Потребуется пара определений.

Конструкция 1.2. *Пусть есть векторное пространство размерности m. Для $0 < d \leq m$ обозначим через $Gr^d(E)$ грассманиан, состоящий из подпространств коразмерности d пространства E. Для подпространства F коразмерности d в пространстве ядро отображения из $\Lambda^d E$ в $\Lambda^d(E/F)$ - гиперплоскость в $\Lambda^d E$. Сопоставляя теперь подпространству F эту гиперплоскость, получим отображение $Gr^d(E) \rightarrow \mathbb{P}^*(\Lambda^d E)$, называемое вложением Плюккера. Можно проверить, что вложение Плюккера является биекцией грассманиана $Gr^d(E)$ на подмногообразие пространства $\mathbb{P}^*(\Lambda^d E)$, задаваемое квадратичными уравнениями $(v_1 \wedge ... \wedge v_d) \cdot (w_1 \wedge ... \wedge w_d) - \sum_{i_1 < ... < i_k} (v_1 \wedge ... \wedge w_1 \wedge ... \wedge w_k \wedge ... \wedge v_d) \times (v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k} \wedge w_{k+1} \wedge ... \wedge w_d) = 0$ для $v_1, ..., v_d, w_1, ..., w_d$ из E. Любой многочлен, равный нулю на образе грассманиана $Gr^d(E)$, принадлежит идеалу, порожденному указанными квадратичными соотношениями.*

Теперь возьмем многообразие полных флагов $Fl(m)$ в пространстве $\mathbb{C}^m$. Следующим образом оно вкладывается в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^r$:

$Fl(m) \subset \prod_{d=1}^m Gr^d(\mathbb{C}^m) \subset \prod_{d=1}^m \mathbb{P}^*(\Lambda^d \mathbb{C}^m) \subset \mathbb{P}^*(\bigotimes_{d=1}^m \Lambda^d \mathbb{C}^m) = \mathbb{P}^r$. Естественное действие группы $Gl_m(C)$ индуцирует действие на каждом из этих многообразий. Нетрудно проверить, что возникающее действие группы T на $\mathbb{P}^r$ имеет вид $t \cdot (e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_d}) = t_{i_1} \cdot ... \cdot t_{i_d} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_d}$ на базисных элементах.

Лемма 1.3. *Множество неподвижных точек действия группы T на многообразии флагов $Fl(m)$ состоит из $m!$ флагов вида $\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset ... \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, ..., e_{w(m)} \rangle = \mathbb{C}^m$, где $w \in S_m$. Обозначим через $x(w) \in Fl(m)$ точку, соответсвующую определенному флагу.*

2 Исчисление Шуберта на полных флагах

2.1 Построение клеток Шуберта

Зафиксируем флаг $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_m = E$. При заданном базисе в пространстве E, отождествляющим E с пространством $\mathbb{C}^m$, будем считать подпространства $F_q = \langle e_1, ..., e_q \rangle$ оболочками первых q элементов этого базиса. Для каждой подстановки w из группы S_m существует клетка Шуберта $X_w^\circ \subset Fl(m) = Fl(E)$, задаваемая как множество формулой
$X_w^\circ = \{E_\bullet \in Fl(E) : dim(E_p \cap F_q) = \#\{i \leq p : w(i) \leq q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$.

Клетка X_w° содержит точку $x(w)$. Также можно построить изоморфизм между X_w° и аффинным пространством $C^{l(w)}$, где $l(w)$ - число инверсий подстановки w, при этом $x(w)$ будет соответствовать началу координат.

Также у точки $x(w)$ есть открытая окрестность U_w в многообразии флагов $Fl(E)$, изоморфную $\mathbb{C}^n$, где $n = dim(Fl(m)) = m(m-1)/2$. Как следствие, клетка X_w° является замкнутым подмногообразием окрестности U_w, изоморфным образу вложения пространства $\mathbb{C}^{l(w)}$ в $\mathbb{C}^n$ как координатного подпространства.

