Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Соотношения в группах и алгебрах, связанных с флаговыми полиэдральными произведениями

Выполнил студент 303 группы
Вылегжанин Федор Евгеньевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2021 г.

1 Введение

В этой работе исследуются соотношения между минимальными образующими в группе $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ и в алгебре Понтрягина $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ для случая, когда $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]=\{1,\ldots,m\}$, а $\mathbb{F}$ – поле характеристики ноль. И для групп ([PV1]), и для алгебр ([GPTW]) известны минимальные наборы из

$$N(\mathcal{K})=\sum_{J\subset\mathcal{K}}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)=\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})\right)$$

образующих, где $\operatorname{rank} G$ – минимальное количество образующих группы G. Эти образующие далее называются *стандартными.*

Для групп найдена оценка с двух сторон на минимальное количество соотношений:

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, а M – наименьшее число, такое что группа $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ может быть задана $N(\mathcal{K})$ образующими и M соотношениями. Тогда*

$$\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})\right)\le M\le\operatorname{rank}\left(\mathop{\ast}_{J\subset[m]}\Pi_1(\mathcal{K}_J)\right),$$

где $\Pi_1(X):=\ast_\alpha\,\pi_1(X_\alpha)$ для топологического пространства X с компонентами линейной связности $\{X_\alpha\}$.

Если m мало́, то оценки совпадают: расхождения начинаются только тогда, когда $\mathcal{K}$ имеет полные подкомплексы с несвободными фундаментальными группами. Оценка снизу вытекает из асферичности $\mathcal{R}_\mathcal{K}$; оценка сверху получена обобщением метода, который использовал Ли Цай для поиска соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ в случае, когда $\mathcal{K}$ – граница пятиугольника ([Ca]).

Как известно, группа $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ может быть отождествлена с коммутантом прямоугольной группы Коксетера $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$. Это частный случай изоморфизма $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^\mathcal{K})\simeq\operatorname{Ker}\left((\underline{G})^\mathcal{K}\to(\underline{G})^{[m]}\right)$, установленного в [PV1]. Теми же авторами ([PV2]) найден минимальный набор образующих в этой группе: если все группы конечные, в этом наборе ровно $\sum_{J\subset[m]}(n_J-1)\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующих, где $n_J:=\prod_{j\in J}(n_j-1)+1,\ n_j:=|G_j|$.

С помощью подходящей клеточной модели для $(E\underline{G},\underline{G})^\mathcal{K}$ мы получаем обобщение теоремы 1.1:

Теорема 1.2. *Пусть $\underline{G}$ – набор конечных групп, $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, а M – наименьшее число, такое что группа $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^\mathcal{K})$ может быть задана $\sum_{J\subset[m]}(n_J-1)\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующими и M соотношениями. Тогда*

$$\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]}(H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z}))^{\oplus(n_J-1)}\right)\le M\le\operatorname{rank}\left(\mathop{\ast}_{J\subset[m]}(\Pi_1(\mathcal{K}_J))^{*(n_J-1)}\right).$$

Мы также приводим алгоритм поиска достаточного набора соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$, основанный на добавлении вершин к $\mathcal{K}$ по одной (см. раздел 4). Алгоритм сначала даёт копредставление с простыми соотношениями, но более искуственными образующими; большая часть вычислений связана с тем, чтобы перейти от них к стандартным. Вторая техническая трудность – доказательство того, что после смены образующих набор соотношений останется достаточным. Вычисления становятся довольно громоздкими при $m>6$, поэтому алгоритм пока не удалось применить к тем $\mathcal{K}$, для которых оценки из теоремы 1.1 расходятся. Также с помощью этого алгоритма найдено (единственное) соотношение между стандартными образующими для случая, когда $\mathcal{K}$ – граница пятиугольника, и приводится схема, по которой его надо вычислять для границ многоугольников.

Полученный алгоритм можно обобщить для поиска соотношений в $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^\mathcal{K})$, но достаточность найденных соотношений пока не проверялась. Обобщение в данной работе не приводится.

Для алгебр Понтрягина момент-угол комплексов мы уточняем вычисление ряда Пуанкаре, проделанное Пановым и Рэем [PR], вводя более тонкую градуировку: степенью образующей u_i полагаем не $1\in\mathbb{N}_{\ge0}$, а $e_i\in\mathbb{N}^m_{\ge0}$ – i-тый базисный вектор. Если $V=\bigoplus_\alpha V_\alpha$ – $\mathbb{N}^m_{\ge0}$-градуированное векторное пространство, введём формальный степенной *ряд Пуанкаре* $F(V;\lambda):=\sum_\alpha\dim V_\alpha\lambda^\alpha$ от m переменных $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, где $\lambda^\alpha:=\prod_{j=1}^m\lambda_j^{\alpha_j},\ \alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\in\mathbb{N}^m_{\ge0}$.

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда в рассматриваемой градуировке*

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});\lambda)}=-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J,$$

где $\lambda^J:=\prod_{j\in J}\lambda_j,\ \widetilde{\chi}(X):=\sum_i(-1)^i\widetilde{b}_i(X)=\sum_i(-1)^i\dim\widetilde{H}_i(X;\mathbb{F})=\chi(X)-1.$

Зная ряд Пуанкаре ассоциативной алгебры A и степени её образующих $a_1,\dots,a_N$, можно получить информацию о степенях соотношений $r_1,\dots,r_M$, задающих A, с помощью неравенства Голода-Шафаревича (см. [AD]):

$$\left(1-\sum_{i=1}^{N}\lambda^{|a_i|}+\sum_{j=1}^{M}\lambda^{|r_j|}\right)\cdot F(A;\lambda)\geq 1.$$

Оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\mathrm{Tor}_3^A(\mathbb{F},\mathbb{F})=0$. Такие алгебры будем называть *глобально двумерными*, т.к. условие $\mathrm{Tor}_3^A(\mathbb{F},\mathbb{F})=0$ для $\mathbb{F}$-алгебр равносильно $\mathrm{gl.dim}\,A\leq 2$. Флаговый симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ будем называть глобально двумерным, если $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ глобально двумерна. Пусть $\mathcal{G}(2)$ – множество всех глобально двумерных флаговых симплициальных комплексов.

Известно ([An]), что любая алгебра, заданная *комбинаторно свободным* набором соотношений (см. определение в разделе 6), глобально двумерна. Вместе с теоремой 1.3 это даёт следующий результат:

Теорема 1.4. *Если $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$, то алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ может быть задана стандартными образующими и набором соотношений, который содержит по $b_0(\mathcal{K}_J)-\chi(\mathcal{K}_J)$ соотношений степени $\sum_{j\in J}e_j$ для каждого $J\subset[m]$, и не содержит других соотношений.*

Наоборот: если $\mathcal{K}$ – флаговый комплекс, и найден комбинаторно свободный *набор из $\sum_{J\subset[m]}b_0(\mathcal{K}_J)-\chi(\mathcal{K}_J)$ тождеств, которым удовлетворяет $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$, из которых ровно $b_0(\mathcal{K}_J)-\chi(\mathcal{K}_J)$ имеют степень $\sum_{j\in J}e_j$, то $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ задаётся этими соотношениями, и $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$.*

$H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ – подалгебра в явно заданной алгебре $H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K};\mathbb{F})$. Поэтому для фиксированного $\mathcal{K}$ за конечное число шагов можно проверить, является ли он глобально двумерным и, если это так, найти все соотношения в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$. Компьютерный перебор с помощью пакета [SL] позволяет это сделать, по крайней мере, для ряда симплициальных комплексов с $m\leq 6$. Почти все они глобально двумерны: видимо, это связано с тем, что при малых m флаговые симплициальные комплексы имеют слишком простую топологию.

Аналогичным образом можно определить классы $\mathcal{G}(n)$ для всех натуральных n. Заметим, что за счёт критерия свободности алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ из [GPTW] верно

$$\mathcal{G}(1)=\{\mathcal{K}:\ \mathrm{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F})=0\}=\{\mathcal{K}:\ H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})\text{ свободна}\}=$$

$$=\{\text{хордовые }\mathcal{K}\}=\{\mathcal{K}:\ \widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})=0,\ \forall J\subset[m]\}.$$

Кроме того, граница октаэдра – простейший случай, когда $\mathcal{K}$ флаговый и имеет нетривиальные вторые гомологии (и она же – простейший случай, когда $\mathcal{K}\notin\mathcal{G}(2)$). То есть можно предположить, что классы $\mathcal{G}(n)$ и $\{\mathcal{K}:\ \widetilde{H}_n(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})=0,\ \forall J\subset[m]\}$ каким-то образом связаны. Тем не менее, пока что даже про класс $\mathcal{G}(2)$ никаких общих результатов не получено.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 описываются стандартные конструкции из торической топологии и излагаются известные результаты. Там же фиксируются обозначения для рядов Пуанкаре и мультиградуировок (пункт 2.5).

Раздел 3 посвящён доказательству теоремы 1.1. Оценка снизу и оценка сверху доказываются независимо в пунктах 3.1 и 3.2 соответственно.

Алгоритм поиска соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ описывается в разделе 4. Сначала вводятся специфические обозначения (4.1), потом описывается сам алгоритм (4.2) и приводятся примеры его использования (4.3). Обоснование алгоритма разбито на две части: сначала получено задание группы нестандартными образующими и соотношениями (4.4), а потом проверяется корректность замены образующих на стандартные (4.6). В пункт 4.5 вынесено описание элементарных преобразований, к последовательности которых сводится алгоритм.

В разделе 5 доказывается теорема 1.2. Это прямое обобщение результатов раздела 3.

В разделе 6 исследуются соотношения в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$. Сначала приводятся общие сведения о комбинаторно свободных множествах и глобально двумерных алгебрах (пункт 6.1). Далее доказывается теорема 1.3 и из неё выводится теорема 1.4 (пункты 6.2 и 6.3). В пункте 6.4 приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

Разделы 3, 4, 6 полностью независимы; раздел 5 опирается на результаты раздела 3.

Содержание

2 Предварительные сведения

Большая часть определений и результатов этого параграфа взята из [BP]; см. также статьи [PRV, PV1, PV2, GIPS].

2.1 Симплициальные комплексы, полиэдральные произведения

Определение 2.1. *Симплициальный комплекс* $\mathcal{K}$ на множестве вершин V – это набор подмножеств $I \subset V$, называемый *гранями* комплекса, удовлетворяющий двум свойствам:

- $\varnothing \in \mathcal{K}$;

- Если $I \in \mathcal{K}$ и $J \subset I$, то $J \in \mathcal{K}$.

Обычно $V = [m] = \{1, \ldots, m\}$.

Если $i \in [m]$, но $\{i\} \notin \mathcal{K}$, то i называют *призрачной вершиной*. По умолчанию, рассматриваемые симплициальные комплексы не имеют призрачных вершин, то есть $\{i\} \in \mathcal{K}$, $\forall i \in [m]$.

Определение 2.2. Каждому подмножеству $J \subset [m]$ соответствует *полный подкомплекс* симплициального комплекса $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}_J := \{I \in \mathcal{K} : \ I \subset J\}.$$

Определение 2.3. Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Его *стандартная геометрическая реализация* $|\mathcal{K}|$ – это объединение граней стандартного геометрического симплекса $\Delta^{m-1} = \mathrm{conv}\{e_1, \ldots, e_m\} \subset \mathbb{R}^m$, соответствующих абстрактным симплексам $I \in \mathcal{K}$ (симплексу $I \in \mathcal{K}$ соответствует грань $\mathrm{conv}\{e_i : \ i \in I\}$).

Определение 2.4. *Недостающая грань* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ – это такое множество $J \subset [m]$, $J \notin \mathcal{K}$, что любое собственное подмножество J принадлежит $\mathcal{K}$. Комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый*, если все его недостающие грани одномерны.

Ясно, что флаговый симплициальный комплекс однозначно задаётся своим остовом; любой полный подкомплекс флагового комплекса – флаговый.

Определение 2.5. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *хордовый*, если любой простой цикл длины $q > 3$ в его 1-остове имеет хорду (ребро, соединяющее несоседние вершины цикла). Альтернативное определение: $\mathcal{K}$ не имеет полных подкомплексов, изоморфных границе q-угольника, $\forall q > 3$.

Определение 2.6. Пусть i – вершина $\mathcal{K}$. Её *звездой* называют симплициальный подкомплекс

$$\mathrm{st}_{\mathcal{K}}(i) := \{I \in \mathcal{K} : \ I \cup \{i\} \in \mathcal{K}\}.$$

Определение 2.7. *Барицентрическое подразделение* симплициального комплекса $\mathcal{K}$ – это симплициальный комплекс $\mathcal{K}'$ на множестве $\mathcal{K} \setminus \{\varnothing\}$, определённый как

$$\mathcal{K}' = \{\{I_1, \ldots, I_r\} : \ I_j \in \mathcal{K}; \ I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_r; \ I_1 \neq \varnothing\}.$$

Симплексы множества $\mathcal{K}'$ будем записывать как $(I_0 \subset \cdots \subset I_r)$; его вершины $(I) = \{I\}$ будем называть *барицентрами* симплексов $I \in \mathcal{K}$ (это мотивировано естественным кусочно-линейным гомеоморфизмом $|\mathcal{K}'| \to |\mathcal{K}|$, переводящим вершины в барицентры).

Определение 2.8. Пусть $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – последовательность пар топологических пространств, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$. *Полиэдральным произведением* называется следующее топологическое пространство:

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Если $X_1 = \cdots = X_m = X, \ A_1 = \cdots = A_m = A$, то пишут $(X, A)^{\mathcal{K}} := (\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$. Если $A_1 = \cdots = A_m = \mathrm{pt}$, пишут $(\underline{X})^{\mathcal{K}} := (\underline{X}, \underline{\mathrm{pt}})^{\mathcal{K}}$.

Определение 2.9. *Момент-угол комплекс* и *вещественный момент-угол комплекс*:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}; \quad \mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}.$$

Предложение 2.10 ([BP])**.** *Если $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах и $J \subset [m]$, то $(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}_J}$ – ретракт пространства $(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$.*

Как следствие, фундаментальная группа пространства $(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}_J}$ канонически вкладывается в $\pi_1((\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}})$, что позволяет говорить, что та или иная образующая (или соотношение, или элемент конечного порядка) "относится к полному подкомплексу $\mathcal{K}_J, \ J \subset [m]$".

Для момент-угол комплексов группы гомологий полностью известны:

Предложение 2.11 ("формула Хохстера"; см. [BP, теорема 4.5.8])**.**

$$H_k(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \simeq \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{k-|J|-1}(\mathcal{K}_J); \quad H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \simeq \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J).$$

2.2 Группы, связанные с полиэдральными произведениями

Определение 2.12. Пусть $\underline{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ – набор абстрактных групп, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на m вершинах. *Граф-произведением групп* называется группа

$$(\underline{G})^{\mathcal{K}} := \mathop{\ast}_{i=1}^{m} G_i / \left(g_i g_j = g_j g_i,\ g_i \in G_i,\ g_j \in G_j,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}\right).$$

Ясно, что граф-произведение зависит только от 1-остова $\mathcal{K}$.

Определение 2.13. Взяв в предыдущем определении $G_i = \mathbb{Z}_2$, получим *прямоугольную группу Кокстера*

$$\mathrm{RC}_{\mathcal{K}} := \langle g_1, \ldots, g_m \mid g_i^2 = \mathrm{id},\ i = 1 \ldots m;\ g_i g_j = g_j g_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K} \rangle.$$

Предложение 2.14 ([PRV, PV1])**.** *Пусть $G_1, \ldots, G_m$ – топологические группы, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Тогда есть каноническое гомотопическое расслоение*

$$(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}} \to (B\underline{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} BG_i.$$

□

Следствие 2.15 ([PV1])**.** *Пусть $G_1, \ldots, G_m$ – дискретные группы. Тогда*

1. $\pi_1((B\underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq (\underline{G})^{\mathcal{K}}$;
2. $\pi_k((B\underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq \pi_k((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}),\ k \geq 2$;
3. $(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}$ *и* $(B\underline{G})^{\mathcal{K}}$ *асферичны тогда и только тогда, когда* $\mathcal{K}$ *флаговый;*
4. *Имеем точную последовательность фундаментальных групп*

$$1 \to \pi_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) \to (\underline{G})^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\pi} \prod_{i=1}^{m} G_i \to 0.$$

□

Если все G_i абелевы, то в последней точной последовательности π – это абелианизация. Поэтому в этих случаях

$$\pi_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq ((\underline{G})^{\mathcal{K}})'.$$

Тем самым с помощью полиэдральных произведений можно изучать коммутанты граф-произведений абелевых групп, или, в общем случае, *декартовы подгруппы* $\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}} \to \prod_{i=1}^{m} G_i)$.

Рассмотрение частного случая $G_i = \mathbb{Z}_2$ даёт

Следствие 2.16. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

1. $\pi_1((\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{RC}_{\mathcal{K}}$;
2. $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ *и* $(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}$ *асферичны;*
3. $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \simeq \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, а пара (D^1, S^0) гомотопически эквивалентна паре $(S^\infty, S^0) = (E\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$. □

2.3 Алгебры, связанные с полиэдральными произведениями

Определение 2.17. Градуированной *супералгеброй Ли* будем называть градуированную абелеву группу с градуированно-антикоммутативной билинейной скобкой, удовлетворяющей тождеству Якоби:

$$[y, x] = -(-1)^{|x||y|}[x, y]; \quad (-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|x||y|}[y, [z, x]] + (-1)^{|y||z|}[z, [x, y]] = 0.$$

Например, если X – топологическое пространство, то $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ – градуированная супералгебра Ли (вместе с произведением Самельсона, т.е. со смещённым произведением Уайтхеда).

Свободная супералгебра Ли обозначается как $FSL(u_1, \ldots, u_m)$; свободная ассоциативная алгебра (т.е. тензорная алгебра) – как $T(u_1, \ldots, u_m)$. Также будем рассматривать коммутативную супералгебру Ли (с нулевой скобкой) $CL(u_1, \ldots, u_m)$.

Определение 2.18. Над любым кольцом с единицей можно определить граф-произведение супералгебр Ли:
$$SL_{\mathcal{K}} := FSL(u_1,\dots,u_m)/\left([u_i,u_i]=0,\ i=1\dots m;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right),\ |u_i|=1.$$

Предложение 2.19 ([BP, предложение 8.4.1])**.** *Для любого коммутативного кольца с единицей k есть точная последовательность градуированных супералгебр Ли*
$$0\to\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\to\pi_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\to CL(u_1,\dots,u_m)\to 0$$
и алгебр Понтрягина
$$0\to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};k)\to H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};k)\to\Lambda_k[u_1,\dots,u_m]\to 0.$$
□

Предложение 2.20 ([PR])**.** *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\pi_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}})\otimes\mathbb{Q}\simeq SL_{\mathcal{K}}$.* □

За счёт теоремы Милнора-Мура из этого предложения вытекает

Следствие 2.21. *Если $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле характеристики ноль, то*
$$H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbb{F})\simeq T(u_1,\dots,u_m)/\left(u_i^2=0,\ i=1\dots m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$
□

2.4 Образующие и соотношения (флаговый случай)

Предложение 2.22 ([PV2, теорема 5.2])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})=\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*
$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$
где $g_k\in G_k\setminus\{\mathrm{id}\},\ k_1<\dots<k_{l-2}<j>i,\ k_s\neq i,\ \forall s;\ i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Частный случай:

Предложение 2.23 ([PV1, теорема 4.5])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Тогда $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})=\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ имеет минимальный набор образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*
$$(g_{k_1},(g_{k_2},\dots,(g_{k_{l-2}},(g_j,g_i))\dots)),$$
где g_k – k-ая образующая $\mathrm{RC}_{\mathcal{K}},\ k_1<\dots<k_{l-2}<j>i,\ k_s\neq i,\ \forall s;\ i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Предложение 2.24 ([PV1])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый. Группа $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})=\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}}\to\prod_{i=1}^m G_i)$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ хордовый.* □

Предложение 2.25 ([GPTW])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F})$ имеет минимальный набор мультипликативных образующих, состоящий из всех вложенных коммутаторов вида*
$$[u_{k_1},[u_{k_2},\dots,[u_{k_{l-2}},[u_j,u_i]]\dots]],$$
где $k_1<\dots<k_{l-2}<j>i,\ k_s\neq i,\ \forall s;\ i$ – наименьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\dots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. □

Предложение 2.26 ([GPTW])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ флаговый, $\mathbb{F}$ – поле. $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F})$ свободна тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ хордовый.* □

2.5 Мультиградуировка; ряды Пуанкаре

Определение 2.27. Пусть X – топологическое пространство. Его числа Бетти и эйлерова характеристика определяются как
$$b_i(X):=\dim H_i(X),\ \chi(X):=\sum_i(-1)^ib_i(X).$$

Определим также *приведённые* числа Бетти и эйлерову характеристику:

$$\widetilde{b}_i(X) := \dim \widetilde{H}_i(X), \;\; \widetilde{\chi}(X) := \sum_i (-1)^i \widetilde{b}_i(X).$$

Очевидно, $\widetilde{b}_i(X) = b_i(X)$ при $i \neq \{0, -1\}$; если $X \neq \varnothing$, то

$$\widetilde{b}_0(X) = b_0(X) - 1, \quad \widetilde{b}_{-1}(X) = b_{-1}(X) = 0.$$

Отдельно рассматривается случай $X = \varnothing$: имеем

$$\widetilde{b}_0(\varnothing) = b_0(\varnothing) = 0, \quad \widetilde{b}_{-1}(\varnothing) = 1, \; b_{-1}(\varnothing) = 0.$$

В любом случае $\widetilde{\chi}(X) = \chi(X) - 1$.

