Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

Алгебры Понтрягина и категория Люстерника-Шнирельмана момент-угол комплексов во флаговом случае

Выполнил студент 403 группы
Вылегжанин Федор Евгеньевич.
Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич.

Москва, 2022 г.

1. Введение

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]=\{1,\dots,m\}$. Мы изучаем следующие гомотопические инварианты соответствующего *момент-угол комплекса* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$:

- его *алгебру Понтрягина* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$, где $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей;
- его *категорию Люстерника-Шнирельмана*, или *LS-категорию* $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$.

Алгебры Понтрягина момент-угол комплексов изучались в [PR, GPTW, GIPS]. В случае, когда $\mathbf{k}$ – поле, а комплекс $\mathcal{K}$ флаговый, известен минимальный набор образующих алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$, состоящий из $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ элементов [GPTW, Theorem 4.3]. Но явное описание соотношений между ними, по-видимому, затруднительно. Мы решаем более простую задачу описания *минимального числа* и *степеней* определяющих соотношений, вычисляя $\operatorname{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ для флаговых $\mathcal{K}$ (роль этого $\mathbf{k}$-модуля объясняется в Предложении 2.4(b)).

Бебен и Грбич [BG] получили ряд верхних и нижних оценок на LS-категорию момент-угол комплексов, уделяя особое внимание случаю, когда $|\mathcal{K}|$ – многообразие малой размерности (но $\mathcal{K}$ может быть нефлаговым). Мы вычисляем $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для всех флаговых комплексов $\mathcal{K}$ и даем новую нижнюю оценку в общем случае. Эти результаты также опираются на вычисление мультиградуированного модуля $\operatorname{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ для флаговых комплексов.

Для любого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ вкладывается в алгебру Понтрягина $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$ *пространства Дэвиса-Янушкевича* $(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K}$. Мы вводим $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировку на этих алгебрах и показываем, что теорема Панова и Рэя о структуре $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$ (для случая коэффициентов в поле или в кольце целых чисел см. [BP, §8.4]) верна для любого коммутативного кольца $\mathbf{k}$ с единицей:

Теорема 1.1 (Теорема 3.1)**.** *Рассмотрим $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированную $\mathbf{k}$-алгебру*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! := T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2=0,\ i=1,\dots,m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}),\ \deg u_i=(-1,2e_i).$$

(a) $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})\cong\operatorname{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ *как алгебры, где* $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ – алгебра Стэнли-Райснера*;*
(b) *Есть естественное вложение* $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$;
(c) *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то* $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$.

Имеем мультиградуировку, аналогичную градуировке на $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ из [BP, Theorem 4.5.7]:

$$H_n(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})=\bigoplus_{-i+2|\alpha|=n}H_{-i,2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k}),\ \text{где}\ H_{-i,2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})\cong\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2\alpha}.$$

Используя резольвенту Фроберга [Fr] для левого $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$-модуля $\mathbf{k}$ и структуру свободного левого $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$-модуля на $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$, мы вычисляем:

Теорема 1.2 (Теорема 4.5)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

$$\operatorname{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Здесь $\mathcal{K}_J=\{I\in\mathcal{K}:\ I\subset J\}$ – полный подкомплекс в $\mathcal{K}$. Этот изоморфизм $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуирован в следующем смысле:

$$\operatorname{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$$

(если $J\subset[m]$, то мы пишем J вместо $\sum_{j\in J}e_j\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$).

Следствие 1.3 (Следствие 4.6)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда минимальное копредставление алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ содержит ровно $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$ соотношений: для каждого $J\subset[m]$ – ровно $\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$ соотношений степени $(-|J|,2J)$.*

Из этого результата следуют известные критерии того, что $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ – свободная алгебра или алгебра с одним соотношением [GPTW, GIPS]. В Следствии 4.6 мы также оцениваем снизу число образующих и соотношений в случае коэффициентов в кольце главных идеалов.

Ряд Пуанкаре алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ во флаговом случае вычислен Пановым и Рэем [PR]. Мы уточняем это вычисление, вводя мультиградуировку. Сопоставим каждому $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированному векторному пространству $V=\bigoplus_{i,\alpha}V_{i,\alpha}$ формальный степенной ряд $F(V;t,\lambda):=$

$\sum_{i,\alpha}\dim(V_{i,\alpha})t^i\lambda^\alpha$ от $m+1$ переменных $(t,\lambda)=(t,\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, где $\lambda^\alpha:=\prod_{j=1}^m\lambda_j^{\alpha_j}$ при $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Обозначим также $\widetilde{\chi}(X):=\sum_i(-1)^i\dim\widetilde{H}_i(X)=\chi(X)-1$.