Также можно определить двойственные клетки Шуберта:
$\Omega_w^\circ = \{E_\bullet \in Fl(m) : dim(E_p \cap \tilde{F}_q) = \#\{i \leq p : w(i) \geq m+1-q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$. Каждый флаг можно задать единственной строчно-ступенчатой матрицей (каждое подпространство E_p порождено первыми p строками матрицы, p-я строка которой содержит единицу в $w(p)$-м столбце и нули всюду после этой единицы, и все элементы матрице ниже такой единицы также равны 0), а значит многообразие флагов $Fl(m)$ является несвязным объединением клеток Шуберта X_w°, по одной для каждой из подстановок w в группе S_m. Эти клетки Шуберта есть в точности орбиты действия группы $B \subset Gl_m(\mathbb{C})$ верхних треугольных матриц.

2.2 Многообразия Шуберта и соответсвующие классы когомологий

Теперь можно определить многообразие Шуберта X_w как замыкание клетки X_w°, а также Ω_w как замыкание Ω_w°. Это неприводимые замкнутые подмногообразия в $Fl(m)$ размерностей $l(w)$ и $n - l(w)$ соответственно.

Пусть $w_\circ$ - подстановка в группе S_m, переставляющая элементы i и $m+1-i$ для всех $1 \leq i \leq m$. Можно проверить, что для любой подстановки $w \in S_m$ верно равенство $[\Omega_w] = [X_{w^\vee}]$, где $w^\vee = w_\circ \cdot w$, т.е. $w^\vee(i) = m + 1 - w(i)$ при $1 \le i \le m$.

Для любой подстановки $w \in S_m$ введем класс Шуберта σ_w в $H^{2l(w)}(Fl(m))$:
$\sigma_w = [\Omega_w] = [X_{w^\vee}] = [X_{w_\circ \cdot w}]$.
Значит, $\langle \sigma_u, \sigma_{v^\vee} \rangle = \langle \sigma_u, \sigma_{w_\circ \cdot v} \rangle = \delta_{uv}$.
Далее, для непосредственно исчисления Шуберта, то есть нахождения различных соотношений между классами, требуется описать кольцо когомологий многообразия флагов.

Над многообразием $X = Fl(E)$ есть универсальная фильтрация подрасслоений тривиального расслоения E_X ранга m над X:
$0 = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{m-1} \subset U_m = E_X$, слоями расслоений над флагом $E_\bullet$ являются векторные пространства E_i этого флага. Первые классы Черна расслоений U_i/U_{i-1} порождают кольцо когомологий, т.е. если положить $L_i = U_i/U_{i-1}$, то $x_i = -c_1(L_i) \quad \forall i$.

Теорема 2.1. *Кольцо когомологий многообразия $X = Fl(m)$ порождается базисными классами $x_1, ..., x_m$, связанными соотношениями $e_i(x_1, ..., x_m) = 0$ $\forall i$,
т.е. $H^*(X) = \mathbb{Z}[X_1, ..., X_m]/(e_1(X_1, ..., X_m), ..., e_m(X_1, ..., X_m))$.*

Для $1 \le d \le n = m(m-1)/2$ обозначим через $Z_d \subset Fl(m)$ объединение клеток X_w° при $l(w) \le d$. Z_d - замкнутое алгебраическое подмножество многообразия флагов $Fl(m)$, так как оно является объединение клеток X_w при $l(w) \le d$. Кроме того, разность $Z_d \setminus Z_{d-1}$ является несвязным объединением клеток X_w°, каждая из которых изоморфна пространству $\mathbb{C}^d$. Классы замыканий таких клеток задают базис когомологий пространства с целыми коэффициентами. В этом случае то, что классы $[X_w]$ многообразий X_w, для которых $l(w) = d$, образуют базис группы когомологий $H^{2n-2d}(Fl(m))$ над $\mathbb{Z}$, можно непосредственно проверить.

