ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

Механико-математический факультет

Курсовая работа

специалиста

Двойные когомологии момент-угол комплексов, соответствующие симплициальным частично упорядоченным множествам

Выполнил студент 441 группы

Водолеев Марк Дмитриевич

подпись студента

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н.

Панов Тарас Евгеньевич

подпись научного руководителя

МОСКВА

2023

Содержание

Введение

Момент-угол комплексами называются клеточные пространства, строящиеся по некоторому заданному симплициальному комплексу как объединение произведений дисков D^2 и окружностей S^1. Данные пространства возникают в различных задачах алгебраической геометрии, комбинаторной топологии и симплектической геометрии. Конструкция момент-угол комплекса может быть обобщена для симплициальных частичных упорядоченных множеств и соответствующих им в топологии симплициальных клеточных комплексов, которые являются двойственными объектами к регулярным многообразиям с углами, которые играют важную роль в торической топологии. Для симплициально клеточных комплексов, как и для симплициальных комплексов, можно определить кольца граней (или кольца Стенли-Райснера), позволяющие использовать аппарат коммутативной и гомологической алгебры для изучения данных комбинаторных структур. На кольцах когомологий момент-угол комплексов можно ввести структуру цепного комплекса, введя ещё один дифференциал. Его когомологии и будут называться двойными когомологиями исходного момент-угол комплекса.

1 Основные определения

Определение 1.1. Абстрактным симплициальным комплексом на множестве ν называется набор подмножеств называется набор подмножеств $\mathcal{K} \subset 2^{\nu}$, для которого выполняется следующее условие: если $I \in \mathcal{K}$, то и любое подмножество $J \subset I$ принадлежит $\mathcal{K}$. Будем называть $I \in \mathcal{K}$ абстрактным симплексом.

Определение 1.2. *С*имплициальным частично упорядоченным множеством называется такое множество $\mathcal{S}$ с отношением частичного порядка $\leqslant$, что существует минимальный элемент 0 и для любого $\Delta \subset \mathcal{S}$ отрезок

$$[0, \Delta] = \{\tau \in \mathcal{S} : 0 \leqslant \tau \leq \Delta\}$$

изоморфен множеству граней некоторого симплекса. Обозначим множество вершин $\mathcal{S}$ как $V(\mathcal{S})$ и множество вершин, на которые натянут симплекс $\sigma \in \mathcal{S}$ как $V(\sigma)$. Также введем обозначение $|\sigma| = |V(\sigma)|$.

В частности, любой симплициальный комплекс является симплициальным частично упорядоченным множеством. Для любых $\sigma, \tau \in \mathcal{S}$ определим $\sigma \wedge \tau$ как множество наименьших общих верхних граней и $\sigma \vee \tau$ как множество наибольших общих нижних граней. Из определения симплициального частично упорядоченного множества следует, что $\sigma \vee \tau$

состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда $\sigma \wedge \tau$ непусто.

Конструкция 1.3. Сопоставим данному симплициальному частично упорядоченному множеству $\mathcal{S}$ симплициальный комплекс $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}$ следующим образом: множество вершин $V(\mathcal{S})$ остаётся таким же, а его симплексами являются множества $V(\sigma),\ \sigma \in \mathcal{S}$. Имеем отображение симплициальных частично упорядоченных множеств

$$\mathcal{S} \to \mathcal{K}_{\mathcal{S}},$$

$$\sigma \mapsto V(\sigma).$$

Определение 1.4. Клеточный комплекс X называется симплициальным, если замыкание любой клетки с отношением включения изоморфно множеству граней некоторого симплекса.

Каждому симплициальному частично упорядоченному множеству можно сопоставить симплициальный клеточный комплекс, где приклеивающие отображения являются вложениями. Построенный таким образом клеточный комплекс называется геометрической реализацией и обозначается $|\mathcal{S}|$.
Джойном симплициальных частично упорядоченных множеств $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_1$ называется симплициальное частично упорядоченное множество $\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2$, состоящее из пар

$$(\sigma, \tau), \sigma \in \mathcal{S}_1, \tau \in \mathcal{S}_2,$$

при этом $(\sigma_1, \tau_1) \leq (\sigma_2, \tau_2)$ в том и только в том случае, когда $\sigma_1 \leq \tau_1$ и $\sigma_2 \leq \tau_2$.