Под мультиградуировкой всегда будем понимать градуировку ассоциативной алгебры элементами полугруппы $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$. Базисные векторы обозначим как $e_1, \ldots, e_m$; степень однородного элемента a – как $|a|$. Если $J \subset [m]$, вместо степени $\sum_{j \in J} e_j \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}$ будем писать просто "степень J". Часто, хотя и не всегда, алгебра будет порождена m образующими, и i-ая образующая имеет степень e_i.

Определение 2.28. Пусть V – мультиградуированное векторное пространство. Его *рядом Пуанкаре* будем называть формальный степенной ряд от m переменных $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

$$F(V; \lambda) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^m_{\geq 0}} \dim(V_\alpha) \cdot \lambda^\alpha, \quad \lambda^\alpha := \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\alpha_i}.$$

Аналогично соглашению выше, если $J \subset [m]$, вместо $\lambda^{\sum_{j \in J} e_j} = \prod_{j \in J} \lambda_j$ будем писать просто λ^J.

Следующее почти очевидное предложение несколько раз используется в разделе 6.3.

Предложение 2.29. *Ряд Пуанкаре обладает следующими свойствами:*

1. $F(V_1 \oplus V_2; \lambda) = F(V_1; \lambda) + F(V_2; \lambda)$;
2. $F(V_1 \otimes V_2; \lambda) = F(V_1; \lambda) \cdot F(V_2; \lambda)$;
3. *Если* $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ *– точная последовательность алгебр Хопфа, то*

$$F(A_2; \lambda) = F(A_1; \lambda) \cdot F(A_3; \lambda).$$

Доказательство. Очевидно, если $\{v_i\}_{i \in I}$ – базис векторного пространства V, то $F(V; \lambda) = \sum_{i \in I} \lambda^{|v_i|}$.

1. Базис прямой суммы – это объединение базисов.
2. Базис тензорного произведения – это попарные тензорные произведения базисных векторов.
3. Как векторное пространство, расширение одной алгебры Хопфа с помощью другой – это тензорное произведение.

□

3 Оценки количества соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$

В этом разделе все гомологии – с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

Определение 3.1. Пусть G – конечнопорождённая группа. Её *ранг* – это наименьшее натуральное число N, такое что G порождается N элементами. Обозначение: $\operatorname{rank} G = N$.

Предложение 3.2. *Ранг обладает следующими свойствами:*

1. *(теорема Грушко)* $\operatorname{rank} \ast_i G_i = \sum_i \operatorname{rank} G_i$;
2. $\operatorname{rank} G \geq \operatorname{rank} G_{\mathrm{ab}}$;
3. $\operatorname{rank} \mathbb{Z}^m = m$.

Доказательство. 1. [LS, теорема 1.8].

2. Очевидно, ранг образа группы не превосходит ранга самой группы (образы образующих являются образующими образа). Абелианизация сюръективна по определению.

3. Если $\mathbb{Z}^m$ порождается $n < m$ элементами, то $e_1, \ldots, e_m$ – линейные комбинации этих элементов. Между ними в таком случае есть линейная зависимость с целыми коэффициентами, что даёт противоречие.

$\square$

Пример 3.3 ([PV1]). Рассмотрим $G = \pi_1(\mathcal{R_K})$. Найдя набор из $N(\mathcal{K}) = \sum_{J\subset[m]} \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующих, Панов и Верёвкин доказали, что $\operatorname{rank} \pi_1(\mathcal{R_K}) \le N(\mathcal{K})$.

С другой стороны, $G_{\mathrm{ab}} = H_1(\mathcal{R_K})$; по формуле Хохстера, $H_1(\mathcal{R_K}) = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$. Так как $\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ – свободные абелевы группы, $H_1(\mathcal{R_K})$ – тоже свободная абелева, и её ранг – сумма рангов прямых слагаемых. То есть

$$N(\mathcal{K}) \ge \operatorname{rank} \pi_1(\mathcal{R_K}) \ge \operatorname{rank} H_1(\mathcal{R_K}) = N(\mathcal{K}).$$

Поэтому $\operatorname{rank} \pi_1(\mathcal{R_K}) = N(\mathcal{K})$; в частности, найденный набор образующих минимальный.

Определение 3.4. Пусть X – топологическое пространство, $\{X_\alpha\}$ – его компоненты связности. Обозначим $\Pi_1(X) := \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha)$.

Замечание 3.5. В этих обозначениях удобно записывается теорема Пуанкаре, которую обычно формулируют только для связных пространств: $(\Pi_1(X))_{\mathrm{ab}} = H_1(X)$. Отметим также следующие свойства:

1. $\Pi_1(X) = \pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha)$ (по теореме Ван Кампена);

2. $\operatorname{rank} \Pi_1(X) = \sum_\alpha \operatorname{rank} \pi_1(X_\alpha)$ (по теореме Грушко).

Напомним формулировку теоремы 1.1:

Теорема 3.6. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, а M – наименьшее число, такое что $\pi_1(\mathcal{R_K})$ может быть задана $N(\mathcal{K})$ образующими и M соотношениями. Тогда*

$$\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]} H_1(\mathcal{K}_J)\right) \le M \le \operatorname{rank}\left(\mathop{\ast}_{J\subset[m]} \Pi_1(\mathcal{K}_J)\right).$$

Доказательство. Применив формулу Хохстера и теорему Грушко, перепишем доказываемое в виде

$$\operatorname{rank} H_2(\mathcal{R_K}) \le M \le \sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J).$$

Доказательства неравенств вынесены в подпункты 3.1 и 3.2 соответственно. $\square$

Замечание 3.7. $\bigoplus H_1(\mathcal{K}_J)$ – это абелианизация группы $\ast\, \Pi_1(\mathcal{K}_J)$, так что расхождение между оценками начинается, когда неравенство $\operatorname{rank} G_{\mathrm{ab}} \le \operatorname{rank} G$ становится строгим. Но ранги могут не совпасть, даже если все $\Pi_1(\mathcal{K}_J)$ абелевы:

$$1 = \operatorname{rank} \mathbb{Z}_6 = \operatorname{rank}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) < \operatorname{rank}(\mathbb{Z}_2 \ast \mathbb{Z}_3) = 2.$$

Этот же пример показывает, что $\operatorname{rank} A \oplus B$ может быть меньше, чем $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

3.1 Оценка снизу

Во флаговом случае $\mathcal{R_K}$ асферично, то есть $\mathcal{R_K} = K(\pi_1(\mathcal{R_K}), 1)$. Следовательно, вторые гомологии $\mathcal{R_K}$ – это вторые гомологии группы $\pi_1(\mathcal{R_K})$ (с коэффициентами в тривиальном $\pi_1(\mathcal{R_K})$-модуле $\mathbb{Z}$).

Поэтому неравенство $M \ge \operatorname{rank} H_2(\mathcal{R_K})$ – частный случай более общего утверждения:

Лемма 3.8. *Пусть группа G задана N образующими и M соотношениями: $G = \langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_N \mid R_1, \ldots, R_M \rangle$. Тогда $M - N \ge \operatorname{rank} H_2(G; \mathbb{Z}) - \operatorname{rank} H_1(G; \mathbb{Z})$.*

Хотя известно алгебраическое доказательство этого факта (см. [Ep, лемма 1.2]), дадим топологическое.

Доказательство леммы 3.8. С помощью данного копредставления построим пространство Эйленберга-Маклейна $K = K(G,1)$ по стандартной индуктивной процедуре, приклеивая клетки к букету N окружностей (см., например, [FF, §1.11, теорема 7]). Имеем

$$K = \bigvee_{i=1}^{N} S_i^1 \cup \bigcup_{j=1}^{M} e_j^2 \cup \bigcup_{\alpha} e_\alpha^{>2},$$

где границы двумерных клеток приклеиваются по отображениям, соответствующим словам $R_1, \dots, R_M \in F(N) = \pi_1(\bigvee_{i=1}^N S_i^1)$. Запишем клеточный цепной комплекс этого пространства:

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z}^N \xleftarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^M \xleftarrow{\partial_3} \dots$$

Обозначим $A = \operatorname{Im}\partial_2 \subset \mathbb{Z}^N$; это свободная абелева группа некоторого ранга $k < N$. Тогда $H_1(K;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^N/A \simeq \mathbb{Z}^{N-k} \oplus T_1$, где T_1 конечная. Поэтому $\operatorname{rank} H_1(K;\mathbb{Z}) \geq N-k$.

С другой стороны, $A = \mathbb{Z}^M/\operatorname{Ker}\partial_2$, где $\operatorname{Ker}\partial_2 \subset \mathbb{Z}^M$ – свободная абелева группа; поэтому $\operatorname{Ker}\partial_2 \simeq \mathbb{Z}^{M-k}$. Наконец, $H_2(K;\mathbb{Z}) = \operatorname{Ker}\partial_2/\operatorname{Im}\partial_3$, поэтому $\operatorname{rank} H_2(K;\mathbb{Z}) \leq \operatorname{rank}\operatorname{Ker}\partial_2 = M-k$.

Итак,

$$\operatorname{rank} H_2(G;\mathbb{Z}) - \operatorname{rank} H_1(G;\mathbb{Z}) \leq (M-k)-(N-k) = M-N.$$

□

Замечание 3.9. В доказательстве не использовалась минимальность N, т.е. равенство $N = \operatorname{rank} H_1(K)$, которое верно для $\mathcal{R}_\mathcal{K}$. Из него легко следует, что $\partial_2 = 0$, т.е. что $H_2(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ – это факторгруппа $\mathbb{Z}^M$. В частности, двумерные клетки приклеиваются по гомологически тривиальным отображениям, т.е. все соотношения $R_1, \dots, R_M$ лежат в коммутанте группы $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$.

Рассматривая следующий дифференциал, можно было бы уточнить оценку до $M \geq \operatorname{rank} H_2(\mathcal{R}_\mathcal{K}) + \operatorname{rank}\pi_2(\operatorname{sk}^2 K)$; но для второго слагаемого у нас пока нет никаких оценок, кроме тривиальной “≥ 0”.

Замечание 3.10. Если $\mathbb{F}$ – поле характеристики ноль, то $H_i(G;\mathbb{F}) = \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},\mathbb{F}) \simeq \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{F}[G]}(\mathbb{F},\mathbb{F})$. Размерность этого векторного пространства *не превышает* размерность (как $\mathbb{F}[G]$-модуля) i-го элемента минимальной резольвенты $\mathbb{F}[G]$-модуля $\mathbb{F}$. В отличие от градуированного случая, размерности не обязательно равны: например, $H_1(\mathbb{Z}_2;\mathbb{F}) = H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty;\mathbb{F}) = 0$, но минимальная резольвента для $\mathbb{F}[\mathbb{Z}_2] \simeq \mathbb{F}[x]/(x^2-1)$ нетривиальна. Поэтому алгебра $\mathbb{F}[\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})]$ должна задаваться хотя бы $\dim H_2(\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K});\mathbb{F}) = b_2(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = \sum_{J\subset[m]} b_1(\mathcal{K}_J)$ соотношениями.

Ясно, что $b_2(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ строго меньше $\operatorname{rank} H_2(\mathcal{R}_\mathcal{K};\mathbb{Z})$, если у $\mathcal{K}$ есть полные подкомплексы с кручением в первых гомологиях. Возможно, для таких $\mathcal{K}$ после перехода от $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ к её групповой алгебре набор соотношений можно уменьшить. К сожалению, эти комплексы должны имеют много вершин (например, минимальная флаговая триангуляция $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ имеет 11 вершин [BOWWZZ]), и известными методами не удаётся явно описать соответствующий набор минимальных соотношений за разумное время.

3.2 Оценка сверху

Приведём конструкцию, которую использовал Ли Цай [Ca] для альтернативного задания группы $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$ образующими и соотношениями.Она основана на втором определении $\mathcal{R}_\mathcal{K}$, которое ближе к оригинальной конструкции Дэвиса-Янушкевича. В этой конструкции рассматривается геометрическая реализация симплициального комплекса $\operatorname{cone}(\mathcal{K})$, вложенной в m-мерный куб $[0,1]^m$ как кубический подкомплекс $\operatorname{cc}(\mathcal{K})$. Отражая $\operatorname{cc}(\mathcal{K})$ относительно координатных гиперплоскостей, получим 2^m его копий. Их объединение – клеточное подпространство куба $[-1,1]^m$, которое совпадает с $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ при отождествлении $(D^1,S^0) \simeq ([-1,1],\{-1,1\})$.

Определение 3.11 ([BP, §2.9])**.** Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс, $\mathcal{K}'$ – его барицентрическое подразбиение; $\operatorname{cone}(\mathcal{K}')$ – конус над этим подразбиением; $|\operatorname{cone}(\mathcal{K}')|$ – его геометрическая реализация. Определим кусочно-линейное отображение $|\operatorname{cone}(\mathcal{K}')| \to [0,1]^m$, задав его значения на вершинах: вершина конуса переходит в $\sum_{j=1}^m e_j$, а барицентр симплекса $I \in \mathcal{K}$ – в точку $\sum_{j\in[m]\setminus I} e_j$. Обозначим как $\operatorname{cc}(\mathcal{K})$ образ этого отображения.

Лемма 3.12. *Объединение гиперплоскостей $\bigcup_{j\in J}\{x_j = 0\}$ пересекает $\operatorname{cc}(\mathcal{K})$ по подпространству, гомеоморфному $\bigcup_{j\in J}|\operatorname{st}_{\mathcal{K}'}(j)| \subset |\mathcal{K}'|$ и гомотопически эквивалентному $|\mathcal{K}_J|$.*

Доказательство. При описанном кусочно-линейном отображении на гиперплоскость $\{x_j = 0\}$ попадают барицентры тех и только тех $I \in \mathcal{K}$, для которых $j \in I$. Заметим также, что образы вершин $|\operatorname{cone}(\mathcal{K}')|$ лежат по одну сторону от этой гиперплоскости либо на ней; поэтому, если внутренняя точка симплекса попала на гиперплоскость, то весь симплекс ей принадлежит. Так как вершина конуса не лежит на гиперплоскости, достаточно рассмотреть только образы симплексов из $\mathcal{K}'$. По определению барицентрического подразделения, эти симплексы соответствуют цепям в частично упорядоченном множестве граней $\mathcal{K}$.

Докажем, что если симплекс $(I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathcal{K}'$ попал на эту гиперплоскость, то $j \in I_0$ (по определению, это будет означать, что $(\{j\} \subset I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathcal{K}'$, т.е. что $(I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)$).

Действительно: если он попал на эту гиперплоскость, то все его вершины попали; вершины такого симплекса – это барицентры граней $I_0, \ldots, I_r$ симплициального комплекса $\mathcal{K}$. Значит, $j \in I_0$, что и требовалось. Наоборот: если $j \in I_0$, то симплекс попадёт на гиперплоскость, т.к. все его вершины лежат в ней. Значит, $\mathrm{cc}(\mathcal{K}) \cap \{x_j = 0\}$ – это объединение образов симплексов, принадлежавших $\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)$. Так как построенное кусочно-линейное отображение инъективно и непрерывно (инъективность доказана в [BP]), а $|\operatorname{cone}(\mathcal{K}')|$ компактно, это гомеоморфизм на образ. Доказано.

Теперь покажем, что $\bigcup_{j\in J} |\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)| \simeq |\mathcal{K}_J|$. Построим строгую деформационную ретракцию некоторого подпространства $U \subset |\mathcal{K}'|$ на $|\mathcal{K}_J|$. Зададим её так: барицентр симплекса $I \in \mathcal{K}$, $I \cap J \neq \varnothing$, будем двигать с постоянной скоростью по этому симплексу к барицентру симплекса $I \cap J \in \mathcal{K}$; на каждый геометрический симплекс $|(I_0 \subset \cdots \subset I_k)|$ из $|\mathcal{K}'|$, вершины которого удовлетворяют $I_i \cap J \neq \varnothing$, продолжим эту гомотопию кусочно-линейно (для этих симплексов будем говорить, что на них гомотопия *определена*). То есть

$$U = \bigcup \{|(I_0 \subset \cdots \subset I_k)| \subset |\mathcal{K}'| : \; I_0 \cap J \neq \varnothing\}.$$

Вершины геометрического симплекса $|I_0 \subset \cdots \subset I_k|$ лежат в $|I_k|$. При гомотопии они будут двигаться по этому симплексу в какие-то вершины того же симплекса; симплекс – выпуклое множество, поэтому область значения гомотопии не превосходит множества, на котором гомотопия определена, и содержится в $|\mathcal{K}'|$.

Заметим, что $|\mathcal{K}_J| \subset U$ (если $I \subset J$, то $I \cap J = I \neq \varnothing$), и гомотопия неподвижна на $|\mathcal{K}_J|$. При этом образ каждого барицентра, лежащего в U, – барицентр некоторого симплекса в $\mathcal{K}_J$, т.к. это барицентр симплекса $|I \cap J|$. Осталось доказать, что U совпадает с $\bigcup_{j\in J} |\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)|$. Пусть $I_0 \subset \cdots \subset I_r$ – цепь абстрактных симплексов в $\mathcal{K}$ (т.е. абстрактный симплекс в $\mathcal{K}'$), и $I_0 \cap J \neq \varnothing$. Последнее означает, что в эту цепь можно добавить $\{j\}$ для произвольного $j \in I_0 \cap J$ (возможно, $\{j\} = I_0$), и получить симплекс из $\mathcal{K}'$. По определению, это значит, что $(I_0 \subset \cdots \subset I_r \in \mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)$.

Наоборот: если $(I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)$ для некоторого $j \in J$, то либо $\{j\} \neq I_0$ и $(\{j\} \subset I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathcal{K}'$, либо $\{j\} = I_0$ и $(I_0 \subset \cdots \subset I_r) \in \mathcal{K}'$. Любое из этого означает, что симплексы $I_0, \ldots, I_r$ содержат j, и поэтому $|(I_0 \subset \cdots \subset I_r)| \subset U$.

Итак, мы получили гомотопию между тождественным отображением $\bigcup_{j\in J} |\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)| \to \bigcup_{j\in J} |\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)|$ и некоторым отображением $\bigcup_{j\in J} |\mathrm{st}_{\mathcal{K}'}(j)| \to |\mathcal{K}_J|$, постоянную на $|\mathcal{K}_J|$. Это доказывает гомотопическую эквивалентность. $\square$

Предложение 3.13 ([BP, конструкция 4.1.5])**.** *Вещественный момент-угол комплекс может быть получен с помощью декартова квадрата*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{\mathcal{K}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & {[-1,1]^m} \arrow[d, "\rho"'] \\ \mathrm{cc}(\mathcal{K}) \arrow[r, hook] & {[0,1]^m}, \end{tikzcd}$$

где $\rho(u_1, \ldots, u_m) := (u_1^2, \ldots, u_m^2)$. $\square$

Это предложение как раз показывает, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ получается из $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$ отражением относительно координатных гиперплоскостей. Будем индексировать копии $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$ подмножествами $J \subset [m]$.

Доказательство неравенства $M \leq \sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J)$ из теоремы 1.1. Рассуждения выше показывают, что $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ можно построить следующим образом: начиная со стягиваемого пространства $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$, соответствующего $J = \varnothing$, для каждого непустого $J \subset [m]$ мы приклеиваем к текущему пространству ещё одну копию $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$. Подмножества $J \subset [m]$ будем перебирать в таком порядке, чтобы J_1 шло раньше, чем J_2, если $J_1 \subset J_2$. Тогда в момент приклеивания J-ой копии уже приклеены копии $J \setminus \{j\}$, $\forall j \in J$. Копия номер $J \setminus \{j\}$ примыкает к J-ой по гиперплоскости $\{x_j = 0\}$; таким образом, по лемме 3.11, J-ая копия приклеивается по подпространству, гомотопически эквивалентному $\mathcal{K}_J$. На каждом шаге пространство остаётся связным.

В лемме ниже доказано, что J-ому приклеиванию можно сопоставить добавление $\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующих и $\operatorname{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J)$ соотношений. В итоге $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ будет задана $\sum_{J\subset[m]} \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующими и $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J)$ соотношениями, что и требовалось. $\square$

Лемма 3.14. *Пусть (X, A) и (B, A) – клеточные пары, причём X связно, а B односвязно; обозначим $Y = X \cup_A B$. Предположим, что $\pi_1(X)$ можно задать N_0 образующими и M_0 соотношениями. Тогда $\pi_1(Y)$ можно задать $N_0 + \widetilde{b}_0(A)$ образующими и $M_0 + \operatorname{rank} \Pi_1(A)$ соотношениями.*

Доказательство леммы.

1. Пусть $\{A_\alpha\}$ – все компоненты связности A; произвольно выберем "отмеченную компоненту" A_{α_0}. Выберем по вершине $a_\alpha \in A_\alpha$ для всех α. Выберем по пути из a_{α_0} в a_α для всех $\alpha \neq \alpha_0$; по теореме о клеточной аппроксимации эти пути можно выбрать в 1-остове B. Приклеим к B по одномерной клетке с концами a_{α_0} и a_α, и по двумерной клетке. Верхнюю полуокружность границы двумерной клетки отобразим на путь из a_{α_0} в a_α, а нижнюю – на приклеенную одномерную клетку. Полученное пространство обозначим B'; также $Y' = X \cup_A B'$. Ясно, что B – строгий деформационный ретракт B' (приклеенные двумерные клетки строго деформационно ретрагируются на выбранные пути из a_{α_0} в a_α), поэтому $\pi_1(B) = \pi_1(B') = 0$. Аналогично, Y – строгий деформационный ректракт Y'.

