ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА"

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

КУРСОВАЯ РАБОТА

О связи колец когомологий многообразий ограниченных и полных флагов

Выполнил студент 403 группы

Витковский Андрей Владиславович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Т.Е. Панов

Москва, 2023 г.

1 Введение

В данной работе приводится построение отображения $H^*(Fl_{n+1}) \to H^*(BF_n)$, индуцированного соответствующим вложением многообразия ограниченных флагов в многообразие полных флагов:

Напомним, что флаг $U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}$ называется ограниченным, если U_k содержит координатное подпространство $\mathbb{C}^{k-1} = \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$ для любого $2 \leq k \leq n$.

Кольца когомологий многообразий полных флагов и ограниченных флагов известны:
$H^*(Fl_{n+1}) = \mathbb{Z}[u_1, ..., u_{n+1}]/(e_1, ..., e_{n+1})$, где e_i - соответсвующий элементарный симметрический многочлен.
$H^*(BF_n) = \mathbb{Z}[v_1, ..., v_n]/(v_1(v_1 + ... + v_n), v_2(v_2 + ... + v_n), ..., v_{n-1}(v_{n-1} + v_n), v_n^2)$.

Теорема 1.1. *Гомоморфизм $H^*(FL_{n+1}) \to H^*(BF_n)$, после выражения u_1 через остальные порождающие задается формулой $u_k \mapsto -v_{k-1}$.*

2 Предварительные сведения

Возьмем многообразие полных флагов $Fl(m)$ в пространстве $\mathbb{C}^m$. Следующим образом оно вкладывается в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^r$:

$Fl(m) \subset \prod_{d=1}^{m} Gr^d(\mathbb{C}^m) \subset \prod_{d=1}^{m} \mathbb{P}^*(\Lambda^d\mathbb{C}^m) \subset \mathbb{P}^*(\bigotimes_{d=1}^{m} \Lambda^d\mathbb{C}^m) = \mathbb{P}^r$, где второе вложение - вложение Плюккера, а третье - вложение Сегре. Естественное действие группы $Gl_m(C)$ индуцирует действие на каждом из этих многообразий. Возникающее действие группы T на $\mathbb{P}^r$ имеет вид $t \cdot (e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_d}) = t_{i_1} \cdot ... \cdot t_{i_d} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_d}$ на базисных элементах.

Лемма 2.1. *Множество неподвижных точек действия группы T на многообразии флагов Fl_m состоит из $m!$ флагов вида $\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset ... \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, ..., e_{w(m)} \rangle = \mathbb{C}^m$, где $w \in S_m$.*

2.1 Клетки Шуберта

Зафиксируем флаг $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_m = E$. При заданном базисе в пространстве E, отождествляющим E с пространством $\mathbb{C}^m$, будем считать подпространства $F_q = \langle e_1, ..., e_q \rangle$ оболочками первых q элементов этого базиса. Для каждой подстановки w из группы S_m существует клетка Шуберта $X_w^\circ \subset Fl(m) = Fl(E)$, задаваемая как множество формулой
$X_w^\circ = \{E_\bullet \in Fl(E) : dim(E_p \cap F_q) = \#\{i \leq p : w(i) \leq q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$.

Также определены двойственные клетки Шуберта:
$\Omega_w^\circ = \{E_\bullet \in Fl(m) : dim(E_p \cap \tilde{F}_q) = \#\{i \leq p : w(i) \geq m + 1 - q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$. Каждый флаг однозначно задается строчно-ступенчатой матрицей (каждое подпространство E_p порождено первыми p строками матрицы, p-я строка которой содержит единицу в $w(p)$-м столбце и нули всюду после этой единицы, и все элементы матрице ниже такой единицы также равны 0), а значит многообразие флагов $Fl(m)$ является несвязным объединением клеток Шуберта X_w°, по одной для каждой из подстановок w в группе S_m. Эти клетки Шуберта есть в точности орбиты действия группы $B \subset Gl_m(\mathbb{C})$ верхнетреугольных матриц.

2.2 Классы когомологий многообразий Шуберта

Определим многообразие Шуберта X_w как замыкание клетки X_w°, а Ω_w как замыкание Ω_w°. Это неприводимые замкнутые подмногообразия в $Fl(m)$ размерностей $l(w)$ и $n-l(w)$ соответственно.