Рассмотрим спаривание $H^{2d}(Fl(m)) \times H^{2n-2d}(Fl(m)) \to H^{2n}(Fl(m)) = \mathbb{Z}, \quad \alpha \times \beta \mapsto \langle \alpha, \beta \rangle$.
Классы двух замкнутых подмногообразий дополнительной размерности имеют индекс пересечения, равный 0, если многообразия не пересекаются, и индекс пересечения, равный 1, если пересекаются трансверсально по одной точке (формально для этого нужно пояснить, что это возможно ввиду того, что $Fl(m)$ - компактное ориентируемое многообразие размерности 2n, причем его группы гомологий не содержат кручения). Для подстановки u и v длины d выполнено равенство $\langle [\Omega_v], [X_u] \rangle = \delta_{uv} \rangle$, откуда следует, что классы $\{[X_u] : u \in S_m\}$ линейно независимы. Так как существует $m!$ таких классов, они должны задавать базис когомологий с рациональны-

ми коэффициентами. Но если класс когомологий представлен как линейная комбинация классов $[X_u]$ с рациональными коэффициентами, то из формулы все эти коэффициенты целые. Следовательно, классы $\{[X_u] : l(u) = d\}$ образуют базис в группе $H^{2n-2d}(Fl(m))$, а классы $\{[\Omega_v] : l(v) = d\}$ - двойственный базис в $H^{2d}(Fl(m))$.

2.3 Многочлены Шуберта

Введем многочлены Шуберта. Формально они задают базис кольца когомологий многообразия флагов, произведение элементов которого соответсвует пересечению многообразий Шуберта.

Определение 2.2. Для любого многочлена $P(x_1, ..., x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, ..., x_m]$ определим разностный оператор $\partial_i(P) = \frac{P-s_i(P)}{x_i-x_{i-1}}$, где $s_i(P) = P(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, ..., x_m)$.
Используем разностные операторы для того, чтобы рекурсивно задать многочлены Шуберта: $\varsigma_{w_0} = x_1^{n-1}x_2^{n-2}\cdots x_{n-2}^2 x_{n-1}$, где $w_0 = n(n-1)...21$ самая длинная перестановка; если $w \neq w_0$, то ищем минимальное разложение $w = w_0 \cdot s_{i_1} \cdots s_{i_r}$, такое что $l(w_0 \cdot s_{i_1} \cdots s_{i_p}) = n - p$ для любого $1 \leq p \leq r$.
Тогда $\varsigma_w = \partial_{i_r} \circ \partial_{i_{r-1}} \circ \cdots \circ \partial_{i_1}(\varsigma_{w_0})$.
Данная конструкция не зависит от выбора минимального разложения, так как верно
$\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i \quad \forall i, j; \quad \partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1} \quad \forall i$, а это все соотношения, удовлетворяемые s_i.
Для многочленов Шуберта верен аналог формулы Пьери, именуемый правилом Монка:
$\varsigma_{s_i} \cdot \varsigma_w = \Sigma\varsigma_v$, где сумма идет по всем перестановкам v, полученным из w выбором пары индексов p, q,
$p \leq i < q : w(p) < w(q)$ и для любого k между p и q, $w(k)$ не между $w(p)$ и $w(q)$,
а затем $v(p) = w(q), v(q) = w(p)$, а для остальных k, $v(k) = w(k)$.
Или что эквивалентно, сумма по всем $v = w \cdot t$, где t это транспозиция (pq), $p \leq i < q$, для которых $l(v) = l(w) + 1$.

3 Про исчисление Шуберта на ограниченных флагах

3.1 Клетки Шуберта

Введем многообразие ограниченных флагов.

Определение 3.1. Ограниченным флагом в $\mathbb{C}^{n+1}$ называется полный флаг $U = \{U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}, \quad \mathrm{dim} U_i = i\}$, при этом каждое U_k, $2 \leq k \leq n$, содержит в себе координатное подпространство $\mathbb{C}^{k-1} = \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$.

Через BF_n обозначим множество всех ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Каждый ограниченный флаг однозначно определяется набором n прямых $L = \{l_1, ..., l_n : \quad l_k \subset \mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}$ для $1 \leq k \leq n, \quad l_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}\}$, где $\mathbb{C}_k = \langle e_k \rangle$. Действительно, если задан набор таких прямых, то флаг можно построить, положив $U_k = \mathbb{C}^{k-1} \oplus l_k$, а если задан флаг, то прямые можно восстановить в обратном порядке, положив $l_k = (\mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}) \cap U_k$.