   Т.е. сразу можно считать, что B содержит непересекающиеся одномерные клетки с концами a_{α_0} и a_α, $\forall \alpha \neq \alpha_0$. Пусть T – объединение этих клеток, точки a_{α_0} и точек a_α; это стягиваемое клеточное подпространство в B, пересекающее α-ую компоненту связности пространства A только в точке a_α. Значит, $A \cup T \simeq (A \cup T)/T \simeq \bigvee_\alpha A_\alpha$, то есть $\pi_1(A \cup T) \simeq \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) = \Pi_1(A)$.

2. Докажем, что $X \cup T \simeq X \vee \bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} S^1_\alpha$. Рассуждая, как с B, заменим X на X' – бо́льшее гомотопически эквивалентное пространство, содержащее непересекающиеся одномерные клетки с концами a_α и a_{α_0}. Получаем стягиваемое клеточное подпространство в $T' \subset X'$, аналогичное T. Тогда $(X' \cup T)/T'$ получается из X'/T' приклеиванием окружностей к отмеченной точке (по одной окружности для каждого $\alpha \neq \alpha_0$), т.е.

$$X \cup T \simeq X' \cup T \simeq (X' \cup T)/T' \simeq (X'/T') \vee \bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} S^1_\alpha \simeq X' \vee \bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} S^1_\alpha \simeq X \vee \bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} S^1_\alpha,$$

   что и требовалось. Значит,

$$\pi_1(X \cup T) = \pi_1(X) * \mathop{\ast}_{\alpha \neq \alpha_0} \pi_1(S^1) = \pi_1(X) * F(\widetilde{b}_0(A)),$$

   где $F(m)$ обозначает свободную группу с m образующими.

3. Запишем теорему Ван Кампена для склейки

$$\begin{tikzcd} A \cup T \arrow[r] \arrow[d] & X \cup T \arrow[d] \\ B \arrow[r] & Y; \end{tikzcd}$$

   получим

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X) * F(\widetilde{b}_0(A)) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \pi_1(Y). \end{tikzcd}$$

   То есть $\pi_1(Y)$ получается из $\pi_1(X)$ добавлением $\widetilde{b}_0(A)$ образующих и дальнейшей факторизацией по нормальному замыканию образа группы $\Pi_1(A)$. Последний шаг можно заменить на "добавление $\operatorname{rank} \Pi_1(A)$ соотношений", выбрав в $\Pi_1(A)$ минимальный набор образующих.

□

4 Индуктивный алгоритм поиска соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$

Рассуждая как Ли Цай, можно получить ровно $\sum_{J \subset [m]} \operatorname{rank} \Pi_1(\mathcal{K}_J)$ соотношений, но найденные им в [Ca] образующие отличаются от образующих Панова-Верёвкина. В этом разделе описывается другой алгоритм, который, в общем случае, выдаёт больше соотношений, но эти соотношения – между стандартными образующими.

4.1 Обозначения

4.1.1 Образующие в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$

Введём обозначения для стандартных образующих группы $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$: обозначим

$$\Gamma_{i\in J} := (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots, (g_{k_{l-2}}, (g_j, g_i)) \ldots)),$$

где $J = \{k_1, \ldots, k_{l-2}, j, i\}$, $k_1 < \cdots < k_{l-2} < j > i$, $k_s \neq i$, $\forall s$. Чтобы $\Gamma_{i\in J}$ была образующей, i должна быть наименьшей вершиной в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_{\{k_1,\ldots,k_{l-2},j,i\}}$, не содержащей j. Легко видеть, что i и J однозначно задают эту образующую.

Определение 4.1. Пусть $i, j \in J$. Будем писать $i \sim_J j$, если i и j лежат в одной компоненте связности комплекса $\mathcal{K}_J$.

Определение 4.2. Пусть $i \in J$. Обозначим $\searrow_J (i) := \min(j \in J: \ i \sim_J j)$.

Таким образом, $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ порождена всеми такими $\Gamma_{i\in J}$, что $J \subset [m]$, $i = \searrow_J (i)$ и $i \not\sim_J \max(J)$.

Введём множества, элементы которых индексируют наборы образующих. Эти элементы будем обозначать $\lambda = (i \in J)$.

Определение 4.3. Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин V. Обозначим:

$$\Lambda(\mathcal{K}) := \{(i \in J) \mid J \subset V, \ i = \searrow_J (i), \ i \not\sim_J \max(J)\}.$$

Тот факт, что набор $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda(\mathcal{K})}$ порождает группу $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$, можно записать в виде эпиморфизма

$$p_{\mathcal{K}} : F(\Lambda(\mathcal{K})) \twoheadrightarrow \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}, \ a_{i\in J} \mapsto \Gamma_{i\in J}$$

(здесь $F(X)$ – свободная группа с базисом $\{a_x\}_{x\in X}$).

При вложении фундаментальных групп полных подкомплексов образующие переходят в образующие; отождествим порождённые ими подгруппы в $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ с фундаментальными группами таких пространств $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_J}$. Тогда эпиморфизмы $p_{\mathcal{K}}$ согласованы с вложениями $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_J}) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$: имеем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
F(\Lambda(\mathcal{K}_J)) \arrow[r, hook] \arrow[d] & F(\Lambda(\mathcal{K})) \arrow[d] \\
\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_J} \arrow[r, hook] & \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}.
\end{tikzcd}$$

4.1.2 Выражение слов через образующие

Пусть $h \in \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ – произвольный элемент. Так как $\{\Gamma_{i\in J}\}$ порождают всю группу $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$, есть хотя бы один способ выразить h через стандартные образующие. На самом деле доказательство сюръективности $p_{\mathcal{K}}$ из статьи [PV1] можно превратить в детерминированный алгоритм. Такой алгоритм сопоставлял бы каждому элементу из $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ запись его в виде произведения стандартных образующих; это не что иное, как теоретико-множественное *сечение* эпиморфизма $p_{\mathcal{K}}$. Обозначим это сечение как σ :

$$\begin{tikzcd}
F(\Lambda(\mathcal{K})) \arrow[r, equal] \arrow[d, "p_{\mathcal{K}}"] & F(\Lambda(\mathcal{K})) \\
\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} \arrow[ur, dashed, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Важным свойством σ является “естественность по отношению к вложению полных подкомплексов”: если $w \in \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_J}$, то $\sigma(w)$ в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_J}$ и в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ даёт один и тот же результат.

Нам не понадобится выражать через образующие все элементы $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$; для нужных частных случаев соответствующее частично определённое отображение будет описана в пункте 4.5.

Определение 4.4. Пусть V – множество вершин $\mathcal{K}$. Для каждого $I \subset V$ обозначим $w_I := \prod_{i\in I} g_i$, где сомножители упорядочены по убыванию. Так как $g_i^2 = \mathrm{id}$, слово w_I^{-1} – произведение тех же букв, упорядоченных по возрастанию.

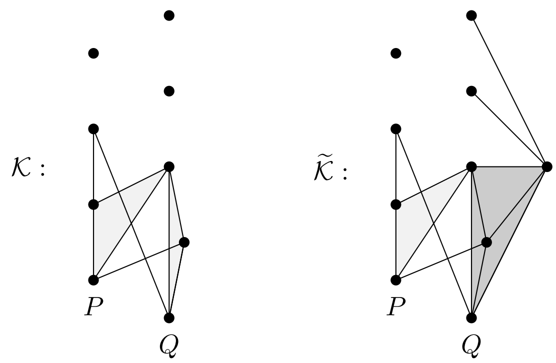


Рис. 1: $\mathcal{K}$ и $\widetilde{\mathcal{K}}$ (пример).

4.1.3 Добавление вершины к симплициальному комплексу

Пусть теперь $\widetilde{\mathcal{K}}$ – флаговый симплициальный комплекс на $[m]$. Обозначим $\mathcal{K} := \mathcal{K}_{[m-1]}$. Можно считать, что, наоборот, мы добавляем вершину m к флаговому симплициальному комплексу $\mathcal{K}$. Обозначим

$$P := \{i \in [m-1] : \ \{i, m\} \notin \widetilde{\mathcal{K}}\};$$

$$Q := \{i \in [m-1] : \ \{i, m\} \in \widetilde{\mathcal{K}}\};$$

Лемма 4.5. $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \widetilde{\mathcal{K}}_{Q \sqcup \{m\}}$, *причём* $\widetilde{\mathcal{K}}_{Q\sqcup\{m\}}$ *можно отождествить с* $\mathrm{cone}(\mathcal{K}_Q)$.

Доказательство. Вложение $\supset$ очевидно. Наоборот: если $J \in \widetilde{\mathcal{K}}$, но $J \notin \mathcal{K}$, то $m \in J$. Докажем, что $J \subset Q \sqcup \{m\}$. Действительно: если $i \in J \cap P$, то $\{i, m\} \subset J \in \widetilde{\mathcal{K}}$, поэтому $\{i, m\} \in \widetilde{\mathcal{K}}$, что противоречит определению P. Равенство доказано. Отождествление с $\mathrm{cone}(\mathcal{K}_Q)$ возможно, т.к вершина m соединена ребром с каждой из вершин Q, а симплициальный комплекс $\widetilde{K}$ флаговый; значит, если $\sigma \in \mathcal{K}_Q$, то $\sigma \sqcup \{m\} \in \widetilde{K}_{Q\sqcup\{m\}}$, и наоборот. □

Лемма 4.6. *Пусть* $\mathcal{K}$ *– любой флаговый симплициальный комплекс на* $[m-1]$, *и* $Q \subset [m-1]$ *– любое подмножество. Тогда* $\mathcal{K} \cup \mathrm{cone}(\mathcal{K}_Q)$, *где вершине конуса присваивается номер* m *– флаговый симплициальный комплекс.*

Доказательство. Объединение двух симплициальных комплексов на одном и том же множестве вершин – симплициальный комплекс (от добавления призрачной вершины $\mathcal{K}$ не изменился). Осталось проверить флаговость. Пусть вершины множества I попарно соединены рёбрами. Если $I \subset [m-1]$, то $I \in \mathcal{K}$. Иначе $m \in I$; значит, $I \subset Q \sqcup \{m\}$, т.к. любая вершина из $I \setminus \{m\}$ соединена ребром с m. Любые две вершины из $I \setminus \{m\}$ соединены рёбрами в $\mathcal{K}$, поэтому $I \setminus \{m\} \in \mathcal{K}$. Поэтому, по определению конуса, $I \in \mathrm{cone}(\mathcal{K}_Q)$. □

4.2 Описание алгоритма

Определение 4.7. Введём обозначения:

$$(a_\lambda)^{w_I} := \sigma(w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I), \ \forall I \subset P, \ \forall \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q);$$

$$\widehat{a}_\lambda := (a_\lambda)^{g_m} := \sigma((\Gamma_\lambda)^{g_m}), \ \forall \lambda \in \Lambda(\mathcal{K});$$

$$T_I := \sigma((g_m, w_I)), \ \forall I \subset P.$$

Теорема 4.8. *Пусть группа* $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ *задана соотношениями* $R_1, \ldots, R_M \in F(\Lambda(\mathcal{K}))$ *в стандартных образующих. Следующий алгоритм строит по ним набор соотношений, задающих группу* $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ *в стандартных образующих.*

1. *Вычислить всевозможные* $\widehat{a}_\lambda, \ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K})$, *и всевозможные* $T_I, \ I \subset P$;

2. $R_1, \ldots, R_M$ *включить в список соотношений;*

3. *Заменив в словах* $R_1, \ldots, R_M$ *буквы* a_λ *на слова* $\widehat{a}_\lambda$, *получить ещё* M *соотношений* $\widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_M$;

4. *Перебрать все пары $(I, (i \in J))$, такие что $I \subset P$, $(i \in J) \in \Lambda(\mathcal{K}_Q)$, и при этом полный подкомплекс $\widetilde{\mathcal{K}}_{I \sqcup J \sqcup \{m\}}$ нехордовый. Для каждой такой пары включить в список соотношений соотношение*

$$T_I \cdot (a_{i\in J})^{w_I} \cdot T_I^{-1} \cdot ((a_{i\in J})^{w_I \cdot g_m})^{-1} \in F(\Lambda(\mathcal{K}_{I \sqcup J \sqcup \{m\}})),$$

где $(a_{i\in J})^{w_I \cdot g_m}$ получается из слова $(a_{i\in J})^{w_I} \in F(\Lambda(\mathcal{K}_{I\sqcup J}))$ заменой каждой буквы $a_\lambda \in F(\Lambda(\mathcal{K}_{J'}))$ на слово $\widehat{a}_\lambda \in F(\Lambda(\mathcal{K}_{J' \sqcup \{m\}}))$.

Замечание 4.9. Заметим, что каждое из добавляемых соотношений действительно выполняется в $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$:

- $R_1, \ldots, R_M$ выполняются, т.к. $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ – подгруппа в $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$;
- Слова $\widehat{R}_i$ под действием $p_{\widetilde{\mathcal{K}}} : F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})) \to \mathrm{RC}_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ переходят в

$$g_m^{-1} \cdot p_{\mathcal{K}}(R_i) \cdot g_m = g_m^{-1} \cdot \mathrm{id} \cdot g_m = \mathrm{id},$$

  т.к. $p_{\widetilde{\mathcal{K}}}(\widehat{a}_\lambda) = g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m$;
- Слова

$$T_I \cdot (a_{i\in J})^{w_I} \cdot T_I^{-1} \cdot ((a_{i\in J})^{w_I \cdot g_m})^{-1}$$

  под действием $p_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ переходят в

$$(g_m, w_I) \cdot w_I^{-1}\Gamma_{i\in J} w_I \cdot (g_m, w_I)^{-1} \cdot \left(g_m^{-1} w_I^{-1} \Gamma_{i\in J} w_I g_m\right)^{-1} = g_m^{-1} w_I^{-1} \cdot g_m \Gamma_{i\in J} g_m^{-1} \Gamma_{i\in J}^{-1} \cdot w_I g_m = \mathrm{id},$$

  т.к. $\Gamma_{i\in J}$ и g_m коммутируют (вершина m соединена ребром с каждой вершиной из $J \subset Q$).

Осталось доказать достаточность вычисляемых соотношений. Априори даже неясно, почему среди них есть нетривиальные.

4.3 Примеры вычислений

4.3.1 Границы многоугольников

Применим алгоритм к случаю, когда $\widetilde{\mathcal{K}} = C_m$ – граница m-угольника; вершины упорядочены по циклу. Тогда $Q = \{1, m-1\}$, $P = \{2, \ldots, m-2\}$. Комплекс $\mathcal{K}$ (ломаная из $(m-1)$ звена) хордовый, поэтому $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ свободна. Единственный нехордовый полный подкомплекс в $\widetilde{\mathcal{K}}$ – это весь $\widetilde{\mathcal{K}}$.

$\mathcal{K}_Q$ – несвязное объединение двух точек, поэтому $\Lambda(\mathcal{K}_Q)$ одноэлементно, и единственная образующая в $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q}$ равна $a_{1\in\{1,m-1\}}$; $\Gamma_{1\in\{1,m-1\}} = (g_{m-1}, g_1)$. Поэтому единственное соотношение соответствует паре $(I, (i \in J)) = (P, (1 \in \{1, m-1\}))$ и имеет вид

$$T_{\{2,\ldots,m-2\}} \cdot (a_{1\in\{1,m-1\}})^{w_{\{2,\ldots,m-2\}}} = (a_{1\in\{1,m-1\}})^{w_{\{2,\ldots,m-2\}} \cdot g_m} \cdot T_{\{2,\ldots,m-2\}}.$$

Алгоритм вычисления этого соотношения таков:

1. выразить через стандартные образующие элементы

$$T = (g_m, g_{m-2} g_{m-3} \cdot \ldots \cdot g_3 g_2)$$

   и

$$A = (g_{m-1}, g_1)^{g_{m-2} g_{m-3} \cdots g_2};$$

2. для каждой стандартной образующей a_λ, входящую в запись A, выразить через стандартные образующие элемент $(\Gamma_\lambda)^{g_m}$;
3. Перемножив такие слова, получить элемент B – выражение для

$$(g_{m-1}, g_1)^{g_{m-2} g_{m-3} \cdots g_2 \cdot g_m}.$$

Тогда соотношение имеет вид $TA = BT$.

4.3.2 Граница пятиугольника

В данном случае стандартных образующих десять:

$$a_1 = a_{1\in 13},\ a_2 = a_{1\in 14}, a_3 = a_{2\in 24}, a_4 = a_{2\in 25}, a_5 = a_{3\in 35},$$
$$b_1 = a_{2\in 245},\ b_2 = a_{2\in 235},\ b_3 = a_{3\in 135},\ b_4 = a_{1\in 134},\ b_5 = a_{1\in 124}.$$

Через них выражаются T, A (длинные вычисления пропущены):

$$T = \sigma((g_5, g_3g_2)) = \cdots = \sigma((g_5, g_3)(g_5, g_2)((g_5, g_2), g_3)) = a_5a_4b_2^{-1};$$
$$A = \sigma\left((g_4, g_1)^{g_3g_2}\right) = \cdots = a_3^{-1}a_2b_4^{-1}a_1a_2^{-1}a_3a_2b_5^{-1}a_1^{-1}.$$

Чтобы получить B, надо в записи A поменять каждый a_λ на $\widehat{a_\lambda} = (a_\lambda)^{g_m} = \sigma((\Gamma_\lambda)^{g_m})$. После вычислений получаем:

$$\widehat{a}_1 = \sigma((g_3, g_1)^{g_5}) = \cdots = \sigma((g_5, g_3)(g_3, g_1)(g_1, (g_5, g_3))(g_3, g_5)(g_1, g_3)) = a_5a_1b_3a_5^{-1};$$
$$\widehat{a}_2 = \sigma((g_4, g_1)^{g_5}) = \sigma((g_4, g_1)) = a_2;$$
$$\widehat{a}_3 = \sigma((g_4, g_2)^{g_5}) = \cdots = \sigma((g_5, g_2)((g_5, g_2), g_4)(g_4, g_2)(g_2, g_5)) = a_4b_1^{-1}a_3a_4^{-1};$$
$$\widehat{b}_4 = \sigma((g_3, (g_4, g_1))^{g_5}) = \cdots = \sigma((g_5, g_3)(g_3, (g_4, g_1))(g_1, g_4)(g_3, g_5)(g_4, g_1)) = a_5b_4a_2^{-1}a_5^{-1}a_2;$$
$$\widehat{b}_5 = \sigma((g_2, (g_4, g_1))^{g_5}) = \cdots = \sigma((g_5, g_2)(g_2, (g_4, g_1))(g_1, g_4)(g_2, g_5)(g_4, g_1)) = a_4b_5a_2^{-1}a_4^{-1}a_2.$$

Поэтому

$$B = (g_4, g_1)^{g_3g_2g_5} = \widehat{a}_3^{-1}\widehat{a}_2\widehat{b}_4^{-1}\widehat{a}_1\widehat{a}_2^{-1}\widehat{a}_3\widehat{a}_2\widehat{b}_5^{-1}\widehat{a}_1^{-1} =$$
$$= a_4a_3^{-1}b_1a_4^{-1}a_5a_2b_4^{-1}a_1b_3a_5^{-1}a_2^{-1}a_4b_1^{-1}a_3a_2b_5^{-1}a_4^{-1}a_5b_3^{-1}a_1^{-1}a_5^{-1}.$$

Получаем соотношение $TA = BT$:

$$a_5a_4b_2^{-1}a_3^{-1}a_2b_4^{-1}a_1a_2^{-1}a_3a_2b_5^{-1}a_1^{-1} = a_4a_3^{-1}b_1a_4^{-1}a_5a_2b_4^{-1}a_1b_3a_5^{-1}a_2^{-1}a_4b_1^{-1}a_3a_2b_5^{-1}a_4^{-1}a_5b_3^{-1}a_1^{-1}a_4b_2^{-1}.$$

Выбрав циклически симметричные образующие (например, вместо $\Gamma_{2\in 245} = (g_4, (g_5, g_2))$ взяв $(g_2, g_4g_5) = (g_2, g_5g_4)$), можно получить более симметричные записи этого соотношения: один из вариантов –

$$x_1y_3^{-1}x_4^{-1}y_5 \cdot x_2y_4^{-1}x_5^{-1}y_1 \cdot x_3y_5^{-1}x_1^{-1}y_2 \cdot x_4y_1^{-1}x_2^{-1}y_3 \cdot x_5y_2^{-1}x_3^{-1}y_4.$$

Известно, что $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ в этом случае – поверхность с пятью ручками; это слово соответствует симметричной (симметрия не только циклическая, но и диэдральная), но нестандартной склейке такой поверхности из двадцатиугольника.

Неизвестно, есть ли симметричный базис в $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$, в котором это соотношение переписалось бы как произведение пяти коммутаторов.