Пусть $w_\circ$ - подстановка в группе S_m, переставляющая элементы i и $m+1-i$ для всех $1 \leq i \leq m$. Для любой подстановки $w \in S_m$ верно равенство $[\Omega_w] = [X_{w^\vee}]$, где $w^\vee = w_\circ \cdot w$, т.е. $w^\vee(i) = m+1-w(i)$ при $1 \leq i \leq m$.

Для подстановки $w \in S_m$ введем класс Шуберта σ_w в $H^{2l(w)}(Fl(m))$:
$\sigma_w = [\Omega_w] = [X_{w^\vee}] = [X_{w_\circ \cdot w}]$.
Значит, $\langle \sigma_u, \sigma_{v^\vee} \rangle = \langle \sigma_u, \sigma_{w_\circ \cdot v} \rangle = \delta_{uv}$.

Над многообразием $X = Fl_m$ есть универсальная фильтрация подрасслоений тривиального расслоения E_X ранга m над X:
$0 = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_{m-1} \subset U_m = E_X$, слоями расслоений над флагом $E_\bullet$ являются векторные пространства E_i этого флага.

Теорема 2.2. *Рассмотрим одномерные комплексные расслоения $L_i = U_i/U_{i-1}$ над Fl_m и положим $u_i = -c_1(L_i)$. Кольцо когомологий многообразия $X = Fl_m$ порождается базисными классами $u_1, ..., u_m$, связанными соотношениями $e_i(u_1, ..., u_m) = 0$ $\forall i$,*
т.е. $H^*(X) = \mathbb{Z}[u_1, ..., u_m]/(e_1(u_1, ..., u_m), ..., e_m(u_1, ..., u_m))$.

Замечание 2.3. *На самом деле, $\sigma_{s_i} = x_1 + ... + x_i$ при $1 \leq i \leq m-1$, где s_i - транспозиция элементов i и $i+1$.*

Определение 2.4. Ограниченным флагом в $\mathbb{C}^{n+1}$ называется полный флаг $U = \{U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{n+1} = \mathbb{C}^{n+1}, \quad \mathrm{dim} U_i = i\}$, такой что каждое U_k, $2 \leq k \leq n$, содержит в себе координатное подпространство $\mathbb{C}^{k-1} = \langle e_1, ..., e_{k-1} \rangle$.

Через BF_n обозначим множество всех ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{n+1}$.

Каждый ограниченный флаг однозначно определяется набором n прямых $L = \{l_1, ..., l_n : \quad l_k \subset \mathbb{C}_k \oplus l_{k+1} \text{ для } 1 \leq k \leq n, \quad l_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}\}$, где $\mathbb{C}_k = \langle e_k \rangle$. Действительно, если задан набор таких прямых, то флаг можно построить, положив $U_k = \mathbb{C}^{k-1} \oplus l_k$, а если задан флаг, то прямые можно восстановить в обратном порядке, положив $l_k = (\mathbb{C}_k \oplus l_{k+1}) \cap U_k$.

Теорема 2.5. *Действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на $\mathbb{C}^{n+1}$, заданное $(t_1, ..., t_n) \cdot (w_1, ..., w_n, w_{n+1}) = (t_1 w_1, ..., t_n w_n, w_{n+1})$, индуцирует действие на ограниченных флагах, BF_n является гладким торическим многообразием относительно этого действия.*

Лемма 2.6. *Количество неподвижных точек действия группы T на многообразии ограниченных флагов BF_n равно 2^n, причем они имеют вид $\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset ... \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)}, ..., e_{w(n+1)} \rangle$, где на w дополнительно наложено условие $w^{-1}(i) \leq i + 1$.*

Доказательство. Условие, наложенное на перестановки, как раз соответствует тому, что в U_k содержится линейная оболочка первых $k-1$ базисных векторов. Обозначим количество таких перестановок на $n+1$ элементе за $f(n)$. Дополнительно положим $f(0) = 2$. Тогда $f(n)$ удовлетворяет следующей реккурентной формуле:

$f(n) = f(0) + f(1) + ... + f(n-1)$, а $f(1) = 2$, $f(2) = 4$. Действительно: для одного элемента подходят и 1, и 2, а для двух первых элементов имеем перебор 123, 132, 213, 312. Теперь если хотим посчитать для n, то посмотрим, куда может перейти $(n+1)$. Он может перейти в любой элемент, но после него последовательность чисел в принятой записи перестановки имеет единственный вид, так как она удовлетворяет условию $w^{-1}(i) \leq i + 1$. Таким образом, подсчет для n сводится к подсчету перестановок на k элементах при условии что n перешло в $k+1$, а их ровно $f(k)$. □

Аналогично случаю полных флагов, введем клетки Шуберта:
$X_w^\circ = \{E_\bullet \in BF_n : dim(E_p \cap F_q) = \#\{i \le p : w(i) \le q\}$ для $1 \le p, q \le m\}$.