Теорема 3.2. *Действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на $\mathbb{C}^{n+1}$, заданное $(t_1, ..., t_n) \cdot (w_1, ..., w_n, w_{n+1}) = (t_1 w_1, ..., t_n w_n, w_{n+1})$, индуцирует действие на ограниченных флагах, тем самым BF_n - гладкое торическое многообразие.*

В дальнейшем при обозначении перестановки будем использовать запись, где по порядку выписаны образы натуральных чисел, например для обозначения перестановки, где $(1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3)$ будем писать просто 2143.

Аналогично построению исчисления на полных флагах, в случае ограниченных, получаем следующую лемму:

Лемма 3.3. *Количество неподвижных точек действия группы T на многообразии ограниченных флагов BF_n равно 2^n, причем они имеют вид $\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset ... \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, ..., e_{w(n+1)} \rangle$, где на w дополнительно наложено условие $w^{-1}(i) \leq i + 1$.*

Доказательство. Условие, наложенное на перестановки, как раз соответствует тому, что в U_k содержится линейная оболочка первых $k-1$ базисных векторов. Обозначим количество таких

перестановок на $n+1$ элементе за $f(n)$. Дополнительно положим $f(0) = 2$. Тогда $f(n)$ удовлетворяет следующей реккурентной формуле:
$f(n) = f(0) + f(1) + ... + f(n-1)$, а $f(1) = 2$, $f(2) = 4$. Обоснуем: для одного элемента подходят и 1, и 2, а для двух первых элементов имеем перебор 123, 132, 213, 312. Теперь если хотим посчитать для n, то посмотрим, куда может перейти $(n+1)$. Он может перейти в любой элемент, но после него последовательность чисел в принятой записи перестановки имеет единственный вид, так как она удовлетворяет условию $w^{-1}(i) \leq i+1$. Таким образом, подсчет для n сводится к подсчету перестановок на k элементах при условии что n перешло в $k+1$, а их ровно $f(k)$. $\square$

Вид неподвижных точек совпадает с неподвижными точками в случае полных флагов, но теперь еще наложено условие ограниченного флага. Соответственно, мы можем аналогично ввести клетки Шуберта, заменив в определении флаги на ограниченные флаги:
$X_w^\circ = \{E_\bullet \in BF_n : dim(E_p \cap F_q) = \#\{i \leq p : w(i) \leq q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$.
В этом случае размерность в левой части всегда будет либо q (в случае когда $p-1 > q$), либо p (в случае когда $p \leq q$), либо $p-1$ (если $p-1 = q$), так как E_p содержит $\langle e_1, ..., e_{p-1}\rangle$.
Получается, что мы построили клеточное разбиение многообразия ограниченных флагов, так как полученный в случае полных флагов изоморфизм клетки и соответствующего аффинного пространства размерности, равной числу инверсий перестановки, остается изоморфизмом и в случае клеток многообразия ограниченных флагов. Таким образом, многообразие ограниченных флагов вкладывается в многообразие полных флагов как клеточный подкомплекс, так как состоит из клеток, построенных по тем же правилам по ограниченному поднабору перестановок.

Посчитаем, сколько перестановок со свойством $w^{-1}(i) \leq i+1$, причем зафиксируем число инверсий.

Лемма 3.4. *Количество перестановок на n+1 элементах, удовлетворяющих свойству* $w^{-1}(i) \leq i+1$, *с фиксированным числом инверсий k, равно* C_n^k.