4.4 Геометрическое разложение $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{K}}}$

Обозначим

$$X := \mathcal{R}_\mathcal{K},\ Y := \mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{K}}},\ A := \mathcal{R}_{\mathcal{K}_Q}.$$

4.4.1 Предварительные рассуждения

Предложение 4.10. *Разложение из леммы 4.6*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}_Q \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{cone}(\mathcal{K}_Q) \arrow[d] \\ \mathcal{K} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{K}} \end{tikzcd}$$

превращается в следующее разложение топологических пространств:

$$\begin{tikzcd} A^{\sqcup 2^{|P|}} \sqcup A^{\sqcup 2^{|P|}} \arrow[r] \arrow[d] & (A \times D^1)^{\sqcup 2^{|P|}} \arrow[d] \\ X \sqcup X \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

Доказательство. Вложение симплициальных комплексов надо понимать как вложение полных подкомплексов с призрачными вершинами. Добавление призрачной вершины домножает пространство $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ на S^0, а вершины, соединённой со всеми – на D^1. Будем записывать сомножители в порядке "сначала P, потом Q, потом m". Тогда "комбинаторная диаграмма" даёт "топологическую диаграмму"

$$\begin{tikzcd}
(S^0)^{|P|} \times \mathcal{R}_{\mathcal{K}_Q} \times S^0 \arrow[r] \arrow[d] & (S^0)^{|P|} \times \mathcal{R}_{\mathcal{K}_Q} \times D^1 \arrow[d] \\
\mathcal{R}_{\mathcal{K}} \times S^0 \arrow[r] & \mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{K}}};
\end{tikzcd}$$

пространства в ней гомеоморфны требуемым. □

В рассуждениях мы будем полагаться на иллюстрации, аналогичные рис. 2.

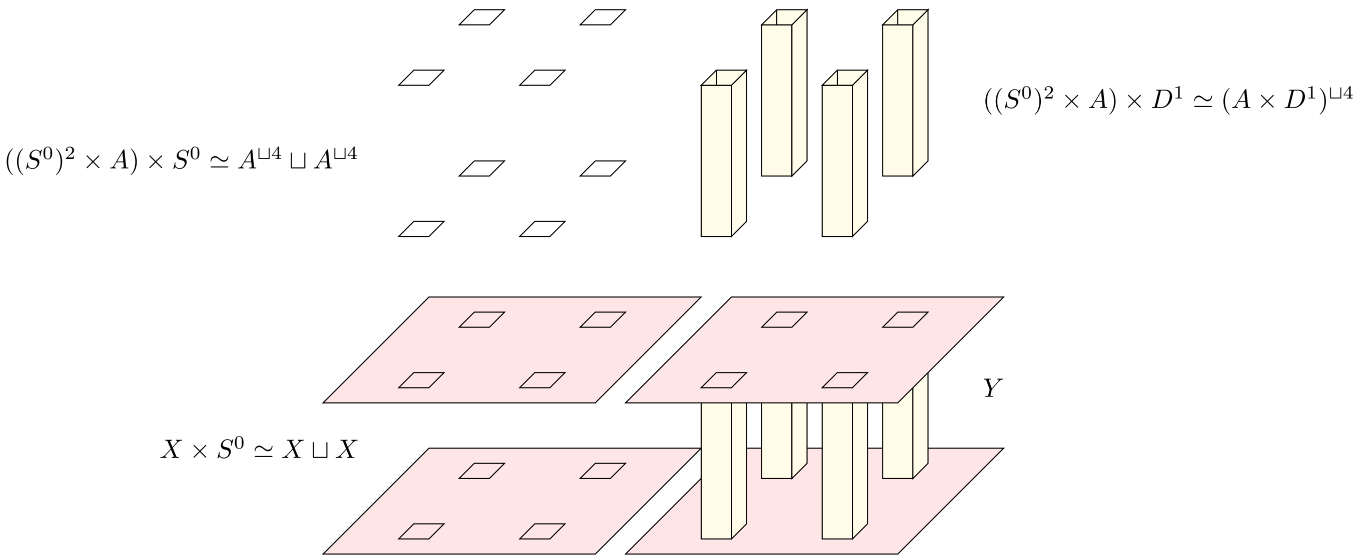


Рис. 2: Разложение из предложения 4.10 (случай $|P| = 2$)

Применению теоремы ван Кампена препятствует то, что пространства несвязны. Исправим это, добавив к пересечению некоторое "минимальное дерево". Выберем в каждом D^1 отмеченную точку $\mathrm{pt} \in S^0$.

Лемма 4.11. *Рассмотрим следующее подпространство* $W \subset \mathrm{sk}^1(I^{|P|})$:

$$W := D^1 \times \mathrm{pt} \times \dots \times \mathrm{pt} \cup S^0 \times D^1 \times \mathrm{pt} \times \dots \times \mathrm{pt} \cup \dots \cup S^0 \times \dots \times S^0 \times D^1.$$

Тогда:

1. *W связно и стягиваемо;*

2. *Тождественное отображение этих $|P|$ координат задаёт вложение $W \subset X$;*

3. *W пересекает каждую из $2^{|P|}$ копий $A \subset X$ в отмеченной точке и только в ней;*

4. *Если слово из букв $g_1, \dots, g_m$ интерпретировать как путь по 1-остову m-мерного куба, то пространство W – это объединение всевозможных путей w_I^{-1}, $I \subset P$.*

Доказательство. 1. Индукция по $|P|$. База: отрезок стягиваем. Переход: при увеличении $|P|$ на единицу $W = W \times \mathrm{pt}$ заменяется на $W_1 = W \times \mathrm{pt} \cup (S^0)^{|P|} \times D^1$. То есть к W приклеивается $2^{|P|}$ несвязных отрезков в $2^{|P|}$ разных точках $(S^0)^{|P|} \times \mathrm{pt}$; очевидно, это гомотопическая эквивалентность.

2. Так как $\mathcal{K}$ – комплекс без призрачных вершин, X содержит 1-остов m-мерного куба: $\mathcal{R}_{\mathrm{pt} \sqcup \dots \sqcup \mathrm{pt}} = \mathrm{sk}^1(I^m)$. В частности, X содержит и 1-остовы всех "координатных подкубов".

3. Будем называть точку S^0, отличную от отмеченной, символом pt'. Копии пространства A вложены в X как

$$\underbrace{\mathrm{pt}\,(') \times \dots \times \mathrm{pt}^{(')}}_{2^{|P|}\text{ множителей}} \times A \subset X,$$

где $\mathrm{pt}^{(\prime)}$ – либо pt, либо pt′; от этого зависит, о какой именно копии речь. W вложено в X как $W\times \underbrace{\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}}_{2^{|Q|}\text{ множителей}} \subset X$. Поэтому единственное возможное пересечение A с W – в точке

$$\underbrace{\mathrm{pt}\,(^{\prime})\times\cdots\times\mathrm{pt}^{(\prime)}}_{2^{|P|}\text{ множителей}}\times\underbrace{\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}}_{2^{|Q|}\text{ множителей}},$$

где $(^{\prime})$ расставлены так же, как выше. Такая точка принадлежит и A, и W, т.к. W содержит все вершины $|P|$-мерного куба.

4. Буквы слова w_I^{-1} упорядочены по возрастанию. Пусть $I=\{i_1,\ldots,i_k\}$, $i_1<\ldots,i_k$. Тогда слово $w_I^{-1}=g_{i_1}g_{i_2}\ldots g_{i_k}$ задаёт путь

$$0\rightsquigarrow e_{i_1}\rightsquigarrow e_{i_1}+e_{i_2}\rightsquigarrow\cdots\rightsquigarrow\sum_{j=1}^{k}e_{i_j}.$$

Очевидно, отмеченная точка принадлежит W. Переход от вершины $e_{i_1}+\cdots+e_{i_j}$ к вершине $e_{i_1}+\cdots+e_{i_j}+e_{i_{j+1}}$ происходит по ребру

$$\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}\times\underbrace{\mathrm{pt}'}_{i=i_1}\times\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}\times\underbrace{\mathrm{pt}'}_{i=i_j}\times\cdots\times\mathrm{pt}\times\underbrace{D^1}_{i=i_{j+1}}\times\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}\,.$$

Очевидно, оно содержится в W, т.к. W содержит подпространство

$$S^0\times\cdots\times\underbrace{S^0}_{i=i_{j+1}-1}\times D^1\times\mathrm{pt}\times\cdots\times\mathrm{pt}\,.$$

Наоборот: каждый из $2^{i_{j+1}-1}$ отрезков такого подпространства содержится в некотором пути w_I^{-1}, где I содержит те и только те i, для которых данный отрезок имеет pt′ вместо pt .

□

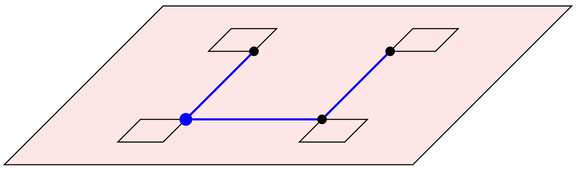


Рис. 3: Подпространство $W\subset X$ и $2^{|P|}$ копий подпространства A (случай $|P|=2$)

Рассмотрим теперь $U:=S^0\times\cdots\times S^0\times D^1\subset Y$ – подпространство, соответствующее симплексу $\{m\}\in\widetilde{\mathcal{K}}$.

Лемма 4.12.
- *$W\cup U$ связно и стягиваемо;*
- *$W\cup U$ пересекает каждую из $2^{|P|+1}$ копий A в Y в отмеченной точке, и только в ней.*

Доказательство. Это частный случай леммы 4.11, если в ней заменить P на $P\sqcup\{m\}$. □

4.4.2 Применение теоремы ван Кампена

Рассмотрим следующее разложение $\mathcal{R}_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ в объединение *связных* клеточных подпространств:

$$\begin{tikzcd} W\cup U\cup(S^0)^{|P|}\times A\times S^0 \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & W\cup(S^0)^{|P|}\times A\times D^1 \arrow[d, "f"] \\ U\cup X\times S^0 \arrow[r, "g"] & Y. \end{tikzcd} \qquad (*)$$

Это разложение изображено на рис. 4.

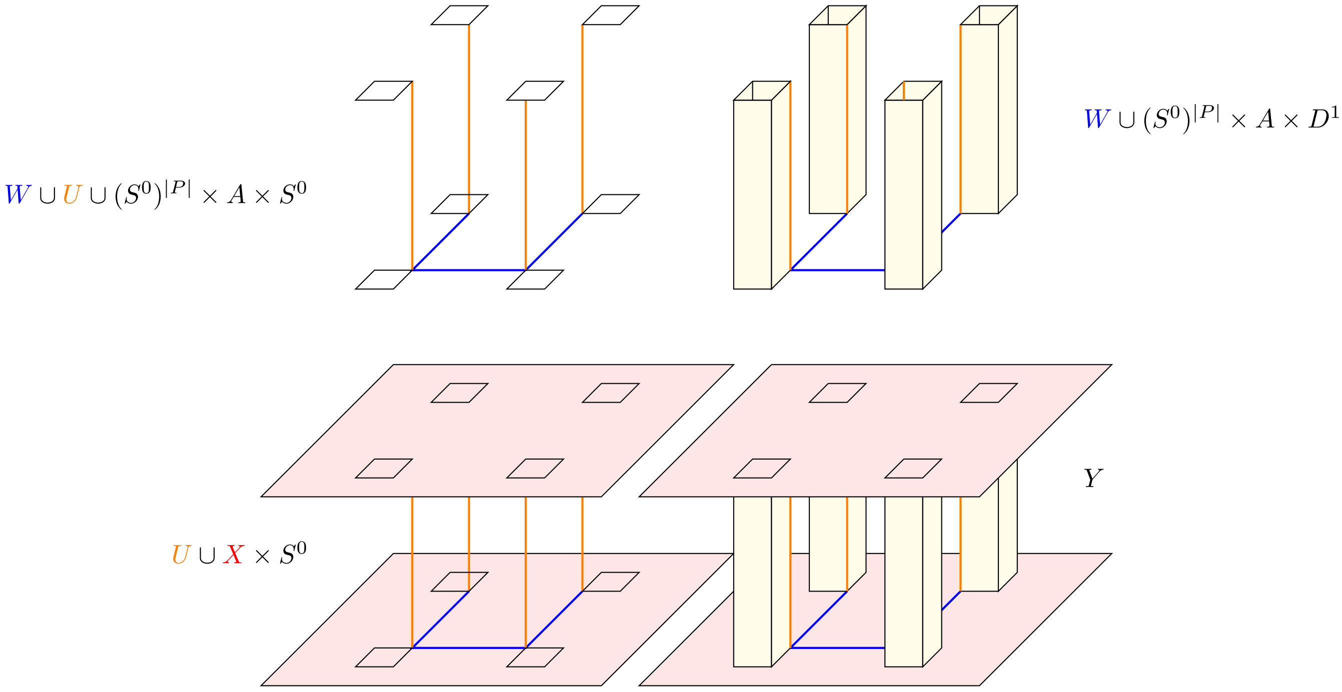


Рис. 4: Разложение $(*)$ (случай $|P| = 2$)

Теорема 4.13. *1. Диаграмма $(*)$ гомотопически эквивалентна диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{\widetilde{I} \subset P \sqcup \{m\}} A \arrow[r, "\iota_1'"] \arrow[d, "\iota_2'"] & \bigvee_{I \subset P} A \arrow[d, "f'"] \\
X \vee X \vee \bigvee_{I \subset P,\ I \neq \varnothing} S^1 \arrow[r, "g'"] & Y,
\end{tikzcd}$$

или, если использовать верхние индексы и $\widehat{\bullet}$ для различения слагаемых в букетах,

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_{\widetilde{I} \subset P \sqcup \{m\}} A^{(\widetilde{I})} \arrow[r, "\iota_1'"] \arrow[d, "\iota_2'"] & \bigvee_{I \subset P} A^{(I)} \arrow[d, "f'"] \\
X \vee \widehat{X} \vee \bigvee_{I \subset P,\ I \neq \varnothing} S^1 \arrow[r, "g'"] & Y;
\end{tikzcd}$$

2. При переходе к фундаментальным группам получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
*_{\widetilde{I} \subset P \sqcup \{m\}} (\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q})^{(\widetilde{I})} \arrow[r, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, "(\iota_2)_*"] & *_{I \subset P} (\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q})^{(I)} \arrow[d, "f_*"] \\
\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} * \widehat{\mathrm{RC}}'_{\mathcal{K}} * F(z_I :\ I \subset P,\ I \neq \varnothing) \arrow[r, "g_*"] & \mathrm{RC}'_{\widetilde{K}};
\end{tikzcd}$$

3. Гомоморфизмы фундаментальных групп принимают следующие значения на образующих свободных сомножителей:

- $(\iota_1)_* :\ (\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})} \mapsto (\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I} \setminus \{m\})}$;
- $(\iota_2)_* :$

$$(\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})} \mapsto \begin{cases} w_I^{-1} \Gamma_\lambda w_I, & m \in I; \\ z_I^{-1} \cdot \widehat{w_I^{-1} \Gamma_\lambda w_I} \cdot z_I, & m \notin I \end{cases}$$

(запись $\widehat{w_I^{-1} \Gamma_\lambda w_I}$ надо понимать как элемент $w_I^{-1} \Gamma_\lambda w_I \in \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$, рассматриваемый как элемент $\widehat{\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}}$ – второго свободного сомножителя; полагаем также $z_\varnothing := \mathrm{id}$);

- $f_*:\ (\Gamma_\lambda)^{(I)} \mapsto w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I$;
- $g_*:$
$$\Gamma_\lambda \mapsto \Gamma_\lambda; \quad \widehat{\Gamma}_\lambda \mapsto g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m; \quad z_I \mapsto (g_m, w_I).$$

Доказательство. Ясно, что пространства из первого пункта теоремы имеют фундаментальные группы, указанные во втором пункте теоремы. Строить гомотопические эквивалентности и описывать гомоморфизмы групп будем одновременно.

- Рассмотрим пространства из верхней строки диаграммы $(*)$. За счёт лемм 4.11 и 4.12 факторизация по стягиваемому клеточному подпространству $W \cup U$ превращает верхнее левое пространство в букет $2^{|P|+1}$ копий A, а верхнее правое – в букет $2^{|P|}$ приведённых цилиндров над A, т.к. $W \cup U$ пересекает $(S^0)^{|P|} \times A \times S^0$ в точности в отмеченных точках копий A. В верхнем левом пространстве копии A разбиваются на пары и под действием ι_1' отображаются тождественно в верхнее и нижнее основание приведённого цилиндра, гомотопически эквивалентного A; приведённый цилиндр гомотопически эквивалентен A, и при этой эквивалентности вложения соответствуют тождественным отображениям фундаментальных групп. Это доказывает гомотопические эквивалентности
$$W \cup U \cup (S^0)^{|P|} \times A \times S^0 \simeq \bigvee_{\widetilde{I} \subset P \sqcup \{m\}} A, \quad W \cup (S^0)^{|P|} \times A \times D^1 \simeq \bigvee_{I \subset P} A$$
и формулу для $(\iota_1)_*$.

- Докажем формулу для f_*. Пусть $I \subset P$ и $\Gamma_\lambda^{(I)} \in (\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q})^{(I)}$ фиксированы. Элемент Γ_λ задавался некоторой петлёй γ в пространстве $\mathcal{R}_{\mathcal{K}_Q}$, вложенном в букет как I-ое слагаемое. Укажем петлю в исходном пространстве $W \cup (S^0)^{|P|} \times A \times D^1$, переходящую в данную при факторизации: эта петля получается из γ заменой отмеченной точки на отмеченную точку I-ой копии A. Эти точки соединены в W путём, который задаётся словом w_I^{-1} (см. лемму 4.11). То есть рассматриваемая петля – это композиция пути в W, задаваемого словом w_I^{-1}, данной петли, и пути, обратного к w_I^{-1}. Ясно, что в группе $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ она соответствует слову $w_I^{-1} \cdot \Gamma_\lambda \cdot w_I$.

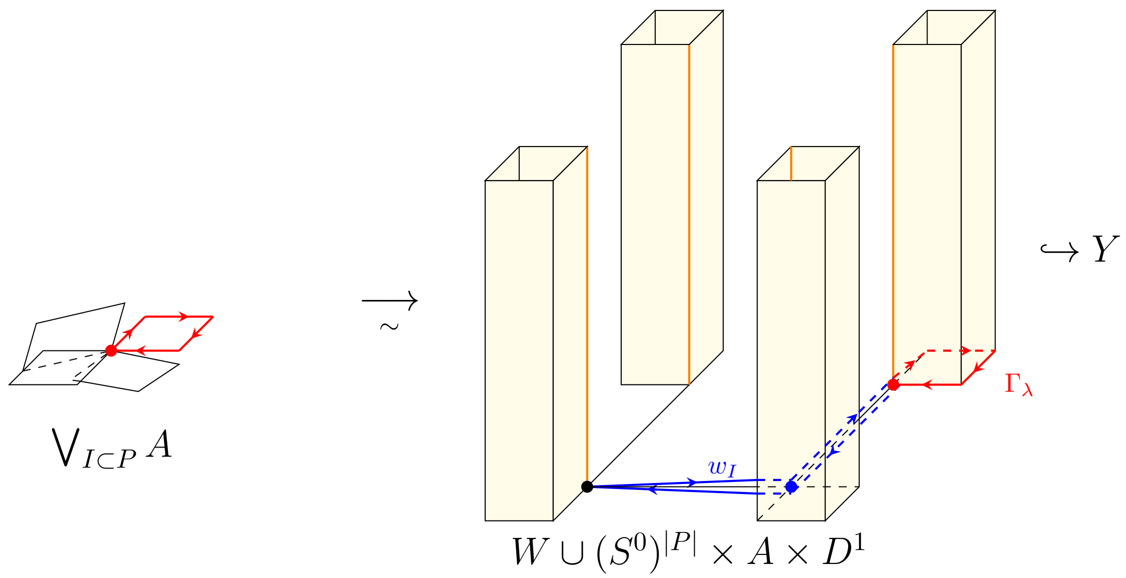


Рис. 5: Геометрический смысл отображения f_*

- Теперь рассмотрим левое нижнее пространство $U \cup X \times S^0$. Чтобы доказать, что оно гомотопически эквивалентно букету двух копий X и $2^{|P|-1}$ окружностей, рассмотрим вспомогательное пространство $\widetilde{X}$, которое получается приклеиванием к $X \sqcup X$ отрезка, соединяющего отмеченные точки, а также приклеиванием $2^{|P|-1}$ квадратов, имеющих этот отрезок стороной. Очевидно, факторизация по этому отрезку даёт гомотопическую эквивалентность $\widetilde{X} \simeq X \vee X \vee \bigvee_{I \subset P,\ I \neq \varnothing} S^1$.