Посчитаем количество перестановок со свойством $w^{-1}(i) \le i+1$, причем зафиксируем число инверсий.

Лемма 2.7. *Количество перестановок на n+1 элементах, обладающих свойством $w^{-1}(i) \le i+1$, с фиксированным числом инверсий k, равно C_n^k.*

Доказательство. Возьмем тривиальную перестановку $123...(n+1)$. Транспозиция соседних элементов создает одну инверсию. За счет свойства ограниченного флага если переставить последний элемент $n+1$ с каким-либо элементом, то после него последовательность будет задана однозначно, например если в 12345 подставить 5 на второе место, получим однозначно 15234. Причем при такой замене число инверсий увеличилось ровно на количество чисел между числом, которое мы подставляли и позицией, на которую мы его подставляли, плюс 1. Таким образом, последовательность с k инверсиями можно однозначно закодировать k числами среди первых n следующим образом. Идем с правого конца последовательности и смотрим, меняется ли число со своим соседом справа. Если да, то меняем, записываем одну инверсию и так далее. В итоге как раз и получаем C_n^k. Для установления однозначности такой кодировки, можем проделать ту же операцию в обратную сторону, то есть менять с левым, начиная с левого конца перестановки. □

Теперь напомним определение квазиторического многообразия:

Определение 2.8. Если дан простой многогранник P^n, то T^n-многообразие M^{2n} называется квазиторическим, если T^n-действие локально стандартно и существует отображение проекции $\pi : M^{2n} \to P^n$, постоянное на T^n-орбитах, которое отображает каждую k-мерную орбиту во внутреннюю точку грани коразмерности k.

Многообразие ограниченных флагов является квазиторическим с соответсвующим многогранником $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0, x_1 + ... + x_k \leq k$ для $1 \leq k \leq n\}$. Доказательство можно посмотреть в [2] (стр. 285, утверждения 7.7.3, 7.7.4, 7.7.5).

Рассмотрим общую конструкцию построения клеточного разбиения квазиторического многообразия.

Ориентируем 1-остов многогранника P^n и обозначим через $ind(v)$ для вершины v число ребер, входящих в нее. Эти ребра порождают грань G_v размерности $ind(v)$. Обозначим через $\tilde{G}_v$ подмножество G_v, полученное удалением всех граней не содержащих v. Очевидно, $\tilde{G}_v$ диффеоморфно $\mathbb{R}_+^{ind(v)}$. Тогда за клетку e_v примем $\pi^{-1}\tilde{G}_v$. Оно диффеоморфно $\mathbb{C}^{ind(v)}$, а объединение таких клеток по всем вершинам v задает клеточное разбиение M^{2n}. Все клетки четной размерности и замыкание e_v - подмногообразие $M(G_v)^{2ind(v)} \subset M^{2n}$.

Лемма 2.9. *Числа Бетти M^{2n} нулевые в нечетной размерности, а в четной задаются как $b_{2i}(M^{2n}) = h_i(P^n)$, где $h_i(P^n)$ - i-я компонента h-вектора многогранника.*

Доказательство. $2i$-тое число Бетти равно числу клеток размерности $2i$, а их столько, сколько вершин индекса i, а это как раз i-я компонента h-вектора. $\square$

Лемма 2.10. *BF_n является клеточным подпространством в FL_{n+1}. Клетка Шуберта многообразия полных флагов Fl_{n+1} входит в BF_n тогда и только тогда, когда соответствующая перестановка обладает свойством $w^{-1}(i) \leq i+1$. Число клеток размерности k в BF_n равно C_n^k.*

Доказательство. Для клеток Шуберта многообразия ограниченных флагов

$X_w^\circ = \{E_\bullet \in BF_n : dim(E_p \cap F_q) = \#\{i \leq p : w(i) \leq q\}$ для $1 \leq p, q \leq m\}$,

размерность в левой части равенства всегда будет либо q (в случае когда $p-1 > q$), либо p (в случае когда $p \leq q$), либо $p-1$ (если $p-1 = q$), так как E_p содержит $\langle e_1, ..., e_{p-1}\rangle$. Из $\#\{i \leq p : w(i) \leq q\}$ и того, что E_p содержит $\langle e_1, ..., e_{p-1}\rangle$, получаем условие $w^{-1}(i) \leq i+1$.