2 Кольца граней (Стенли-Райснера) симплициального частично упорядоченного множества

Рассмотрим градуированное кольцо многочленов

$$k[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}],\ deg\ v_\sigma = 2|\sigma|.$$

Определение 2.1. Кольцом граней симплициального частично упорядоченного множества называется факторкольцо

$$k[\mathcal{S}] = k[v_\sigma : \sigma \in \mathcal{S}]/\mathcal{I}_{\mathcal{S}},$$

где

$$\mathcal{I}_{\mathcal{S}} = \langle v_0 - 1, v_\sigma v_\tau - v_{\sigma\wedge\tau} \cdot \sum_{\eta\in\sigma\vee\tau} v_\eta \rangle.$$

В общем случае $\sigma\wedge\tau$ может состоять не из одного элемента, но в случае, когда $\sigma\wedge\tau \neq \varnothing$ точная нижняя грань единственна и, следовательно, образующие идеала $\mathcal{I}_{\mathcal{S}}$ определены корректно.

3 Момент-угол комплексы и их свойства

Конструкция 3.1. Рассмотрим категорию $CAT(\mathcal{S})$, объектами которой являются грани $\tau \in \mathcal{S}$, и морфизм из $\sigma \in \mathcal{S}$ в $\tau \in \mathcal{S}$ существует тогда и только тогда, когда $\sigma \leqslant \tau$. Обозначим

$$\mathbb{D}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \forall i |x_i| \leqslant 1\}$$

- стандартный полидиск. Каждому элементу $\sigma \in \mathcal{S}$ сопоставим следующее подмножество в стандартном полидиске:

$$(D^2, S^1)^\sigma = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{D}^n : |x_i| = 1 \text{ при } i \nleqslant \sigma.\}$$

Тем самым мы определили функтор

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}}(D^2, S^1) : CAT(\mathcal{S}) \to TOP,$$

$$\sigma \mapsto (D^2, S^1)^\sigma,$$

сопоставляющий каждому морфизму $\sigma \to \tau$ вложение

$$(D^2, S^1)^\sigma \hookrightarrow (D^2, S^1)^\tau.$$

Тогда момент-угол комплексом, соответствующим симплициальному частично упорядоченному множеству $\mathcal{S}$, называется

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{S}} = \text{colim } \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(D^2, S^1).$$

Обобщением данной конструкции для произвольной топологической пары (X, A) является полиэдральное произведение $(X, A)^{\mathcal{S}}$, определяемое как

$$(X, A)^{\mathcal{S}} = \operatorname{colim} \mathcal{D}_{\mathcal{S}}(X, A).$$

Теорема 3.2.

- $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1 * \mathcal{S}_2} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1} \times \mathcal{Z}_{\mathcal{S}_2}$.
- *факторпространство $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}/\mathbb{T}^m$ гомеоморфно конусу над $|\mathcal{S}|$.*
- *если $|\mathcal{S}|$ гомеоморфно сфере S^{n-1}, то $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}_1}$ является многообразием.*

Доказательство можно найти в [1].

Конструкция 3.3. Рассмотрим клеточное разбиение $\mathbb{D}$, состоящее из трёх клеток: одной нульмерной - точки на границе, одной одномерной - границы без нульмерной клетки, и одной двумерной - внутренности диска. Будем обозначать как T и D одномерные и двумерные клетки соответственно. Таким образом мы получаем клеточное разбиение полидиска $\mathbb{D}^m$. Заметим, что тогда $(D^2, S^1)^{\sigma}$ будут клеточными подкомплексами в $\mathbb{D}^m$ и вложения

$$(D^2, S^1)^{\sigma} \hookrightarrow (D^2, S^1)^{\tau}$$

будут клеточными отображениями. Получаем, что данное разбиение порождает естественную клеточную структуру на момент-угол комплексе $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$.

Построенное клеточное разбиение помогает вычислить кольца когомологий момент-угол комплексов. На кольце граней $\mathbb{Z}[\mathcal{S}]$ можно ввести структуру $\mathbb{Z}^m$-градуированного $Z[v_1, \ldots, v_m]$-модуля. При этом

$$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,v_2,\ldots,v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{i\geq 0, a\in\mathbb{N}^m} \mathrm{Tor}^{-i,2a}_{\mathbb{Z}[v_1,v_2,\ldots,v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}).$$

Теорема 3.4. *Имеется изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}[v_1,v_2,\ldots,v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}),$$

при этом

$$H^p(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \bigoplus_{-i+2|a|=p} \mathrm{Tor}^{-i,2a}_{\mathbb{Z}[v_1,v_2,\ldots,v_n]}(\mathbb{Z}[S], \mathbb{Z}).$$