  Введём отображение $h : \widetilde{X} \to U \cup X \times S^0$, при котором стороны квадратов, смежные с выделенным отрезком, отображаются в X с помощью путей w_I^{-1} (см. лемму 4.11). $\widetilde{X}$ содержит стягиваемое клеточное подпространство – объединение $W \times S^0$, вертикального отрезка над отмеченной точкой и "горизонтальных" сторон квадратов. $U \cup X \times S^0$ содержит стягиваемое подпространство – объединение $W \times S^0$ и вертикального отрезка над отмеченной точкой. После факторизации по этим

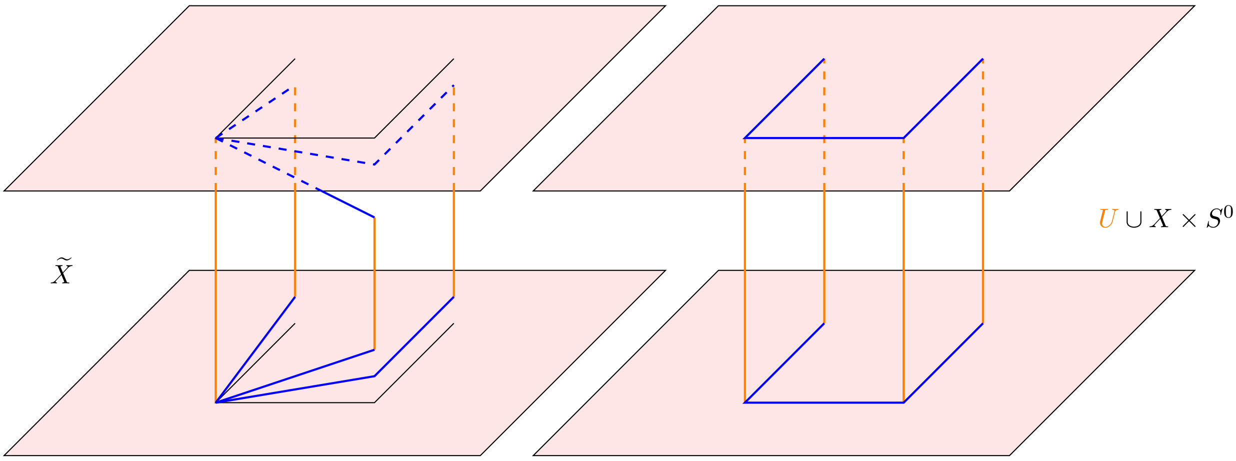


Рис. 6: Отображение h

подпространствам h превращается в тождественное отображение; поэтому h – гомотопическая эквивалентность. Это доказывает, что

$$U \cup X \times S^0 \simeq \widetilde{X} \simeq X \vee X \vee \bigvee_{I \subset P,\ I \neq \varnothing} S^1.$$

- Теперь опишем g_*; удобнее перейти от фундаментальной группы букета к фундаментальной группе $\widetilde{X}$. В качестве отмеченной точки возьмём отмеченную точку "нижней" копии X. Тогда первая копия $\pi_1(X)$ вкладывается в $\pi_1(\widetilde{X})$ в соответствии с вложением $(X, \mathrm{pt}) \to (\widetilde{X}, \mathrm{pt})$; чтобы вложить вторую, надо выбрать путь между отмеченными точками "верхней" и "нижней" копий X. В качестве такого пути возьмём вертикальный отрезок. Наконец, направления обходов квадратов выберем "против часовой стрелки", то есть в порядке "по горизонтали - по вертикали - по горизонтали - по вертикали" (пример такого обхода изображён в левой части рис. 9).

  Под действием отображения h фундаментальная группа X отображается тождественно. Вторая её копия отображается с сопряжением на элемент, соответствующий пути по вертикальному отрезку, т.е. с сопряжением на g_m. Наконец, пути, обходящие квадраты, переходят в пути, заданные элементами $w_I^{-1} \cdot g_m \cdot w_I \cdot g_m$, т.к. горизонтальные отрезки отображаются на пути w_I^{-1}, а вертикальные – на пути g_m. Это в точности заявленное отображение g_*.

- Наконец, осталось описать $(\iota_2)_*$. Пусть $(\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})}$ – образующая в $(\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q})^{(\widetilde{I})}$. Есть два случая:

  1. $m \notin \widetilde{I}$. Тогда петля, соответствующая этой образующей (см. рис. 5), полностью лежит в X, и те же рассуждения, что и для f_*, дают $(\iota_2)_*((\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})}) = w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I$, что и требовалось.
  2. $\widetilde{I} = I \sqcup \{m\}, \quad I \subset P$. Тогда этой образующей соответствует петля, изображённая на рисунке 7: её образ в $\mathrm{RC}'_{\widetilde{K}}$ задаётся словом $w_I^{-1} \cdot g_m \cdot \Gamma_\lambda \cdot g_m \cdot w_I$.
     Разложим это слово как
     $$(w_I, g_m) \cdot g_m w_I \Gamma_\lambda w_I^{-1} g_m^{-1} \cdot (g_m, w_I); \tag{**}$$
     геометрическая интерпретация этого тождества изображена на рис. 8. Это композиция трёх петель в пространстве $U \cup X \times S^0$, у которых легко указать прообразы в $\widetilde{X}$ под действием h (см. рис. 9). Эти прообразы представляют элементы $z_I,\ \widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I},\ z_I^{-1}$ соответственно в группе $\pi_1(\widetilde{X})$. Поэтому $(\iota_2)_*((\Gamma_\lambda)^{I \sqcup \{m\}}) = z_I \cdot \widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I} \cdot z_I^{-1}$, ч.т.д.

□

Следствие 4.14. *Рассмотрим свободную группу F с базисом $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{K})} \sqcup \{\widehat{a}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda(\mathcal{K})} \sqcup \{T_I\}_{I \subset P}$ и гомоморфизм*

$$q : F \to \mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}},\ a_\lambda \mapsto \Gamma_\lambda,\ \widehat{a}_\lambda \mapsto g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m,\ T_I \mapsto (g_m, w_I).$$

Тогда этот гомоморфизм сюръективен, и его ядро – нормальное замыкание элементов $T_\varnothing$, старых соотношений $R_1, \ldots, R_M$, $\widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_M$ и

$$T_I \cdot (a_\lambda)^{w_I} \cdot T_I^{-1} \cdot \left(\widehat{(a_\lambda)^{w_I}}\right)^{-1},\ I \subset P,\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q),$$

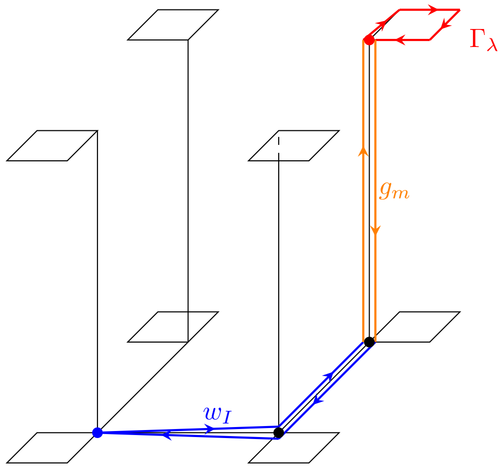


Рис. 7: Петля в пространстве $W \cup (S^0)^{|P|} \times A \times S^0$, представляющая элемент $(\Gamma_\lambda)^{I \sqcup \{m\}}$.

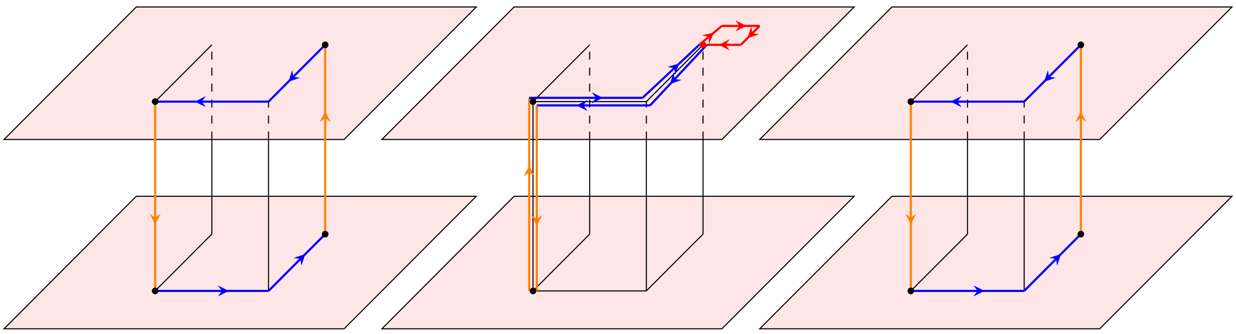


Рис. 8: Разложение $(\Gamma_\lambda)^{(I \sqcup \{m\})}$ в композицию $(**)$

где $(a_\lambda)^{w_I}$ *– произвольный прообраз* $w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I$ *в* $F(\Lambda(\mathcal{K}))$ *– например,* $\sigma(w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I)$.

Другими словами, если

$$\langle a_\lambda,\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}) \mid R_1, \ldots, R_M \rangle$$

– копредставление $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$, *то* $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ *допускает копредставление*

$$\langle a_\lambda,\ \widehat{a}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K});\ T_I,\ I \subset P \mid R_1, \ldots, R_M;\ \widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_M;\ T_\varnothing;\ T_I \cdot (a_\lambda)^{w_I} = \widehat{(a_\lambda)^{w_I}} \cdot T_I,\ \forall I \subset P,\ \forall \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q) \rangle.$$

Доказательство. По теореме ван Кампена, применённой к разложению из теоремы 4.13, $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ получается из группы

$$\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} * \widehat{\mathrm{RC}}'_{\mathcal{K}} * F(z_I :\ I \subset P,\ I \neq \varnothing) * \mathop{\ast}_{I \subset P} (\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_Q})^{(I)}$$

факторизацией по соотношениям, соответствующим всевозможным $\widetilde{I} \subset P \sqcup \{m\}$ и образующим $\Gamma_\lambda,\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q)$. Эти соотношения имеют вид

$$(*) \qquad (\iota_1)_*((\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})}) = (\iota_2)_*((\Gamma_\lambda)^{(\widetilde{I})}).$$

Если $\widetilde{I} = I \subset P$, то, по теореме 4.13, $(*)$ запишется как

$$(\Gamma_\lambda)^{(I)} = w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I,$$

что однозначно выражает $(\Gamma_\lambda)^{(I)}$ через другие образующие и позволяет исключить такие элементы из списка образующих новой группы. Соотношения, имевшие место между всевозможными $(\Gamma_\lambda)^{(I)}$, очевидно, верны и для $w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I$; эти элементы порождали свободное слагаемое в исходной группе. Поэтому останутся только образующие вида Γ_λ, $\widehat{\Gamma}_\lambda$ и z_I, и исключение образующих вида $(\Gamma_\lambda)^{(I)}$ не увеличит число соотношений.

Если же $\widetilde{I} = I \sqcup \{m\},\ I \subset P$, то $(*)$ записывается как

$$z_I^{-1} \cdot \widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I} \cdot z_I = (\Gamma_\lambda)^{(I)}.$$

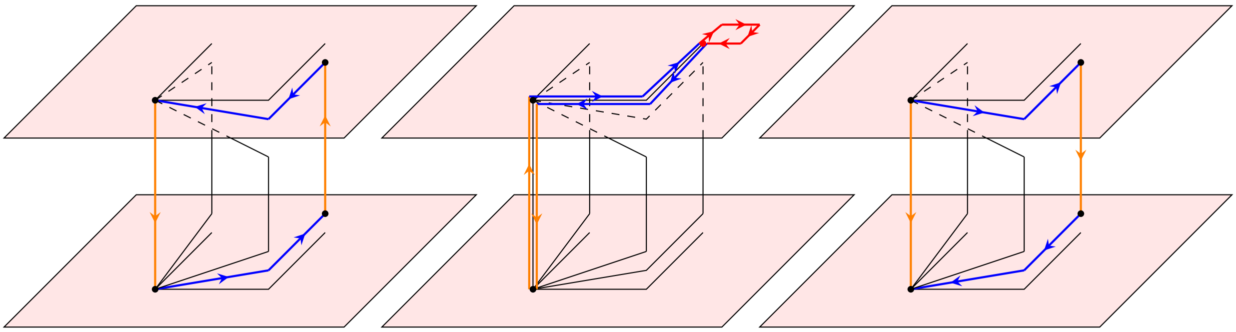


Рис. 9: Прообразы петель с рис. 8

За счёт соотношений выше это можно переписать как соотношение

$$z_I^{-1}\cdot\widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I}\cdot z_I=w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I;$$

этот набор соотношений и будет достаточным при этой факторизации. При $I=\varnothing$ в списке образующих нет $z_\varnothing$ (в формуле выше мы полагали $z_\varnothing=\mathrm{id}$); чтобы записать все соотношения единой формулой, эту образующую надо искуственно добавить.

Тем самым мы описали ядро эпиморфизма

$$q_0=f_*\ast g_*:\mathrm{RC}'_{\mathcal K}\ast\widehat{\mathrm{RC}}'_{\mathcal K}\ast F(z_I:\ I\subset P)\twoheadrightarrow\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal K}},\quad\Gamma_\lambda\mapsto\Gamma_\lambda,\ \widehat\Gamma_\lambda\mapsto g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m,\ z_I\mapsto(g_m,w_I):$$

оно порождено элементами

$$z_I^{-1}\cdot\widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I}\cdot z_Iw_I^{-1}\Gamma_\lambda^{-1}w_I,\ \forall I\subset P,\ \lambda\in\Lambda(\mathcal K_Q).$$

Взяв композицию с эпиморфизмами

$$p_{\mathcal K}:\ F(\Lambda(\mathcal K))\twoheadrightarrow\mathrm{RC}'_{\mathcal K},\ \widehat p_{\mathcal K}:\ F(\widehat\Lambda(\mathcal K))\twoheadrightarrow\widehat{\mathrm{RC}}'_{\mathcal K},$$

получим в точности гомоморфизм

$$q:F(\Lambda(\mathcal K))\ast F(\widehat\Lambda(\mathcal K))\ast F(z_I:\ I\subset P)\to\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal K}};$$

значит, q сюръективно. Осталось два раза воспользоваться леммой ниже (в качестве r_i берём соотношения $z_I^{-1}\cdot\widehat{w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I}\cdot z_I\cdot\left(w_I^{-1}\Gamma_\lambda w_I\right)^{-1}$, а в качестве их прообразов ρ_i берём $T_I^{-1}\cdot\widehat{(a_\lambda)^{w_I}}\cdot T_I\cdot((a_\lambda)^{w_I})^{-1}$). $\square$

Лемма 4.15. *Пусть $q_0:G_1\ast G_2\to H$ и $p:F\to G_1$ – эпиморфизмы групп. Рассмотрим гомоморфизм $q=q_0\circ(p\ast\mathrm{id}):F\ast G_2\to H$.*

Предположим, что $\operatorname{Ker}q_0$ нормально порождено элементами $r_1,\dots,r_m\in G_1\ast G_2$, $\operatorname{Ker}p$ нормально порождено элементами $R_1,\dots,R_M\in F$. Выберем произвольно $\rho_i\in(p\ast\mathrm{id})^{-1}(r_i)$. Тогда $\operatorname{Ker}q$ нормально порождено элементами $R_1,\dots,R_M,\rho_1,\dots,\rho_m$.

Доказательство. Пусть $x\in\operatorname{Ker}q\subset F\ast G_2$. Тогда $(p\ast\mathrm{id})(x)\in\operatorname{Ker}q_0\subset G_1\ast G_2$. Это ядро нормально порождено элементами $r_1,\dots,r_m$, поэтому

$$(p\ast\mathrm{id})(x)=w_1^{-1}r_{i_1}^{n_1}w_1\cdot w_2^{-1}r_{i_2}^{n_2}w_2\cdot\dots\cdot w_K^{-1}r_{i_K}^{n_K}w_K$$

для некоторых $w_i\in G_1\ast G_2$, $n_i\in\mathbb Z$. Выберем у слов w_i произвольные прообразы $W_i\in F\ast G_2$; тогда

$$(p\ast\mathrm{id})(x)=(p\ast\mathrm{id})(W_1^{-1}\rho_{i_1}^{n_1}W_1\cdot W_2^{-1}\rho_{i_2}^{n_2}W_2\cdot\ldots\cdot W_K^{-1}\rho_{i_K}^{n_K}W_K).$$

Произведение в правой части содержится в нормальном замыкании элементов $\rho_1,\dots\rho_m$. При этом x отличается от этого произведения на элемент из $\operatorname{Ker}(p\ast\mathrm{id})$. Осталось доказать, что $\operatorname{Ker}(p\ast\mathrm{id})$ лежит в нормальном замыкании элементов $R_1,\dots,R_M$.

Пусть теперь $x\in\operatorname{Ker}(p\ast\mathrm{id})$. Запишем его в виде произведения слов: $x=f_1h_1f_2h_2\dots f_Nh_N$, где $f_i\in F$, $h_i\in G_2$, и все буквы нетривиальны (кроме, возможно, f_1 и/или h_N). Индукция по N. База: если $x=fh$ или $x=hf$, то гарантированно $h=\mathrm{id}$, $f\in\operatorname{Ker}p$, то есть x лежит в нормальном замыкании $R_1,\dots,R_M$.

Переход: рассмотрим слово

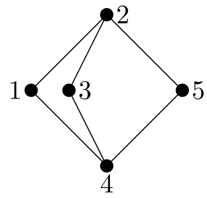
$$(p\ast\mathrm{id})(x)=p(f_1)h_1p(f_2)h_2\dots p(f_N)h_N=\mathrm{id}\in G_1\ast G_2.$$

В нём чередуются элементы групп G_1 и G_2, причём все элементы h_i нетривиальны (кроме, возможно, последнего). Если каждый из $f_2, \ldots, f_N$ нетривиален, то слово не может быть тривиальным, т.к. нетривиальным h_i "не с кем сократиться"; значит, $p(f_i) = \mathrm{id}$ для некоторого $i \neq 1$. Значит, $f_i \in \operatorname{Ker} p$, поэтому f_i лежит в нормальном замыкании $R_1, \ldots, R_M$. Значит, и сопряжённое к нему слово

$$f_1 h_1 f_2 h_2 \ldots f_{i-1} h_{i-1} \cdot f_i \cdot (f_1 h_1 f_2 h_2 \ldots f_{i-1} h_{i-1})^{-1}$$

лежит в нормальном замыкании элементов $R_1, \ldots, R_M$ в группе $F * G_2$. Поэтому, домножив слева на обратное к нему, можно перейти от $f_1 h_1 \ldots f_N h_N$ к слову $f_1 h_1 f_2 h_2 \ldots f_{i-1} h_{i-1} h_i f_{i+1} \ldots f_N h_N$, для которого верно предположение индукции. $\square$

Пример 4.16. Рассмотрим симплициальный комплекс $\widetilde{\mathcal{K}}$ на пяти вершинах, изображённый ниже. Легко



понять, что $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$ задана двумя образующими $a = a_{1\in 13}, b = a_{2\in 24}$ и одним соотношением $(a, b) = \mathrm{id}$; под действием $p_{\mathcal{K}}$ они переходят в $\Gamma_{1\in 13} = (g_3, g_1)$ и $\Gamma_{2\in 24} = (g_4, g_2)$ соответственно. Посмотрим, какое копредставление для $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ можно получить с помощью следствия 4.14.

$$P = \{1, 3\},\ Q = \{2, 4\};\ \Lambda(\mathcal{K}_Q) = \{(2 \in \{2, 4\})\}.$$

Выберем слова $(a_\lambda)^{w_I},\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q)$ – прообразы элементов $w_I^{-1} \Gamma_\lambda w_I$ в свободной группе. В данном примере это тривиально, т.к. $\Gamma_{2\in 24}$ коммутирует с g_1 и g_3. Поэтому можно взять

$$a_{2\in 24} = (a_{2\in 24})^{w_\varnothing} = (a_{2\in 24})^{w_1} = (a_{2\in 24})^{w_3} = (a_{2\in 24})^{w_{13}}.$$

Группа $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ будет задана 8 образующими

$$a, b, \widehat{a}, \widehat{b},\ T_\varnothing,\ T_1,\ T_3,\ T_{13}$$

и 7 соотношениями: два старых

$$(a, b) = \mathrm{id},\ (\widehat{a}, \widehat{b}) = \mathrm{id}$$

и пять новых

$$T_\varnothing = \mathrm{id};\ T_\varnothing a_{2\in 24} = \widehat{a_{2\in 24}} T_\varnothing;$$

$$T_1 a_{2\in 24} = \widehat{a_{2\in 24}} T_1;\ T_3 a_{2\in 24} = \widehat{a_{2\in 24}} T_3;\ T_{13} a_{2\in 24} = \widehat{a_{2\in 24}} T_{13}.$$

Получаем копредставление

$$\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}} = \langle a, b,\ \widehat{a}, \widehat{b},\ T_\varnothing, T_1, T_3, T_{13} \mid (a, b) = (\widehat{a}, \widehat{b}) = T_\varnothing = \mathrm{id};\ T_\varnothing b = \widehat{b} T_\varnothing;\ T_1 b = \widehat{b} T_1;\ T_3 b = \widehat{b} T_3;\ T_{13} b = \widehat{b} T_3 \rangle,$$

которое легко упростить до

$$\langle a, b,\ \widehat{a}, T_1, T_3, T_{13} \mid (a, b) = (\widehat{a}, b) = (T_1, b) = (T_3, b) = (T_{13}, b) = \mathrm{id} \rangle \simeq F(b) \times F(a, \widehat{a}, T_1, T_3, T_{13}).$$

Это согласуется с тем, что данный симплициальный комплекс – джойн дискретных симплициальных комплексов $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ на 2 и 3 вершинах соотвественно:

$$\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}} = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2})) = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{R}_{\mathcal{K}_2}) = \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_1}) \times \pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}_2}) = \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_1} \times \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_2} = \mathbb{Z} \times F(5).$$

4.4.3 Переход к стандартным образующим

Имея копредставление

$$\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}} = \langle a_\lambda,\ \widehat{a}_\lambda,\ \lambda \in \Lambda(\mathcal{K});\ T_I,\ I \subset [P] \mid R_1, \ldots, R_M;\ \widehat{R}_1, \ldots, \widehat{R}_M;\ T_\varnothing;\ T_I \cdot (a_\lambda)^{w_I} = \widehat{(a_\lambda)^{w_I}} \cdot T_I,\ \forall I \subset P, \lambda \in \Lambda(\mathcal{K}_Q) \rangle$$

из следствия 4.14, мы хотим получить из него соотношения между стандартными образующими группы $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$. Для этого надо заменить образующие на стандартные. Это происходит по схеме, описанной в алгоритме: образующую $\widehat{a}_\lambda$ надо заменить на слово $(a_\lambda)^{g_m} := \sigma(g_m^{-1} \Gamma_\lambda g_m) \in F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$, а образующую T_I – на слово $\sigma((g_m, w_I)) \in F(\Lambda(\mathcal{K}_{I \sqcup \{m\}}))$.