Это действительно клеточное разбиение многообразия ограниченных флагов, так как полученный в случае полных флагов изоморфизм клетки и соответствующего аффинного пространства размерности, равной числу инверсий перестановки, остается изоморфизмом и в случае клеток многообразия ограниченных флагов. Таким образом, многообразие ограниченных флагов вкладывается в многообразие полных флагов как клеточный подкомплекс, так как состоит из клеток, построенных по тем же правилам по ограниченному поднабору перестановок.

Размерность изоморфного клетке аффинного пространства, равная количеству перестановок w, обладающих свойством $w^{-1}(i) \leq i+1$ и фиксированным числом инверсий k, равна C_n^k согласно лемме 2.6. □

Замечание 2.11. *Многогранник многообразия ограниченных флагов комбинаторно эквивалентен кубу I^n, h_i-компонента вектора h которого есть C_n^i. Таким образом, ввиду леммы 2.6 количество клеток размерности k в обоих построенных клеточных разбиениях совпадают для любого k.*

3 Вложение многообразия ограниченных флагов в многообразие полных флагов

Вышесказанное показывает, что многообразие ограниченных флагов вложено в многообразие полных флагов как клеточный подкомплекс. Таким образом, индуцируется отображение в когомологиях $H^*(Fl_{n+1}) \to H^*(BF_n)$.

3.1 Кольцо когомологий многообразия ограниченных флагов

Теорема 3.1. *Пусть $M = M(P,\Lambda)$ - квазиторическое многообразие с характеристической матрицей $\Lambda = (\lambda_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$. Кольцо когомологий M задается как $H^*(M) = \mathbb{Z}[v_1,...,v_m]/\mathbb{I}$, где $v_i \in H^2(M)$ - класс, двойственный характеристическому подмногообразию M_i, а $\mathbb{I}$ - идеал, порожденный элементами следующих двух типов:*
(a) $v_{i_1},...,v_{i_k}$, когда $M_{i_1} \cap ... \cap M_{i_k} = \emptyset$ (соотношения Стенли-Райснера)
(b) линейные формы $t_i = \lambda_{i1}v_1 + ... + \lambda_{im}v_m$, $1 \leq i \leq n$.

Если матрица Λ имеет усеченную форму, то линейные соотношения между классами когомологий можно переписать как $v_i = -\lambda_{i,n+1}v_{n+1} - ... - \lambda_{i,m}v_m$. Следовательно, классы $v_{n+1},...,v_m$ мультипликативно порождают кольцо $H^*(M)$.

Лемма 3.2. *Веер Σ, отвечающий торическому многообразию BF_n имеет $2n$ одномерных конусов, порожденных векторами $a_k^0 = e_k$, $a_k^1 = -e_1 - ... - e_k$ и $2n$ конусов максимальной размерности, порожденных наборами векторов $a_1^{\epsilon_1},...,a_n^{\epsilon_n}$, где $\epsilon_k = 0,1$.*

Лемма 3.3. *Многообразие ограниченных флагов BF_n - квазиторическое многообразие над комбинаторным n-кубом I^n с характеристической матрицей Λ*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & -1 & ... & -1 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & -1 \end{array}\right]$$

Доказательство. Многогранник $P = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0, x_1 + ... + x_k \leq k\}$, соответсвующий многообразию ограниченных флагов, комбинаторно эквивалентен кубу, а столбцы матрицы - векторы из леммы 3.4 $\square$

Пусть $\pi : BF_n \to P$ - проекция под действием тора, а ρ_k^ϵ - линейное расслоение, соответсвующее характеристическому подмногообразию ($(\mathbb{C}^\times)^n$-инвариантному дивизору) $\pi^{-1}(F_k)$ для $1 \leq k \leq n$, $\epsilon = 0{,}1$.