Доказательство. Возьмем тривиальную перестановку $123...(n+1)$. Транспозиция соседних элементов создает одну инверсию. За счет свойства ограниченного флага если переставить последний элемент $n+1$ с каким-либо элементом, то после него последовательность будет задана однозначно, например если в 12345 подставить 5 на второе место, получим однозначно 15234. Причем при такой замене число инверсий увеличилось ровно на количество чисел между числом, которое мы подставляли и позицией, на которую мы его подставляли, плюс 1. Таким образом, последовательность с k инверсиями можно однозначно закодировать k числами среди первых n следующим образом. Идем с правого конца последовательности и смотрим, меняется ли число со своим соседом справа. Если да, то меняем, записываем одну инверсию и так далее. В итоге как раз и получаем C_n^k. Для установления однозначности такой кодировки, можем проделать ту же операцию в обратную сторону, то есть менять с левым, начиная с левого конца перестановки. □

3.2 Многообразие ограниченных флагов как квазиторическое многообразие

Напомним определение квазиторического многообразия:

Определение 3.5. Если дан простой политоп P^n, то T^n-многообразие M^{2n} называется квазиторическим, если T^n-действие локально стандартно и существует отображение проекции $\pi : M^{2n} \to P^n$, постоянное на T^n-орбитах, которое отображает каждую k-мерную орбиту во внутреннюю точку грани коразмерности k.

Вообще говоря, многообразие ограниченных флагов является не просто торическим, а квазиторическим с соответсвующим политопом $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0, x_1 + ... + x_k \leq k$ для $1 \leq k \leq n\}$. Доказательство и соответсвующий веер многообразия можно посмотреть в [2] (стр. 285, утверждения 7.7.3, 7.7.4, 7.7.5).

Рассмотрим теперь общую конструкцию построения клеточного разбиения квазиторического многообразия.

Ориентируем 1-остов политопа P^n и обозначим через $ind(v)$ для вершины v число ребер, входящих в нее. Эти ребра порождают грань G_v размерности $ind(v)$. Обозначим через $\tilde{G}_v$ подмножество G_v, полученное удалением всех граней не содержащих v. Очевидно, $\tilde{G}_v$ диффеоморфно $\mathbb{R}_+^{ind(v)}$. Тогда за клетку e_v примем $\pi^{-1}\tilde{G}_v$. Оно диффеоморфно $\mathbb{C}^{ind(v)}$, а объединение таких клеток по всем вершинам v задает клеточное разбиение M^{2n}. Все клетки четной размерности и замыкание e_v - подмногообразие $M(G_v)^{2ind(v)} \subset M^{2n}$.

Лемма 3.6. *Числа Бетти M^{2n} нулевые в нечетной размерности, а в четной задаются как $b_{2i}(M^{2n}) = h_i(P^n)$, где $h_i(P^n)$ - i-я компонента h-вектора политопа.*

Доказательство. $2i$-тое число Бетти равно числу клеток размерности $2i$, а их столько, сколько вершин индекса i, а это как раз i-я компонента h-вектора. □

В нашем случае политоп многообразия ограниченных флагов комбинаторно эквивалентен кубу I^n, h_i-компонента вектора h которого есть C_n^i. Таким образом, ввиду леммы 3.4 количество клеток размерности k в обоих построенных клеточных разбиениях совпадают для любого k. Рассмотрев орбиты действия тора на изоморфные клеткам Шуберта аффинные области, описанные строчно-ступенчатыми матрицами (см. страницу 2), видно, что проекции клеток Шуберта на политоп совпадают с проекцией стандартного разбиения многообразия.

Введем некоторую функцию высоты, которая упорядочивает вершины политопа, то есть хотим функцию, которая бы не совпадала на вершинах, не соединенных ребром. Для этого возьмем функцию $f(x) = (1 + a_1)x_1 + ... + (1 + a_n)x_n$, где $0 \leq a_1 \leq ... \leq a_n \leq 1$, причем a_i независимы над $\mathbb{Q}$. Для нее верно, что для двух вершин v и w, не соединенных ребром, $f(v) \neq f(w)$.

Таким образом, построили исчисление Шуберта для многообразия ограниченных флагов, причем соответствующие клетки совпадают с клетками стандартного разбиения квазиторического многообразия.

Список литературы

[1] W. Fulton, Young tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry, Cambridge University Press, 1997

[2] V. Buchstaber and T. Panov, “Toric topology,” Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 10 2012

[3] W. Fulton, Intersection Theory, 2nd ed., Springer, 1998

[4] F. Sottile, Pieri’s formula for flag manifolds and Schubert polynomials, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 1, 89–110.