Здесь

$$|a| = \sum_{(i=1)}^{m} a_i \text{ при } a = (a_1, \ldots, a_m).$$

Теорема 3.5. *Разложение Хохстера. Пусть $\mathcal{S}_I$ - множество граней $\mathcal{S}$, вершины которых лежат в I. Имеется изоморфизм биградуированных коммутативных алгебр*

$$H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \bigoplus_{I\in[m]} \widetilde{H}^*(\mathcal{S}_I).$$

4 Двойные когомологии момент-угол комплексов

Конструкция 4.1. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\psi_{p,i,I} : \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_I) \to \widetilde{H}^p(\mathcal{K}_{I\setminus i}),$$

индуцированные вложениями $\mathcal{K}_{I\setminus i} \hookrightarrow \mathcal{K}_I$. Определим также отображения

$$d'_p = (-1)^{p+1} \sum_{i \in I} \varepsilon(i, I)\psi_{p,i,I},$$

где

$$\varepsilon(j, I) = (-1)^{\#\{i \in I : i < j\}}.$$

Мы можем определить отображение

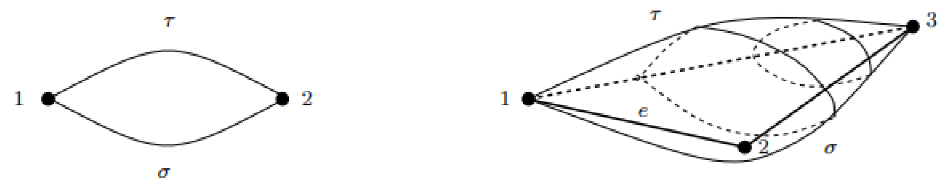
$$d' : H^{-k,2l}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \to H^{-k+1,2l-2}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}).$$

Несложным вычислением проверяется, что $(d')^2 = 0$. Таким образом, мы задали структуру цепного комплекса на

$$CH^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) := (H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K}), d').$$

Его когомологии называются биградуированными двойными когомологиями момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$.
Данное определение в точности обобщается и на момент-угол комплексы, соответствующие симплициальным частично упорядоченным множествам. В результате для симплициального частично упорядоченного множества S мы получаем двойные когомологии момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{S}$.

5 Примеры вычисления



Пример 5.1. Пусть S получено отождествлением границ двух n-симплексов (на рисунке представлены случаи n=1 и n=2). В этом случае полученный момент-угол комплекс будет гомеоморфен S^{2n}. Тогда все $\mathcal{S}_I$, за исключением случаев $I = [m]$ и $I = \varnothing$, будут стягиваемы, следовательно, их приведённые группы когомологий будут нулевыми. Таким образом, единственными ненулевыми группами будут $H^{0,0}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$ и $H^{0,2m}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$. В этом случае двойные когомологии будут совпадать с коцепями, поэтому единственными нетривиальными двойными когомологиями будут $HH^{0,0}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$ и $HH^{0,2m}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$.

Пример 5.2. Пусть S получено отождествлением границ k n-симплексов (на рисунке представлены случаи n=1 и n=2). В этом случае полученный момент-угол комплекс будет гомотопически эквивалентен букету (k-1)-й копии S^{2n}. В этом случае единственными нетривиальными двойными когомологиями будут $HH^{0,0}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}$ и $HH^{0,2m}(\mathcal{Z}_\mathcal{S}) \cong \mathbb{Z}^{k-1}$.

6 Заключение

В данной работе нами были определены двойные когомологии момент-угол комплексов, соответствующих симплициальным частично упорядоченным множествам, и были вычислены для нескольких примеров.

Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov. Toric Topology. Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015(518 стр.)

[2] В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. Издательство МЦНМО, Москва, 2004 (272 стр.)

[3] Zhi Lu and Taras Panov. Moment-angle complexes from simplicial posets. Cent. Eur. J. Math. 9 (2011), no. 4, 715–730.

[4] Victor M. Buchstaber and Taras Panov. Algebraic topology of manifolds defined by simple polyhedra. Uspehi Mat. Nauk 53 (1998), no.3, 195–196 (Russian); Russian Math. Surveys 53 (1998), no. 3, 623–625 (English translation).

[5] Victor M. Buchstaber and Taras Panov. Torus actions and the combinatorics of polytopes. Trudy Mat. Inst. Steklova 225 (1999), 96–131 (Russian); Proc. Steklov Inst. Math. 225 (1999), 87–120 (English translation).

[6] Ivan Limonchenko, Taras Panov, Jongbaek Song and Donald Stanley. Double cohomology of moment-angle complexes. Advances in Math., to appear.