Лемма 3.4. *а) Характеристическое подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0)$ изоморфно BF_{n-1}, а $\pi^{-1}(F_k^1)$ изоморфно $BF_{k-1} \times BF_{n-k}$;*
б) Линейное расслоение ρ_k^0 изоморфно расслоению над $\mathbb{U} \in BF_n$ со слоем $l_k = U_k/\mathbb{C}^{k-1}$. Линейное расслоение ρ_k^1 изоморфно расслоению со слоем $(\mathbb{C}_k \oplus l_{k+1})/l_k = U_{k+1}/U_k$.

Доказательство. Подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^0) \subset BF_n$ получается проектированием подмногообразия Z_{I^n}, заданного уравнением $z_k = 0$ на BF_n. Если $z_k = 0$, то векторы $v_1, ...v_n$, заданные как $v_k = z_k e_k + z_{k+n} v_{k+1}$, лежат в подпространстве $\mathbb{C}^{1,...,n+1} \setminus k$. Следовательно, $\pi^{-1}(F_k^0)$ может быть определено как множество ограниченных флагов в $\mathbb{C}^{1,...,n+1} \setminus k$, то есть как BF_{n-1}.
Аналогично, подмногообразие $\pi^{-1}(F_k^1)$ - проекция подмногообразия Z_{I^n}, заданного уравнением $z_{k+n} = 0$. Значит, векторы $v_1, ...v_k$ лежат в подпространстве $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{n+1}$, а векторы $v_{k+1}, ..., v_n$ лежат в подпространстве $\mathbb{C}^{k+1,...,n+1}$. Следовательно, $\pi^{-1}(F_k^1)$ может быть определено как $BF_{k-1} \times BF_{n-k}$.
Утверждение б) также следует, так как линейное расслоение ρ_k^0 изоморфно $Z_{I^n} \times_K \mathbb{C}_{n+k}$. $\square$

Лемма 3.5. *Многообразие BF_n - комплексная проективизация расслоения $\underline{\mathbb{C}} \oplus \rho_1^0$ над BF_{n-1}.*

Доказательство. Рассмотрим проекцию $BF_n \to BF_{n-1}$, переводящую ограниченный флфг $U = \{U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_n \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$ во флаг $U' = U/\mathbb{C}_1$ в $\mathbb{C}^{2,...,n+1}$. Набор прямых, отвечающих U', получен из набора прямых соответствующих U путем забывания первой прямой. Чтобы восстановить флаг U из флага U', необходимо выбрать прямую l_1 на плоскости $\mathbb{C}_1 \oplus l_2$. Так как l_2 - первая прямая в множестве прямых, соответствующих флагу $U' \in BF_{n-1}$, мы получаем $BF_n \cong \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \rho_1^0)$, что и требовалось. □

Лемма 3.6. *$H^*(BF_n) = \mathbb{Z}[v_1, ..., v_n]/(v_1(v_1 + ... + v_n), v_2(v_2 + ... + v_n), ..., v_{n-1}(v_{n-1} + v_n), v_n^2)$, где $v_i = c_1(\rho_i^1)$.*

Доказательство. BF_n - квазиторическое многообразие, следовательно, воспользуемся теоремой 3.1. Соотношения Стенли-Райснера имеют вид $u_1u_{n+1}, u_2u_{n+2}, ..., u_nu_{2n}$ (противоположные гиперграни многогранника).

Линейные же соотношения имеют вид

$u_1 - u_{n+1} - u_{n+2} - ... - u_{2n}$

$u_2 - u_{n+2} - u_{n+3} - ... - u_{2n}$

...

$u_n - u_{2n}$

Выразим из линейных соотношений $u_1, ..., u_n$ и подставим в соотношения Стенли-Райснера, а также произведем замену $v_i = u_{i+n}$ и $v_i = u_i$.

Получим $v_1(v_1 + ... + v_n), v_2(v_2 + ... + v_n), ..., v_{n-1}(v_{n-1} + v_n), v_{2n}$. Что и требовалось. □

Вернемся к вложению $BF_n \hookrightarrow FL_{n+1}$

Теорема 3.7. *Гомоморфизм $H^*(FL_{n+1}) \to H^*(BF_n)$, после выражения u_1 через остальные порождающие, задается формулой $u_k \mapsto -v_{k-1}$.*

Доказательство. Над многообразием Fl_m есть универсальная фильтрация подрасслоений тривиального расслоения E_X ранга m над X. Слоями этих расслоений над точкой многообразия, отвечающей флагу, являются векторные пространства этого флага. Первые классы Черна линейных расслоений U_k/U_{k-1} порождают кольцо когомологий. Рассмотрим расслоение, индуцированное вложением $i : BF_n \to FL_{n+1}$ с многообразия полных флагов на многообразие ограниченных флагов. Соответсвующие слои U_k/U_{k-1} перейдут в слои V_k/V_{k-1}.