Эту замену образующих можно понимать как гомоморфизм τ, встраивающийся в диаграмму

$$\begin{tikzcd} F(\Lambda(\mathcal{K})) * F(\widehat{\Lambda}(\mathcal{K})) * F(2^{|P|}-1) \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "q"'] & & F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})) \arrow[dl, "p_{\widetilde{\mathcal{K}}}"] \\ & \mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}. & \end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна по определению q, поэтому соотношения переходят в соотношения. Но их образов может быть недостаточно для задания $\mathrm{RC}'_{\widetilde{\mathcal{K}}}$: даже если $r_1, \dots, r_{\widetilde{M}}$ нормально порождали $\operatorname{Ker} q$, элементы $\tau(r_1) \dots, \tau(r_{\widetilde{M}})$ не обязательно нормально порождают $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{K}}}$. Есть грубое достаточное условие, которое это гарантирует:

Лемма 4.17. *Если τ сюръективно, то $\tau(r_1), \dots, \tau(r_{\widetilde{M}})$ нормально порождают* $\operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{K}}}$.

Доказательство. Нормальное замыкание образов не меньше, чем образ нормального замыкания. Поэтому достаточно доказать, что $\tau(\operatorname{Ker} q) = \operatorname{Ker}(p_{\widetilde{\mathcal{K}}})$.

Так как $q = p_{\widetilde{\mathcal{K}}} \circ \tau$, если $q(x) = \mathrm{id}$, то $\tau(x) \in \operatorname{Ker} p_{\widetilde{\mathcal{K}}}$. Наоборот: если $p_{\widetilde{K}}(y) = \mathrm{id}$, и $x \in \tau^{-1}(y)$ – произвольный прообраз, то $q(x) = \mathrm{id}$, так что $y \in \tau(\operatorname{Ker} q)$. За счёт сюръективности множество $\tau^{-1}(y)$ всегда непусто. □

Тем самым для доказательства теоремы 4.9 достаточно доказать "тривиальность хордовых соотношений" и сюръективность τ.

Лемма 4.18. *Если $\mathcal{K}_{I \sqcup J \sqcup \{m\}}$ – хордовый подкомплекс, то образ соотношения $T_I(a_\lambda)^{w_I} = \widehat{(a_\lambda)^{w_I}} T_I$ в $F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$ тривиален.*

Доказательство. При переходе от $\widetilde{\mathcal{K}}$ к любому полному подкомплексу $\mathcal{K}_S$, содержащему вершину m, алгоритм работает точно также, и вычисляет копредставление подгруппы $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_S} \subset \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}}$. Если S хордовый, то, по предложению 2.24, группа $\mathrm{RC}'_{\mathcal{K}_S}$ свободна. Стандартный набор образующих минимален. Поэтому все соотношения, найденные между стандартными образующими этой подгруппы, тривиальны. □

Теорема 4.19. *При выборе сечения $\sigma : \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} \to F(\Lambda(\mathcal{K}))$ как в пункте 4.5 гомоморфизм*

$$\tau : F(\Lambda(\mathcal{K})) * F(\widehat{\Lambda}(\mathcal{K})) * F(2^{|P|-1}) \to F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})),$$

заданный на образующих как

$$\Gamma_\lambda \mapsto \Gamma_\lambda, \quad \widehat{\Gamma}_\lambda \mapsto \sigma(g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m), \quad T_I \mapsto \sigma((g_m, w_I)),$$

сюръективен.

Доказательство теоремы вынесено в п. 4.6.

4.5 Построение сечения

В этом разделе метод доказательства теоремы 4.5 из статьи [PV1] используется для построения сечения $\sigma : \mathrm{RC}'_{\mathcal{K}} \to F(\Lambda(\mathcal{K}))$. Хотя сечение не определено однозначно (результат зависит от того, как записать элемент в виде произведения *канонических вложенных коммутаторов*, т.е. коммутаторов вида $(g_{k_1}, (\dots, (g_{k_{t-1}}, g_{k_t}) \dots)))$, этого достаточно для наших целей: в алгоритме используются только элементы $\sigma(g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m)$ и $\sigma((g_m, w_I))$. Мы определим значение σ на канонических вложенных коммутаторах, а затем укажем, как представить элементы $g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m$ и (g_m, w_I) в виде произведений таких коммутаторов.

Значение σ будем вычислять индукцией по t (по *длине* вложенного коммутатора). Если t фиксировано, будем писать $A \rightsquigarrow B$, когда B отличается от A на произведение вложенных коммутаторов, длина каждого из которых меньше t. Каждый раз, когда мы используем это обозначение, оно определено однозначно и используется как шаг вычислений в алгоритме. Определив $\sigma(B)$, мы тем самым определяем и $\sigma(A)$, т.к. значение σ на коммутаторах меньшей длины уже известно.

4.5.1 Формулировки основных лемм

Напомним обозначения: $i \sim_J j$, если i и j лежат в одной компоненте связности $\widetilde{\mathcal{K}}_J$; если $i \in J$, то $\searrow_J (i) := \min(j \in J : \ i \sim_J j)$. Образующая $\Gamma_{i \in J}$ – это канонический вложенный коммутатор

$$(g_{k_1}, \dots, (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \dots),$$

где $J = \{k_1, \dots, k_{t-2}, j, i\}$ t-элементно, $k_1 < \dots < k_{t-2} < j > i$. Такой элемент является образующей тогда и только тогда, когда $i \not\sim_J (j)$ и $i = \searrow_J (i)$.

Определение 4.20. Пусть $J \subset [m],\ i \in J,\ i \neq \max(J)$. Введём обозначение:

$$\gamma_{i\in J} = \begin{cases} \mathrm{id}, i \sim_J j; \\ \Gamma_{i_0 \in J},\ i \not\sim_J j,\ i_0 = \searrow_J (i). \end{cases}$$

При преобразованиях "по модулю коммутаторов меньшей длины" будем писать K вместо произведений коммутаторов меньшей длины.

Лемма 4.21. *Пусть $J = \{k_1, \ldots, k_{t-2}, j, i\} \subset [m]$ – произвольное t-элементное множество. Тогда*

$$(g_{k_1}, \ldots, (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \ldots) \rightsquigarrow \begin{cases} \gamma_{i\in J},\ j = \max(J); \\ \gamma_{j\in J}^{-1},\ i = \max(J); \\ \gamma_{j\in J}^{-1} \cdot K \cdot \gamma_{i\in J},\ i \neq \max(J),\ j \neq \max(J). \end{cases}.$$

Определение 4.22. Определим $\sigma(\mathrm{id}) := \mathrm{id},\ \sigma(\Gamma_{i\in J}) := a_{i\in J}$. На произвольные канонические вложенные коммутаторы продолжим эту функцию рекурсивно с помощью леммы 4.21 (база индукции: все канонические коммутаторы длины 2 уже имеют вид $\gamma_{i\in J}^{\pm 1}$ или равны id). На произведения канонических вложенных коммутаторов продолжим мультипликативно.

Лемма 4.23. *Пусть $I \subset [m-1],\ I = \{i_1, \ldots, i_s\},\ i_1 < \cdots < i_s$. Тогда*

$$(g_m, w_I) \rightsquigarrow (g_{i_1}, \ldots, (g_{i_{s-1}}, (g_m, g_{i_s})) \ldots).$$

Эта лемма позволяет определить σ на элементах, которые используются в алгоритме:

Определение 4.24. Зададим $\sigma((g_m, w_I))$ с помощью леммы 4.23, а $\sigma(g_m^{-1}\Gamma_{i\in J} g_m) = \sigma(\Gamma_{i\in J} \cdot (\Gamma_{i\in J}, g_m))$ как $a_{i\in J} \cdot \sigma((g_m, \Gamma_{i\in J}))^{-1}$ (ясно, что $(g_m, \Gamma_{i\in J})$ – канонический вложенный коммутатор).

4.5.2 Операции с вложенными коммутаторами

В доказательстве лемм 4.21 и 4.23 используются некоторые преобразования, которые можно производить в любой группе. Для $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$ специфично только то, что $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$ порождена каноническими вложенными коммутаторами, для каждого из которых $g_{k_1}, \ldots g_i$ – попарно различные образующие $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$ (в общем случае $g_{k_1}, \ldots, g_i$ – это *степени* попарно различных образующих, см. [PV2, теорема 3.1]).

Избавление от произведений. В рассуждениях ниже возникают коммутаторы следующего вида:

$$C = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots (g_{k_{t-1}}, (g_{k_t}, K_1 \cdot B \cdot K_2))) \ldots)),$$

где B – коммутатор, а K_1, K_2 – произведения коммутаторов, длина каждого из которых меньше, чем у B. В таком случае применим тождество $(a, bc) = (a, c)(a, b)((a, b), c)$ и получим

$$(g_{k_t}, K_1 \cdot B \cdot K_2) = (g_{k_t}, K_2) \cdot K_2^{-1}(g_{k_t}, K_1 \cdot B) \cdot K_2 = (g_{k_t}, K_2)K_2^{-1}(g_{k_t}, B) \cdot B^{-1}(g_{k_t}, K_1)BK_2,$$

что может быть записано как $K_3 \cdot (g_{k_t}, B) \cdot K_4$. После t шагов получаем

$$C \rightsquigarrow (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots (g_{k_{t-1}}, (g_{k_t}, B))) \ldots)).$$

Перестановка элементов. Пусть мы хотим переставить какие-то соседние порождающие в коммутаторе вида

$$C = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i))) \ldots))$$

(по модулю коммутаторов меньшей длины). Для этого будем использовать тождество Витта-Холла

$$(g_q, (g_p, x)) = (g_q, x)(x, (g_p, g_q))(g_q, g_p)(x, g_p)(g_p, (g_q, x))(x, g_q)(g_p, g_q)(g_p, x).$$

Перестановка (k_s, k_{s+1}).

$$C = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots (g_{k_s}, (g_{k_{s+1}}, m))) \ldots)),$$

где m – тоже коммутатор. Применим тождество к внутреннему:

$$(g_{k_s}, (g_{k_{s+1}}, m)) = (g_{k_{s+1}}, m)m^{-1}(g_{k_{s+1}}, g_{k_s})m(m, g_{k_s})(g_{k_{s+1}}, (g_{k_s}, m))(m, g_{k_{s+1}})(g_{k_s}, g_{k_{s+1}})(g_{k_s}, m),$$

что можно записать как

$$K_1 \cdot (g_{k_{s+1}}, (g_{k_s}, m)) \cdot K_2.$$

После избавления от произведений получим

$$\boxed{(g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_s}, (g_{k_{s+1}}, m))) \dots)) \rightsquigarrow (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_{s+1}}, (g_{k_s}, m))) \dots)).}$$

Значит, первые $t-1$ буквы в записи C можно свободно переставлять (по модулю коммутаторов меньшей длины), то есть достаточно следить только за двумя последними буквами. Поэтому вместо C будем писать $(\dots, (g_j, g_i) \dots)$, если множество $\{k_1, \dots, k_{t-2}, j, i\}$ ясно из контекста.

Перестановка (j, i). Рассмотрим элемент

$$C^{-1} = ((g_{k_2}, \dots (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i))) \dots), g_{k_1}).$$

Применяя $((a, b), c) = (b, a)(c, (b, a))(a, b)$ и на каждом шаге избавляясь от произведений, получаем

$$C^{-1} \rightsquigarrow (g_{k_1}, ((g_{k_3}, \dots (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \dots), g_{k_2})) \rightsquigarrow (g_{k_1}, (g_{k_2}, ((g_{k_4}, \dots (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \dots), g_{k_3}))) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_{t-2}}, (g_i, g_j)) \dots)).$$

Это показывает, что

$$\boxed{(\dots, (g_j, g_i) \dots) \rightsquigarrow (\dots, (g_i, g_j) \dots)^{-1}.}$$

Перестановка (k_{t-2}, j). Применим тождество Витта-Холла к самому внутреннему коммутатору $(g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i))$:

$$C = (g_{k_1}, (g_{k_2}, \dots (g_{k_{t-3}}, K_1 \cdot (g_i, (g_j, g_{k_{t-2}})) \cdot K_2 \cdot (g_j, (g_{k_{t-2}}, g_i)) \cdot K_3) \dots)).$$

Теперь поймём, как избавляться от произведений. Обозначим тройные коммутаторы как m_1 и m_2 соответственно.

$$(g_{k_{t-3}}, K_1 \cdot m_1 \cdot K_2 \cdot m_2 \cdot K_3) \rightsquigarrow (g_{k_{t-3}}, m_1 \cdot K \cdot m_2) = (g_{k_{t-3}}, K \cdot m_2) \cdot m_2^{-1} K^{-1} (g_{k_{t-3}}, m_1) K m_2 \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow (g_{k_{t-3}}, m_2) \cdot K \cdot (g_{k_{t-3}}, m_1)$$

(мы использовали тождество $(a, bc) = (a, c)c^{-1}(a, b)c$). Значит, пошагово можно вынести произведение наружу и получить

$$\boxed{(\dots, (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \dots) \rightsquigarrow (\dots, (g_i, (g_j, g_{k_{t-2}})) \dots) \cdot K \cdot (\dots, (g_j, (g_{k_{t-2}}, g_i)) \dots).}$$

4.5.3 Доказательство основных лемм

Доказательство леммы 4.21. Обозначим рассматриваемый коммутатор как C :

$$C = (g_{k_1}, \dots, (g_{k_{t-2}}, (g_j, g_i)) \dots).$$

Есть три случая:

1. $j = \max(J)$. Два подслучая:

   (a) Если $i \sim_J j$, то существует цепочка рёбер $\{i, i_s\}, \{i_s, i_{s-1}\}, \dots, \{i_1, j\} \in \mathcal{K}$, где $\{i_1, \dots, i_s\} \subset \{k_1, \dots, k_{t-2}\}$. Тогда

   $$C = (\dots, (g_j, g_i) \dots) \rightsquigarrow (\dots, (g_{i_s}, (g_j, g_i)) \dots) \rightsquigarrow (\dots, (g_i, (g_j, g_{i_s})) \dots) \cdot K \cdot (\dots, (g_j, \underbrace{(g_{i_s}, g_i)}_{=\mathrm{id}}) \dots).$$

   Правый коммутатор равен единице, поэтому

   $$(\dots, (g_j, g_i) \dots) \rightsquigarrow (\dots, (g_j, g_{i_s}) \dots) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow (\dots, \underbrace{(g_j, g_{i_1})}_{=\mathrm{id}} \dots) = \mathrm{id} = \gamma_{i \in J}.$$

   (b) Если же $i \not\sim_J j$, то рассмотрим цепочку рёбер $\{i, i_s\}, \{i_s, i_{s-1}\}, \dots, \{i_1, i_0\} \in \mathcal{K}$, где $i_0 = \searrow_J (i)$. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что

   $$C \rightsquigarrow (\dots, (g_j, g_{i_0}) \dots) \rightsquigarrow \Gamma_{i_0 \in J} = \gamma_{i \in J}$$

   (переход от $(\dots, (g_j, g_{i_0}) \dots)$ к $\Gamma_{i_0 \in J}$ – перестановка первых $(t-2)$ элементов).

2. Случай $i = \max(J)$ сводится к предыдущему, т.к. $(\dots,(i,j)\dots) \rightsquigarrow (\dots,(j,i)\dots)^{-1}$.

3. Осталось рассмотреть случай $i \neq \max(J), j \neq \max(J)$. Пусть $\max(J) = k$. Тогда

$$C = (\dots,(g_j,g_i)\dots) \rightsquigarrow (\dots,(g_k,(g_j,g_i))\dots) \rightsquigarrow (\dots,(g_i,(g_j,g_k))\dots)\cdot K\cdot(\dots,(g_j,(g_k,g_i))\dots).$$

Сомножители имеют вид, рассмотренный в предыдущих случаях.

□

Доказательство леммы 4.23. Используя тождество $(a,bc) = (a,c)(a,b)((a,b),c)$, легко понять, что $T_I = (g_m, g_{i_s}g_{i_{s-1}}\dots g_{i_2}g_{i_1})$ представляется в виде произведения вложенных сгнездованных влево коммутаторов, по одному для каждого $J \subseteq I$. Поэтому

$$T_I \rightsquigarrow ((\dots((g_m,g_{i_s}),g_{i_{s-1}}),\dots,g_{i_2}),g_{i_1}).$$

Чтобы получить коммутатор, сгнездованный вправо, применим тождество $((c,b),a) = (c,b)(a,(b,c))(b,c)$:

$$T_I \rightsquigarrow (g_{i_1},((\dots((g_m,g_{i_s}),g_{i_{s-1}})\dots,g_{i_3}),g_{i_2})) = (g_{i_1},K_1\cdot(g_{i_2},(\dots((g_m,g_{i_s}),g_{i_{s-1}})\dots,g_{i_3})\cdot K_2) \rightsquigarrow \dots$$

$$\dots \rightsquigarrow (g_{i_1},(g_{i_2},\dots((g_{i_{s-1}},(g_m,g_{i_s})))\dots)).$$

□

4.6 Доказательство теоремы 4.20

Обозначим как $H \subset F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$ образ гомоморфизма τ. Эта подгруппа порождена элементами вида

$$a_\lambda,\ \sigma(g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m),\ \sigma((g_m,w_I)),\ \forall\lambda\in\Lambda(\mathcal{K}),\ \forall I\subset P.$$

Мы хотим доказать, что $H = F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$, т.е. что $a_{i\in J}\in H,\ \forall(i\in J)\in\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})$.

Если $\lambda = (i\in J)$, обозначим $|\lambda| = |J|$. Будем доказывать $H = F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$ индукцией по $|\lambda|$. Предположении индукции: пусть при $|\lambda| < t$ все $a_\lambda,\ \lambda\in\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})$, уже лежат в H.

Для слов $\alpha,\beta\in F(\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}))$ будем писать $\alpha\rightsquigarrow\beta$, если α получается из β умножением на элементы из H. Это согласовано с тем же обозначением для коммутаторов за счёт предположения индукции: если $A\rightsquigarrow B$ – произведения коммутаторов,то $\sigma(A)\rightsquigarrow\sigma(B)$, т.к. σ(коммутаторы меньшей длины) $\in H$. Аналогично, K будет обозначать произвольный элемент из H.

4.6.1 База индукции

Докажем, что все стандартные образующие длины 2 лежат в H.

Для стандартных образующих $a_{i\in\{i,j\}},\ j\neq n$, это уже верно, т.к. $(i\in\{i,j\})\in\Lambda(\mathcal{K})$. Остались стандартные образующие вида $a_{i\in\{m,i\}}$. Чтобы этот коммутатор был стандартной образующей, должно выполняться $m\not\sim_{\{m,i\}} i$, что равносильно $i\in P$. Поэтому $a_{i\in\{m,i\}} = \sigma((g_m,w_{\{i\}}))\in H$.

4.6.2 Стандартные образующие, задействованные в (g_m,w_I)

Воспользуемся тем, что $\sigma((g_m,w_I))\in H,\ \forall I\subset P$.

Лемма 4.25. *Пусть $I\subset P$, и верно предположение индукции для $t = |I|+1$. Тогда $a_{i'\in I\sqcup\{n\}}\in H$, где $i' = \searrow_I(\max(I))$.*

Доказательство. Пусть $I = \{i_1,\dots,i_s\},\ i_1<\dots<i_s$.

Имеем $i_s\not\sim_{I\sqcup\{n\}} n$, т.к. $I\subset P$. Вершина n в $\widetilde{\mathcal{K}}_{I\sqcup\{n\}}$ – изолированная, поэтому $i' = \searrow_I(i_s) = \searrow_{I\sqcup\{n\}}(i_s)$. По лемме 4.23, $(g_m,w_I)\rightsquigarrow(\dots,(g_m,g_{i_s})\dots)$. По лемме 4.21,

$$(\dots,(g_m,g_{i_s})\dots)\rightsquigarrow\gamma_{i_s\in I\sqcup\{n\}} = \Gamma_{\searrow_{I\sqcup\{n\}}(i_s)\in I\sqcup\{n\}} = \Gamma_{i'\in I\sqcup\{n\}}.$$

Поэтому

$$H\ni T_I = \sigma((g_m,w_I))\rightsquigarrow\sigma(\Gamma_{i'\in I\sqcup\{n\}}) = a_{i'\in I\sqcup\{n\}}.$$

□

4.6.3 Стандартные образующие, задействованные в $g_m^{-1}\Gamma_\lambda g_m$

Пусть $(i\in J)\in\Lambda(\mathcal{K}),\ |J|=t-1$. Применим определение 4.24 и лемму 4.21:

$$\sigma(g_m^{-1}\Gamma_{i\in J}g_m)^{-1}=\sigma((g_m,\Gamma_{i\in J}))\underbrace{a_{i\in J}^{-1}}_{\in H}\rightsquigarrow\sigma((g_m,(\dots,(g_j,g_i)\dots)))\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow\sigma(\gamma_{j\in J\sqcup\{m\}}^{-1}\cdot K\cdot\gamma_{i\in J\sqcup\{m\}})=a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}^{-1}\cdot K\cdot a_{i_0\in J\sqcup\{m\}},$$

где $j_0=\searrow_{J\sqcup\{m\}}(j),\ i_0=\searrow_{J\sqcup\{m\}}(i)$.