По лемме 3.5(б) $i^*(U_k/U_{k-1}) \cong \rho^1_{k-1}$

Напомним, что
$c_1(U_k/U_{k-1}) = -u_k$ (теорема 2.2)
$c_1(\rho^1_{k-1}) = v_{k-1}$

Следовательно, из естесственности классов Черна $i^*(u_k) = -v_{k-1}$.

Кольцо когомологий $H^*(Fl_{n+1})$ порождается классами $u_2, ..., u_{n+1}$, поэтому гомоморфизм i^* однозначно задается полученной формулой.

□

Замечание 3.8.

Проверим выполнение соотношений на маленьких размерностях.

1)

Пусть имеем $\mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3]/(u_1 + u_2 + u_3, u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3, u_1u_2u_3)$ и $\mathbb{Z}[v_1, v_2]/(v_2^2, (v_1 + v_2)v_1)$.

Выразим $u_1 = -(u_2 + u_3)$.

Тогда имеем отображение $\mathbb{Z}[u_2, u_3]/(-(u_2+u_3)^2+u_2u_3, -u_2u_3(u_2+u_3)) \to \mathbb{Z}[v_1, v_2]/(v_2^2, (v_1+v_2)v_1)$

$u_2 \mapsto -v_1, u_3 \mapsto -v_2$

Следовательно,

$-(v_1 + v_2)^2 + v_1v_2 = -v_1^2 - v_2^2 - 2v_1v_2 + v_1v_2 = -(v_1^2 + v_2^2 + v_1v_2) = -v_1(v_1 + v_2) = 0$

$-v_1v_2(v_1 + v_2) = 0.$

2)

$\mathbb{Z}[u_1, u_2, u_3, u_4]/(u_1 + u_2 + u_3 + u_4, u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4,$

$u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4, u_1u_2u_3u_4)$

$\mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/(v_3^2, (v_1 + v_2 + v_3)v_1, (v_2 + v_3)v_2).$

Выразим $u_1 = -(u_2 + u_3 + u_4)$.

$\mathbb{Z}[u_2, u_3, u_4]/(-(u_2 + u_3 + u_4)^2 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4, -(u_2 + u_3 + u_4)(u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4) + u_2u_3u_4,$

$-u_2u_3u_4(u_2 + u_3 + u_4)) \to \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3]/(v_3^2, (v_1 + v_2 + v_3)v_1, (v_2 + v_3)v_2).$

$u_2 \mapsto -v_1, u_3 \mapsto -v_2, u_4 \mapsto -v_3$

$-(v_1+v_2+v_3)^2+v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3 = -v_1^2-v_2^2-v_3^2-v_1v_2-v_1v_3-v_2v_3 = -v_1(v_1+v_2+v_3)-v_2(v_2+v_3)-v_3^2 = 0$

$(v_1 + v_2 + v_3)(v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3) - v_1v_2v_3 = v_1^2v_2 + v_1^2v_3 + v_1v_2^2 + v_2^2v_3 + v_1v_3^2 + v_2v_3^2 + 2v_1v_2v_3 =$

$= v_1v_2(v_1 + v_2 + v_3) + v_1^2v_3 + v_1v_3^2 + v_2^2v_3 + v_2v_3^2 + v_1v_2v_3 = 0 + v_1v_3(v_1 + v_2 + v_3) + v_2^2v_3 + v_2v_3^2 =$

$= 0 + v_2v_3(v_2 + v_3) = 0$

$-v_1v_2v_3(v_1 + v_2 + v_3) = 0$

Список литературы

[1] W. Fulton, Young tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry, Cambridge University Press, 1997

[2] V. Buchstaber and T. Panov, “Toric topology,” Mathematical Surveys and Monographs, 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015, 10 2012

[3] W. Fulton, Intersection Theory, 2nd ed., Springer, 1998