Здесь надо доопределить $a_{i\in J}:=\mathrm{id}$ в случае, когда $i\sim_J\max(J)$, т.к. тогда $\gamma_{i\in J}=\mathrm{id}$.

Лемма 4.26. *Если верно предположение индукции для* $t=|J|+1$, *то, в обозначениях как выше,* $a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}\in H$.

Доказательство. Если $j\sim_{J\sqcup\{m\}}m$, то $j_0\sim_{J\sqcup\{m\}}m$, поэтому $a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}=\mathrm{id}$, и всё доказано. Пусть $j\not\sim_{J\sqcup\{m\}}m$. Возможны два случая:

1. $J\cap Q=\varnothing$, то есть $J\subset P$. Тогда m – изолированная вершина в $J\sqcup\{m\}$, поэтому $j_0=\searrow_J(\max(J))$. Значит, $a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}\in H$ по лемме 4.25.

2. $J\cap Q\neq\varnothing$. Пусть $v\in J\cap Q$, и $i_1=\searrow_J(v)$. Заметим, что в этой компоненте связности нет j, так как тогда j и m лежали бы в одной компоненте связности комплекса $\widetilde{\mathcal{K}}_{J\sqcup\{m\}}$ (существовал бы путь из j в v, а вершины v и n соединены ребром).

   То есть $i_1\not\sim_J j$. Значит, $(i_1\in J)\in\Lambda(\mathcal{K})$. Те же рассуждения, что и перед леммой, дают

   $$\sigma(g_m^{-1}\Gamma_{i_1\in J}g_m)^{-1}\rightsquigarrow a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}^{-1}\cdot K\cdot a_{\searrow_{J\sqcup\{m\}}(i_1)}.$$

   Третий сомножитель тривиален, т.к. $i_1\sim_{J\sqcup\{m\}}m$. В левой части тоже стоит элемент из H. Значит, первый сомножитель принадлежит H, ч.т.д.

□

Лемма 4.27. *Пусть* $(i\in J\sqcup\{m\})\in\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})$, *причём* $i\not\sim_J\max(J)$, *и верно предположение индукции для* $t=|J|+1$. *Тогда* $a_{i\in J\sqcup\{m\}}\in H$.

Доказательство. Пусть $j=\max(J)$. Сначала докажем, что, что $a_{i\in J}$ – стандартная образующая.

Ясно, что $i\not\sim_J j$, т.к. по условию $i\not\sim_{J\sqcup\{m\}}j$. Также $i\geq\searrow_J(i)\geq\searrow_{J\sqcup\{m\}}(i)=i$ (последнее равенство – по условию). Доказано.

Итак, $(i\in J)\in\Lambda(\mathcal{K})$, поэтому рассуждение из пункта 4.6.3 даёт

$$\sigma(g_m^{-1}\Gamma_{i\in J}g_m)^{-1}\rightsquigarrow a_{j_0\in J\sqcup\{m\}}^{-1}\cdot K\cdot a_{i_0\in J\sqcup\{m\}}.$$

Левая часть равенства лежит в H по определению, первый сомножитель правой части – по лемме 4.26, второй сомножитель – по определению. Значит, $a_{i_0\in J\sqcup\{m\}}\in H$. Осталось заметить, что $i_0=\searrow_{J\sqcup\{m\}}(i)=i$, т.к. $(i\in J\sqcup\{m\})\in\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})$. □

Лемма 4.28. *Пусть* $(i\in J\sqcup\{m\})\in\Lambda(\widetilde{\mathcal{K}})$, *причём* $i\sim_J\max(J)$, *и верно предположение индукции для* $t=|J|+1$. *Тогда* $a_{i\in J\sqcup\{m\}}\in H$.

Доказательство. Обозначим $j=\max(J)$. Возможны два случая:

1. $J\subset P$. Докажем, что $i=\searrow_J(j)$ (тогда требуемое следует из леммы 4.26). Действительно: $i\sim_J j$; если $i'\sim_J j$ и $i'<i$, то $i'\sim_{J\sqcup\{m\}}i$ и $i'<i$, что противоречит тому, что $i=\searrow_{J\sqcup\{m\}}(i)$.

2. $J\cap Q\neq\varnothing$. Заметим, что тогда $\mathcal{K}_J$ несвязен. Действительно: $i\not\sim_{J\sqcup\{m\}}m$, но существует вершина $v\in J\cap Q$. Она соединена ребром с m, поэтому $v\sim_{J\sqcup\{m\}}m$. Значит, $i\not\sim_J v$.

   Пусть теперь $v_0=\searrow_J(v)$. Тогда $\Gamma_{v_0\in J}$ – стандартная образующая, т.к. из $v\not\sim_J i$ следует $v_0\not\sim_J j$.

   Применим к этой образующей рассуждения пункта 4.6.3. В частности, верна лемма 4.26. Получаем требуемое, т.к. $i=\searrow_{J\sqcup\{m\}}(j)=i_0$.

□

4.6.4 Доказательство шага индукции; завершение доказательства теоремы.

Пусть $a_\lambda \in H$ при всех $|\lambda| < t$. Пусть $(i \in J') \in \Lambda(\widetilde{\mathcal{K}}),\ |J'| = t$. Докажем, что $a_{i\in J'} \in H$. Есть три случая:

1. $J' \subset [m-1]$. Тогда $a_{i\in J'} \in F(\Lambda(\mathcal{K})) \subset H$.
2. $J' = J \sqcup \{m\},\ i \not\sim_J \max(J)$. Этот случай покрывается леммой 4.27.
3. $J' = J \sqcup \{m\},\ i \sim_J \max(J)$. Этот случай покрывается леммой 4.28.

□

5 Обобщение: соотношения в $\mathrm{Ker}((\underline{G})^{\mathcal{K}} \to (\underline{G})^{[m]})$

Результаты раздела 3 довольно естественно обобщаются на случай дискретных групп. Точно так же используются результаты пунктов 2.2 и 2.4.

5.1 Уже известные результаты

Есть следующее обобщение формулы Хохстера:

Предложение 5.1 ([BBCG]). *Пусть $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – набор из m клеточных пар, такой что все X_i стягиваемы. Тогда*

$$H_p((\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}) \simeq \widetilde{H}_{p-1}(\bigvee_{J\subset[m]} (|\mathcal{K}_J| \wedge (\underline{A})^{\wedge J})),$$

где $(\underline{A})^{\wedge J} := \bigwedge_{j\in J} A_j$ – смэш-произведение.

Нам понадобится это предложение только в следующем частном случае:

Следствие 5.2. *Если $\underline{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ – набор дискретных групп, $|G_j| = n_j$, то*

$$H_p((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) \simeq \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J)^{\oplus(n_J-1)},$$

где $n_J := \prod_{j\in J}(n_j - 1) + 1 = \left|(\underline{G})^{\wedge J}\right|$.

Доказательство. Если A дискретно, $|A| = n$, то $X \wedge A = X^{\vee(n-1)}$, так что $\widetilde{H}_k(X \wedge A) = \widetilde{H}_k(X)^{\oplus(n-1)}$.

Если A и B дискретны, $|A| = n, |B| = m$, то, как легко видеть, $|A \wedge B| = (m-1)(n-1) + 1$; из ассоциативности смэш-произведения формула обобщается по индукции. □

Предложение 5.3 ([PV2, теорема 5.2]). *Пусть $G_1, \ldots, G_m$ – нетривиальные дискретные группы. Тогда $\pi_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}})$ имеет минимальный набор из*

$$\sum_{J\subset[m]} (n_J - 1)\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$$

образующих вида

$$(g_{k_1}, (g_{k_2}), \ldots, (g_{k_{l-2}}, (g_j, g_i)) \ldots)),$$

где $J = \{k_1, \ldots, k_{l-2}, j, i\},\ |J| = l,\ k_1 < \cdots < k_{l-2} < j > i,\ g_k \in G_k \setminus \{1\}$, и i – наменьшая вершина в некоторой компоненте связности подкомплекса $\mathcal{K}_J$, не содержащей j. □

Замечание 5.4. Если все G_i конечны, то минимальность доказывается, как и в случае $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$, сопоставлением рангов π_1 и H_1 : по следствию выше,

$$\mathrm{rank}\, H_1((E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}) = \sum_{J\subset[m]} \mathrm{rank}\, \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J) \cdot (n_J - 1).$$

5.2 Обобщение оценок

Теорема 5.5. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс на m вершинах, $G_1, \ldots, G_m$ – конечные нетривиальные группы, и $\pi_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})$ задана $\sum_{J\subset[m]}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)(n_J-1)$ образующими и M соотношениями, причём M – наименьшее возможное. Тогда*

$$\operatorname{rank}\left(\bigoplus_{J\subset[m]}(H_1(\mathcal{K}_J))^{\oplus(n_J-1)}\right)\le M\le \operatorname{rank}\left(\mathop{\ast}_{J\subset[m]}(\Pi_1(\mathcal{K}_J))^{*(n_J-1)}\right).$$

Доказательство. Применив обобщение формулы Хохстера и теорему Грушко, перейдём к эквивалентным неравенствам

$$\operatorname{rank}H_2((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})\le M\le\sum_{J\subset[m]}(n_J-1)\operatorname{rank}\Pi_1(\mathcal{K}_J).$$

Доказательство первой оценки полностью аналогично рассуждениям из пункта 3.1: $(E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}}$ асферично, а ранг $H_1((E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}})$ совпадает с количеством образующих, поэтому соотношений не больше, чем ранг вторых гомологий.

Доказательство второй оценки проводится по той же схеме, что и в пункте 3.2. Для этого надо выбрать правильную клеточную модель для $(E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}}$.

Обозначим конус над несвязным объединением k точек $\mathrm{pt}^{\sqcup k}$ как Star_k. Тогда $(EG_i,G_i)\simeq(\operatorname{cone}G_i,G_i)=(\mathrm{Star}_{n_i},\mathrm{pt}^{\sqcup n_i})$. Заметим, что группа G_i действует на этой паре умножением слева. Пространство орбит – это клеточная пара (отрезок, конец отрезка). В частном случае $G_i=\mathbb{Z}_2$ получаем действие $\mathbb{Z}_2$ на $[-1,1]$.

Взяв декартово произведение таких пар, получим действие $\prod_{i=1}^m G_i$ на пространстве $\prod_{i=1}^m\mathrm{Star}_{n_i}\simeq(E\underline{G},\underline{G})^{[m]}$. Пространство $(\mathrm{Star}_{\underline{n}},\mathrm{pt}^{\sqcup\underline{n}})^{\mathcal{K}}$, гомотопически эквивалентное $(E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}}$, получается из него с помощью взятия обратного образа:

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Star}_{\underline{n}},\mathrm{pt}^{\sqcup\underline{n}})^{\mathcal{K}} \arrow[r] \arrow[d] & (\mathrm{Star}_{\underline{n}},\mathrm{pt}^{\sqcup\underline{n}})^{[m]}=\prod_{i=1}^m\mathrm{Star}_{n_i} \arrow[d, "/\prod G_i"] \\
\mathrm{cc}(\mathcal{K}) \arrow[r, hook] & {[0,1]^m}.
\end{tikzcd}$$

То есть полиэдральное произведение $(E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}}$ имеет конечную клеточную модель, склеенную из $\prod_{i=1}^m n_i$ копий $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$, вложенных в m-мерные кубики. На этой модели действует $\prod_{i=1}^m G_i$; пространство орбит – это $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$.

В отличие от случая $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$, эти кубики естественно индексировать не подмножествами $J\subset[m]$, а наборами чисел $(x_1,\ldots,x_m)$, $x_i\in\{1,\ldots,n_i\}$. Будем, как и в пункте 3.2, приклеивать копии $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$ "по возрастанию": кубик $(x_1,\ldots,x_m)$ можно приклеивать, только если

$$(x_1-1,\ldots,x_m),\ (x_1,x_2-1,\ldots,x_m),\ \ldots,\ (x_1,\ldots,x_{m-1},x_m-1)$$

уже приклеены. Тогда копия $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$, соответствующая набору $(x_1,\ldots,x_m)$, приклеивается по подкомплексу $\cup_{j\in J}\mathrm{st}_{\mathcal{K}}(j)$, где $J=\{j:\ x_j\neq 0\}$. Очевидно, подмножеству J соответствует ровно $\prod_{j\in J}(n_j-1)=n_J-1$ таких наборов $(x_1,\ldots,x_m)$. Применив лемму 3.14, получаем ровно $\sum_{J\subset[m]}(n_J-1)\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ образующих и $\sum_{J\subset[m]}(n_J-1)\operatorname{rank}\Pi_1(\mathcal{K}_J)$ соотношений. □

Проиллюстрируем конструкцию, которую мы использовали в доказательстве. На рис. 10 изображены две клеточные модели пространств $(E\underline{G},\underline{G})^{\mathcal{K}}$, у которых отличаются только наборы $\underline{G}$, а также по одной копии $\mathrm{cc}(\mathcal{K})$, вложенной в них. Группы изображены рядом с вершинами симплициального комплекса.

6 Соотношения в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbb{F})$ для флаговых $\mathcal{K}$

В этом разделе все гомологии – с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ характеристики ноль.

6.1 Глобально двумерные алгебры и комбинаторно свободные множества

Ясно, что изучение ассоциативных алгебр, заданных образующими и соотношениями (при фиксированных образующих) равносильно изучению идеалов в тензорных алгебрах; элементы этих идеалов будем называть соотношениями.

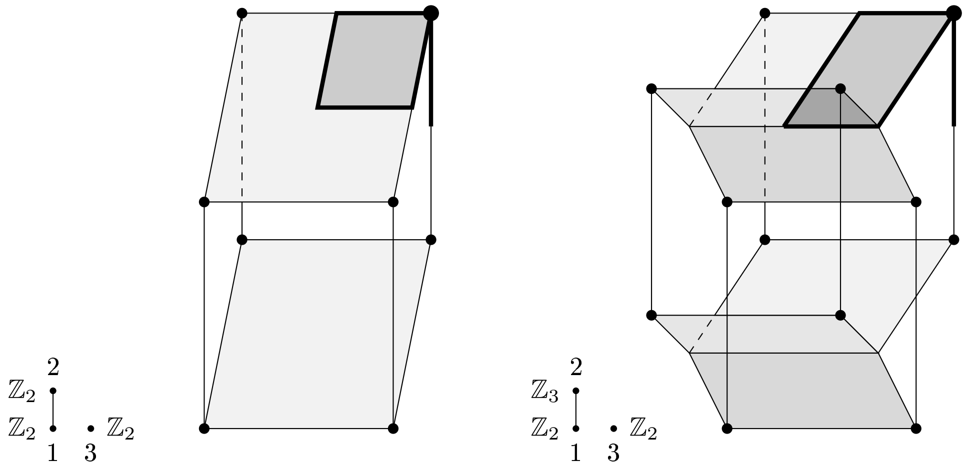


Рис. 10: Конечные клеточные модели для $(E\underline{G}, \underline{G})^{\mathcal{K}}$

Определение 6.1 ([An]). Пусть $T = T(a_1, \ldots, a_N)$ – тензорная мультиградуированная алгебра, порождённая элементами ненулевых степеней; $r_1, \ldots, r_M$ – некоторые её однородные элементы степеней $d_1, \ldots, d_M$ соответственно. Зафиксируем какой-то линейный порядок на $\{a_1, \ldots, a_N\}$. Обозначим как m_j лексикографически максимальный моном полинома r_j.

Будем говорить, что набор соотношений $r_1, \ldots, r_M$ *комбинаторно свободен* (относительно выбранного порядка), если выполнены следующие условия:

1. $m_1, \ldots, m_M$ попарно различны;

2. "начало монома не может совпасть с концом монома": если $m_{j_1} = uv$, $m_{j_2} = wu$, где $u \neq 1$, то $v = w = 1$, $j_1 = j_2$;

3. "моном не может содержать другой моном": если m_{j_1} – подстрока в m_{j_2} (то есть $m_{j_2} = v \cdot m_{j_1} \cdot w$ для каких-то мономов v, w), то $v = w = 1$, $j_1 = j_2$.

Замечание 6.2. Условие 2 не запрещает ситуацию, описанную в условии 3, т.к. в условии 2 требуем $h > 1$ (рассматривается только случай, когда "конец" монома не совпадает со всем мономом).

Предложение 6.3. *Пусть $A = T(a_1, \ldots, a_N)/I$, где двусторонний идеал $I \subset T(a_1, \ldots, a_N)$ порождён однородными элементами $r_1, \ldots, r_M$. Тогда равносильны утверждения:*

1. $\mathrm{Tor}_3^A(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$, *а $r_1, \ldots, r_M$ – минимальный набор порождающих I;*

2. $\frac{1}{F(A;\lambda)} = 1 - \sum_{i=1}^N \lambda^{|a_i|} + \sum_{j=1}^M \lambda^{|r_j|}$.

Оба утверждения выполняются, если набор $r_1, \ldots, r_M$ комбинаторно свободен в $T(a_1, \ldots, a_N)$.

Доказательство. См. [An, теоремы 2.6, 3.1] и [AD]. □

Заметим, что обратное неверно: набор $\{ab - ba, bc - cb\}$ не является комбинаторно свободным в $T(a, b, c)$, если упорядочить переменные как $a < b < c$, но он задаёт глобально двумерную алгебру, т.к. он комбинаторно свободен при упорядочении $b < a < c$.

6.2 Доказательство теоремы 1.3

Рассуждения в этом пункте проходят по той же схеме, что и доказательство [BP, предложение 8.5.4]. Напомним формулировку доказываемой теоремы:

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда в рассматриваемой градуировке*

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}); \lambda)} = -\sum_{J \subset [m]} \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J.$$

Для доказательства надо обобщить некоторые результаты, известные для случая $\mathbb{N}_{\geq 0}$-градуировки.

Лемма 6.5. *Кольцо Стэнли-Райснера* $\mathbb{F}[\mathcal{K}] := \mathbb{F}[v_1,\ldots,v_m]/\Big(\prod_{j\in J} v_j :\ J\notin\mathcal{K}\Big)$ *с* $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$*-градуировкой* $|v_i| := e_i$ *имеет ряд Пуанкаре*

$$F(\mathbb{F}[\mathcal{K}];\lambda) = \sum_{I\subset\mathcal{K}} \frac{\lambda^I}{\prod_{i\in I}(1-\lambda^{e_i})}.$$

Доказательство. Очевидно, все мономы вида $\prod_{i\in I} v_i^{\alpha_i}$, где $I\in\mathcal{K}$, а α_i – произвольные положительные целые числа, образуют аддитивный базис $\mathbb{F}[\mathcal{K}]$ (остальные мономы лежат в идеале). По такому моному I восстанавливается однозначно.

Зафиксируем $I\in\mathcal{K}$ и рассмотрим векторное подпространство в $\mathbb{F}[\mathcal{K}]$ с базисом из мономов указанного выше вида. Этот базис получается из аддитивного базиса кольца $\mathbb{F}[v_1,\ldots,v_m]$ умножением на моном $\prod_{i\in I} v_i$, имеющий степень $\sum_{i\in I} e_i$. Так как

$$F(\mathbb{F}[v_i : i\in I];\lambda) = F(\otimes_{i\in I}\mathbb{F}[v_i];\lambda) = \prod_{i\in I} F(\mathbb{F}[v_i];\lambda) = \prod_{i\in I}\frac{1}{1-\lambda^{e_i}},$$

рассматриваемое векторное подпространство имеет ряд Пуанкаре

$$\frac{\lambda^I}{\prod_{i\in I}(1-\lambda^{e_i})}.$$

Осталось заметить, что $\mathbb{F}[\mathcal{K}]$ раскладывается в прямую сумму таких подпространств по всем $I\subset\mathcal{K}$. $\square$

Лемма 6.6. $F(\Lambda[u_1,\ldots,u_m];\lambda) = \prod_{i\in[m]}(1+\lambda^{e_i})$.

Доказательство. Эта алгебра имеет аддитивный базис из мономов вида $u_{i_1}\wedge u_{i_2}\wedge\cdots\wedge u_{i_k}$, где $i_1,\ldots,i_k$ попарно различны. $\square$

Лемма 6.7. *Если* $\mathcal{K}$ *флаговый, то* $F(\mathbb{F}[\mathcal{K}];-\lambda)\cdot F(H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}});\lambda) = 1$.

Доказательство. $\mathcal{K}$ флаговый, поэтому любое произведение вида $\prod_{j\in J} v_j,\ J\notin\mathcal{K}$, делится на некоторое v_iv_j, где $\{i,j\}\notin\mathcal{K},\ i,j\in J$. Поэтому

$$\mathbb{F}[\mathcal{K}] = \mathbb{F}[v_1,\ldots,v_m]/\left(\prod_{j\in J} v_j :\ J\notin\mathcal{K}\right) = \mathbb{F}[v_1,\ldots,v_m]/\left(v_iv_j :\ \{i,j\}\notin\mathcal{K}\right) =$$
$$= T(v_1,\ldots,v_m)/\left(v_iv_j = 0,\ \{i,j\}\notin\mathcal{K};\ v_iv_j - v_jv_i = 0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$

Напомним, что

$$A := H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}) \simeq T(u_1,\ldots,u_m)/\left(u_i^2 = 0,\ i = 1\ldots m;\ u_iu_j + u_ju_i = 0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}\right).$$

С одной стороны, эта алгебра $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуирована ($|u_i| = e_i$); с другой стороны, на ней есть обычная $\mathbb{N}_{\geq 0}$-градуировка $u_i\mapsto 1$, которую мы будем называть *длиной*. Имеем

$$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}_{\geq 0}} A_i,\ A_i = \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{N}^m_{\geq 0}:\ |\alpha| = i} A_\alpha.$$

Далее надо адаптировать на мультиградуированный случай стандартные рассуждения про двойственность Кошуля (см., например, [Lö, пункт 1.2]).

Рассмотрим $\mathbb{N}_{\geq 0}\times\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуированное векторное пространство $A\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F}[\mathcal{K}]$, где образующей $u_i\in A$ приписывается градуировка $(1,e_i)$, а образующей $v_i\in\mathbb{F}[\mathcal{K}]$ – градуировка $(0,e_i)$. Это свободный $\mathbb{F}[\mathcal{K}]$-модуль. В статье Фроберга ([Fr, теорема из п.3]) показано, что на $A\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]$ можно ввести дифференциал бистепени $(-1,0)$ таким образом, что это пространство становится $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуированной резольвентой

$$\cdots\to A_2\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to A_1\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to A_0\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to\mathbb{F}\to 0$$

тривиального $\mathbb{F}[\mathcal{K}]$-модуля $\mathbb{F}$ (Фроберг рассматривает $\mathbb{N}_{\geq 0}$-градуировку вместо $\mathbb{N}^m_{\geq 0}$-градуировки, но конструкция обобщается дословно). То есть гомологии цепного комплекса

$$\cdots\to A_2\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to A_1\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to A_0\otimes\mathbb{F}[\mathcal{K}]\to 0$$

сосредоточены в нулевой размерности и равны $\mathbb{F}$. В градуированной компоненте степени α имеем цепной комплекс

$$\cdots\to\bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^m_{\geq 0},\ |\beta| = i} A_\beta\otimes(\mathbb{F}[\mathcal{K}])_{\alpha-\beta}\to\bigoplus_{\beta\in\mathbb{N}^m_{\geq 0},\ |\beta| = i-1} A_\beta\otimes(\mathbb{F}[\mathcal{K}])_{\alpha-\beta}\to\ldots$$

Запишем его эйлерову характеристику:

$$\chi_\alpha = \sum_\beta (-1)^{|\beta|} \dim A_\beta \dim(\mathbb{F}[\mathcal{K}])_{\alpha-\beta}.$$

Должно выполняться

$$\chi_\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha \neq 0; \\ 1, & \alpha = 0, \end{cases}$$

то есть

$$1 = \sum_\alpha \chi_\alpha \lambda^\alpha = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\beta|} \lambda^\alpha \dim A_\beta \dim(\mathbb{F}[\mathcal{K}])_{\alpha-\beta} = \sum_{\alpha,\beta} \lambda^{\alpha-\beta} \dim(\mathbb{F}[\mathcal{K}])_{\alpha-\beta} \cdot (-\lambda)^\beta \dim A_\beta = F(\mathbb{F}[\mathcal{K}];\lambda) \cdot F(A;-\lambda),$$

что и требовалось. □

Доказательство теоремы 1.3. Применим предложение 2.29 и лемму 6.7:

$$G(\lambda) := \frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K});\lambda)} = \frac{F(\Lambda[u_1,\ldots,u_m];\lambda)}{F(H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K});\lambda)} = F(\Lambda[u_1,\ldots,u_m];\lambda) \cdot F(\mathbb{F}[\mathcal{K}];-\lambda).$$

Теперь подставим ряды Пуанкаре, вычисленные выше:

$$G(\lambda) = \prod_{j\in[m]} (1+\lambda^{e_j}) \cdot \sum_{I\subset\mathcal{K}} \frac{(-\lambda)^I}{\prod_{i\in I}(1+\lambda^{e_i})} = \sum_{I\subset\mathcal{K}} (-1)^{|I|} \lambda^I \prod_{j\in[m]\setminus I} (1+\lambda^{e_j}).$$

Для каждой пары (I,J), где $I \subset J \subset [m]$ и $I \in \mathcal{K}$, эта сумма содержит по одному слагаемому $(-1)^{|I|}\lambda^J$. Заметим, что

$$\mathcal{K}_J = \{I \subset J : \ I \in \mathcal{K}\}.$$

Поэтому

$$G(\lambda) = \sum_{J\subset[m]} \lambda^J \sum_{I\in\mathcal{K}_J} (-1)^{|I|} = \sum_{J\subset[m]} \lambda^J \sum_{s=0}^{|J|} \sum_{\substack{I\in\mathcal{K}_J: \\ |I|=s}} (-1)^s = \sum_{J\subset[m]} \lambda^J \sum_{s=0}^{|J|} (-1)^s \dim \widetilde{\mathcal{C}}_{s-1}(\mathcal{K}_J) = \sum_{J\subset[m]} \lambda^J \cdot (-\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)),$$

что и требовалось (в последней строчке использовано тождество $\chi(C_\bullet) = \chi(H_\bullet(C,d))$ для приведённого комплекса симплициальных цепей на $\mathcal{K}_J$; аугментация соответствует (-1)-мерному симплексу $\varnothing \in \mathcal{K}$). □

6.3 Доказательство теоремы 1.4

Напомним формулировки.

Определение 6.8. $\mathcal{G}(n) := \{\mathcal{K} \mid \mathcal{K}$ флаговый, и $\mathrm{Tor}_{n+1}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F}) = 0\}$. В частности,

$$\mathcal{G}(2) = \{\mathcal{K} \mid \mathcal{K} \text{ флаговый, и } H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F}) \text{ глобально двумерна}\}.$$

Теорема 6.9. *Пусть $\mathcal{K}$– флаговый симплициальный комплекс.*

1. *Если $\mathcal{K} \in \mathcal{G}(2)$, то алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ может быть задана набором соотношений, который содержит по $b_0(\mathcal{K}_J) - \chi(\mathcal{K}_J)$ соотношений степени $\sum_{j\in J} e_j$ для каждого $J \subset [m]$, и не содержит других соотношений.*

2. *Пусть найден* комбинаторно свободный *набор из $\sum_{J\subset[m]} b_0(\mathcal{K}_J) - \chi(\mathcal{K}_J)$ тождеств, которым удовлетворяет $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$, и из них ровно $b_0(\mathcal{K}_J) - \chi(\mathcal{K}_J)$ имеют степень $\sum_{j\in J} e_j$. Тогда $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ задаётся этими соотношениями, и $\mathcal{K} \in \mathcal{G}(2)$.*

Доказательство. 1. По условию, $\mathrm{Tor}_3^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F}) = 0$. Пусть минимальный набор содержит M соотношений, и i-ое соотношение имеет степень d_i. Сопоставив теорему 1.3 и предложение 6.3, получим

$$1 - \sum_{J\subset[m]} \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J) \cdot \lambda^J + \sum_{i=1}^M \lambda^{d_i} = F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});\lambda) = -\sum_{J\subset[m]} \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J.$$

Это значит, что каждое λ^{d_i} совпало с каким-то λ^J. Пусть соотношений степени J ровно M_J. Тогда

$$1 + \sum_{J\subset[m]} (M_J - \widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J))\lambda^J = -\sum_{J\subset[m]} \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J,$$

то есть

$$\sum_{J\subset[m]} M_J\lambda^J = -1 + \sum_{J\subset[m]} (\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J) - \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J))\lambda^J$$

Осталось заметить, что при $X \neq \varnothing$ имеем $\widetilde{b}_0(X) - \widetilde{\chi}(X) = b_0(X) - \chi(X)$, а при $X = \varnothing$ первая разность на единицу больше.

2. Рассмотрим алгебру A, заданную теми же образующими, что и $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$, и найденным набором соотношений. Так как $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ удовлетворяет соотношениям, задающим эту алгебру, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ – факторалгебра A.

   Набор соотношений комбинаторно свободный, поэтому по предложению 6.3 A глобально двумерна, и неравенство Голода-Шафаревича обращается в равенство. Значит, $-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J$ – ряд Пуанкаре алгебры A, то есть $F(A;\lambda) = F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});\lambda)$. Поэтому $A = H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$.

□

6.4 Примеры и контрпримеры

6.4.1 Поиск соотношений и проверка принадлежности $\mathcal{G}(2)$

Предложение 6.10. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый. Следующая последовательность действий позволяет найти некоторые соотношения в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ и, возможно, установить, верно ли $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$:*

1. *Вычислить базис и таблицу умножения суперагебры Ли*

$$\pi_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty)^\mathcal{K})\otimes\mathbb{F} = FSL(u_1,\dots,u_m)/([u_i,u_i]=0,\ i=1\dots m;\ [u_i,u_j]=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}),$$

   рассматриваемую как факторгруппа свободной суперагебры Ли, до размерности m включительно (с точки зрения мультиградуировки – во всех размерностях вида J, $J\subset[m]$).

2. *Перебрать все $J\subset[m]$, такие что $\chi(\mathcal{K}_J)\neq b_0(\mathcal{K}_J)$, в порядке возрастания (если $J_1\subset J_2$, то J_1 должен идти раньше). Для каждого из них:*
   - (a) *Выписать образующие подалгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}_J})$, описанные в предложении 2.25.*
   - (b) *Перебрать все возможные (итерированные, вложенные) коммутаторы от этих образующих, имеющие степень J.*
   - (c) *Выразить эти коммутаторы через аддитивный базис, вычисленного на первом шаге.*
   - (d) *Найти линейные соотношения между этими коммутаторами: ожидается, что соотношений, не вытекающих из ранее найденных и тождества Якоби, ровно $b_0(\mathcal{K}_J)-\chi(\mathcal{K}_J)$. Если это не так, то $\mathcal{K}\notin\mathcal{G}(2)$.*

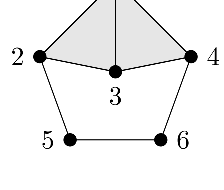
3. *Проверить, что найденный набор соотношений комбинаторно свободен (сразу или, возможно, после подстановки одних соотношений в другие). Если это так, то $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$, и найденные соотношения задают $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$.*

Доказательство. Утверждение шага 3 следует из теоремы 1.4. Утверждение шага 2.(d) докажем от противного: пусть $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$. Тогда минимальный набор соотношений должен содержать по $b_0(\mathcal{K}_J)-\chi(\mathcal{K}_J)$ соотношений степени J для каждого $J\subset[m]$, и не содержать соотношений других степеней.

Осталось воспользоваться тем, что $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F}) = U(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{F})$, а минимальные соотношения алгебры $U(\mathfrak{g})$ лиевы для любой $\mathbb{F}$-суперагебры Ли $\mathfrak{g}$ (это видно из построения минимальной резольвенты $U(\mathfrak{g})-$модуля $\mathbb{F}$). Значит, в ходе этой последовательности действий мы должны были найти все соотношения. □

Шаги 1 и 5 можно реализовать с помощью пакета SuperLie для Wolfram Mathematica [SL] (по крайней мере, при $m\leq 7$), поэтому для человека вычисление сводится к перебору.

Пример (один из минимальных комплексов, реализующих нетривиальные тройные произведения Масси в $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$).



Выпишем образующие $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ как подалгебры в супералгебре $SL_\mathcal{K}$:

$$x_1=[u_5,u_1],\ x_2=[u_6,u_1],\ x_3=[u_4,u_2],\ x_4=[u_6,u_2],x_5=[u_5,u_3],x_6=[u_6,u_3],\ x_7=[u_5,u_4];$$

$$y_1=[u_2,[u_6,u_1]],\ y_2=[u_3,[u_5,u_1]],\ y_3=[u_3,[u_6,u_1]],\ y_4=[u_4,[u_5,u_1]],\ y_5=[u_5,[u_6,u_1]],$$

$$y_6=[u_3,[u_6,u_2]],\ y_7=[u_2,[u_5,u_4]],\ y_8=[u_4,[u_6,u_2]],\ y_9=[u_4,[u_5,u_3]],\ y_{10}=[u_5,[u_6,u_3]];$$

$$z_1=[u_2,[u_3,[u_6,u_1]]],\ z_2=[u_3,[u_4,[u_5,u_1]]],\ z_3=[u_3,[u_5,[u_6,u_1]]].$$

Помимо несвязных полных подкомплексов, нетривиальная эйлерова характеристика есть только у $\mathcal{K}_{12456},\ \mathcal{K}_{23456},\ \mathcal{K}_{123456}$. Все три гомотопически эквивалентны окружности, поэтому ожидается, что в соответствующих степенях будет обнаружено по одному соотношению. Степень $e_1+e_2+e_4+e_5+e_6$ имеют элементы

$$[x_1,y_8],\ [x_2,y_7],\ [x_3,y_5],\ [x_4,y_4],\ [x_7,y_1];$$

степень $e_2+e_3+e_4+e_5+e_6$ имеют элементы

$$[x_3,y_{10}],\ [x_4,y_9],\ [x_5,y_8],\ [x_6,y_7],\ [x_7,y_6];$$

степень $e_1+e_2+e_3+e_4+e_5+e_6$ – элементы

$$[x_3,z_3],\ [x_4,z_2],\ [x_7,z_1],\ [y_1,y_9],\ [y_2,y_8],\ [y_3,y_7],\ [y_4,y_6],$$

$$[x_1,[x_3,x_6]],\ [x_3,[x_6,x_1]],\ [x_2,[x_3,x_5]],\ [x_3,[x_5,x_2]].$$

Программа выражает их через некоторый стандартный базис соответствующей градуированной компоненты данной алгебры Ли. Вычисления показывают, что в этих компонентах действительно по одному соотношению: а именно,

$$[x_1,y_8]+[x_2,y_7]+[x_3,y_5]+[x_4,y_4]-[x_7,y_1]=0;$$

$$[x_3,y_{10}]+[x_4,y_9]-[x_5,y_8]+[x_6,y_7]+[x_7,y_6]=0;$$

$$-[x_1,[x_3,x_6]]+[x_2,[x_3,x_5]]+[x_3,z_3]+[x_4,z_2]+[x_7,z_1]+[y_1,y_9]+[y_2,y_7]-[y_2,y_8]+[y_4,y_6]=0.$$

Их старшие мономы (при упорядочивании $x_1>\dots>z_3$) –

$$x_1y_8,\ x_3y_{10},\ x_1x_3x_6.$$

Они “не перекрываются”, поэтому набор из этих трёх соотношений комбинаторно свободен. То есть $\mathcal{K}\in\mathcal{G}(2)$, и данные три соотношения задают $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ как алгебру.

6.4.2 Контрпример: граница октаэдра

Рассмотрим простейший флаговый комплекс, у которого есть вторые гомологии: $\mathcal{K}$ – граница октаэдра, то есть джойн трёх двухточечных симплициальных комплексов. Имеем $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\simeq S^3\times S^3\times S^3$. По теореме Серра, только третья гомотопическая группа S^3 имеет нетривиальную свободную часть. Поэтому $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{F}$ – алгебра Ли с тремя образующими степени 2 и нулевым коммутатором, так что $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{F}=\mathbb{F}[a,b,c]$. Её ряд Пуанкаре – это произведение рядов Пуанкаре для $\mathbb{F}[a],\ \mathbb{F}[b],\ \mathbb{F}[c]$:

$$F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});\lambda)=\frac{1}{(1-\lambda_1\lambda_2)(1-\lambda_3\lambda_4)(1-\lambda_5\lambda_6)}.$$

Как ассоциативная алгебра, она может быть задана тремя соотношениями:

$$\mathbb{F}[a,b,c]=T(a,b,c)/(ab-ba,ac-ca,bc-cb).$$

Этот набор не комбинаторно свободен, т.к. ab заканчивается на букву, на которую начинается bc. Кроме того, $\mathrm{Tor}^{\mathbb{F}[a,b,c]}(\mathbb{F},\mathbb{F})\simeq\Lambda[a,b,c]$, то есть $\mathrm{Tor}_3^{\mathbb{F}[a,b,c]}(\mathbb{F},\mathbb{F})\neq 0$. Поэтому теорема 1.4 неприменима.

Попробуем оценить снизу количество соотношений в этой алгебре с помощью неравенства Голода-Шафаревича. Пусть ровно r_α соотношений имеют степень λ^α. Тогда неравенство Г.-Ш. утверждает, что

$$\frac{1-\lambda_1\lambda_2-\lambda_3\lambda_4-\lambda_5\lambda_6+\sum_\alpha r_\alpha\lambda^\alpha}{(1-\lambda_1\lambda_2)(1-\lambda_3\lambda_4)(1-\lambda_5\lambda_6)}\geq 1,$$

то есть все коэффициенты ряда

$$\frac{\sum_\alpha r_\alpha\lambda^\alpha-\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4-\lambda_1\lambda_2\lambda_5\lambda_6-\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6}{(1-\lambda_1\lambda_2)(1-\lambda_3\lambda_4)(1-\lambda_5\lambda_6)}$$

неотрицательны. В данном случае есть возможность перейти от $\mathbb{N}^6_{\geq 0}$-градуировки к $\mathbb{N}^3_{\geq 0}$-градуировке и образующим $\mu_1 = \lambda_1\lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_3\lambda_4$, $\mu_3 = \lambda_5\lambda_6$, которым припишем степени e_1, e_2, e_3 соответственно. Получаем

$$\frac{\sum_{i,j,k} r_{ijk}\mu_1^i\mu_2^j\mu_3^k - \mu_1\mu_2 - \mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_3}{(1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3)} \geq 0.$$

Коэффициент этого ряда при $\mu_1\mu_2$ равен $r_{110} + r_{100} + r_{010} + r_{000} - 1 \geq 0$. Соотношений вида $\gamma a = 0$, $\delta b = 0$ или $\varepsilon = 0$ в этой алгебре нет. Поэтому неравенство превращается в $r_{110} \geq 1$, т.е. в "существует соотношение, в котором a и b задействованы по одному разу"; очевидно, оно имеет вид $[a, b] = 0$, т.к. все соотношения в универсальных обёртывающих – лиевы. Аналогично можно найти другие два соотношения $[b, c] = [a, c] = 0$, но этот метод не позволяет доказать их достаточность.

Список литературы

[An] D. J. Anick. Non-Commutative Graded Algebras and Their Hilbert Series. J. Algebra 78 (1982), 120-140.

[AD] D. Anick and W. Dicks. A mnemonic for the graded-case Golod-Shafarevich inequality. arXiv:1508.03231.

[BBCG] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen and S. Gitler. The polyhedral product functor: a method of computation for moment-angle complexes, arrangements and related spaces. Adv. Math. 225 (2010), no. 3, 1634-1668. arXiv:0711.4689.

[BOWWZZ] C. Bibby, A. Odesky, M. Wang, S. Wang, Z. Zhang, H. Zheng. Minimal flag triangulations of lower-dimensional manifolds. Involve 13 (2020), 683-703. arXiv:1909.03303.

[BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. arXiv:1210.2368

[Ca] Li Cai. On the presentations of the commutator subgroup of a right-angled Coxeter group (conference talk). Toric Topology 2021 in Osaka, March 25. https://www.xmath.ous.ac.jp/~kuroki/Toric2021_title_abstract/Cai_Slide.pdf

[Ep] D. B. A. Epstein. Finite presentations of groups and 3-manifolds. Quart. J. Math. 12 (1961), 205-12.

[Fr] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series. Math. Scand. 37 (1975), 29-39.

[GIPS] J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, to appear. arXiv:2002.11476

[GPTW] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes. Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663-6682. arXiv:1211.0873.

[Lö] C. Löfwall. Hilbert series, Poincaré series and homotopy Lie algebras of graded algebras – a seminar. arXiv:2103.07735.

[LS] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. Combinatorial Group Theory. Springer, 1977.

[MKS] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar. Combinatorial Group Theory. Presentations of groups in terms of generators and relations. Dover Publications Inc., New York, 1976.

[PR] T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322. arXiv:0707.0300.

[PRV] T. Panov, N. Ray and R. Vogt. Colimits, Stanley-Reisner algebras, and loop spaces. Progress in Math. 215 (2004), 261-291. arXiv:math/020281 [math.AT]

[PV1] Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Мат.сборник 207 (2016), вып. 11, 105-126. arXiv:1603.06902

[PV2] T. Panov and Y. Veryovkin. On the commutator subgroup of a right-angled Artin group. J. Algebra 521 (2019), 284-298. arXiv:1702.00446

[SL] SuperLie. A package for Lie Algebra and Super Algebra computations in Mathematica software system. http://www.equaonline.com/math/SuperLie/

[FF] А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. Курс гомотопической топологии. URSS, Москва, 1989.