Теорема 1.4 (Теорема 4.9)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда*

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});t,\lambda)}=-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)t^{-|J|}\lambda^{2J}.$$

По теореме Милнора-Мура [MM], алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q})$ является универсальной обертывающей алгеброй для $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$. Поэтому рациональные гомотопические группы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ также $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы. Мы получаем мультиградуированное уточнение [DS, Theorem 4.2.1]:

Теорема 1.5 (Теорема 4.15)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Рассмотрим следующий $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный формальный степенной ряд:*

$$\sum_\beta w_\beta\lambda^\beta=-\ln\left(-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)(-\lambda)^J\right).$$

Тогда

$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha}=(-1)^{|\alpha|}\sum_{k|\alpha}\frac{\mu(k)}{k}w_\alpha,$$

где $\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, а $\mu(n)$ – функция Мёбиуса. В остальных случаях $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{i,\beta}=0$.

Неотрицательность этих чисел дает некоторые ограничения на приведенные эйлеровы характеристики полных подкомплексов во флаговых комплексах $\mathcal{K}$. Эти ограничения (см. Пример 4.18) могут представлять независимый комбинаторный интерес, см. работу Устиновского [Us].

Как еще одно приложение Теоремы 1.2, мы доказываем в Предложении 5.13, что *спектральная последовательность Милнора-Мура*

$$E^2_{p,q}\cong\mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega X;\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F})_q\Rightarrow H_{p+q}(X;\mathbb{F})$$

для $X=\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ вырождается во втором листе, если $\mathcal{K}$ флаговый. Это позволяет вычислить *инвариант Тумера* [To] для $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, что дает оценку снизу на LS-категорию $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ (см. Предложение 5.15). Заметим, что более простая нижняя оценка на $\mathrm{cat}(X)$ через *cup-длину* может не обращаться в равенство для $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, как показано в [BG, Section 5]. Все же мы ожидаем, что она точна для флаговых комплексов (см. Проблему 5.27).

Чтобы получить оценку сверху, заметим, что во флаговом случае *вещественный момент-угол комплекс* $\mathcal{R}_\mathcal{K}$ является классифицирующим пространством коммутанта $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$ *прямоугольной группы Кокстера* $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$, ассоциированной с $\mathcal{K}$ (см. [ПВ]). Используя неравенство $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\leq\mathrm{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ Бебена и Грбич [BG] и формулу Дранишникова [Dr] для виртуальной когомологической размерности $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$, мы вычисляем $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для всех флаговых $\mathcal{K}$:

Теорема 1.6 (Теорема 5.16)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

$$\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})=\mathrm{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K})=1+\max_{J\subset[m]}\mathrm{cdim}_\mathbb{Z}\,\mathcal{K}_J=1+\max_{I\in\mathcal{K}}\mathrm{cdim}_\mathbb{Z}\,\mathrm{lk}_\mathcal{K}\,I.$$

Пусть $\mathcal{K}^f$ – *флагификация* $\mathcal{K}$, то есть единственный флаговый симплициальный комплекс с тем же 1-остовом (i*-остов* $\mathcal{K}$ – это симплициальный комплекс $\mathrm{sk}_i\,\mathcal{K}:=\{I\in\mathcal{K}:\ |I|\leq i+1\}$). Мы даем следующую нижнюю оценку на $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ в нефлаговом случае, которая наиболее полезна, когда $\nu(\mathcal{K})$ мало́ (это число измеряет, насколько комплекс $\mathcal{K}$ нефлаговый):

Предложение 1.7 (Предложение 5.21 и Предложение 5.22)**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Пусть $\nu(\mathcal{K})$ – это наименьшее $n\geq 0$, такое что верно следующее: $J\in\mathcal{K}$ всякий раз, когда $J\subset I\in\mathcal{K}^f$ и $|I\setminus J|\geq n$. Тогда*

$$\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\geq 1-\nu(\mathcal{K})+\max_{J\subset[m]}\mathrm{cdim}_\mathbb{Z}\,\mathcal{K}^f_J.$$

Это позволяет вычислить $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ для остовов флаговых триангуляций многообразий:

Следствие 1.8 (Следствие 5.25). *Пусть* $\mathcal{K}$ – *флаговая триангуляция* d*-мерного многообразия. Пусть* $\mathcal{L}$ – *такой симплициальный комплекс, что* $\mathrm{sk}_i\,\mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathrm{sk}_j\,\mathcal{K}$ *для некоторых* i, j, $1 \le i \le j \le d$. *Тогда* $i+1 \le \mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}}) \le j+1$. *В частности,* $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) = d+1$ *и* $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathrm{sk}_i\,\mathcal{K}}) = i+1$.

Работа имеет следующую структуру.

В Разделе 2 мы напоминаем основные свойства симплициальных комплексов и момент-угол комплексов. Далее обсуждаются мультиградуированные ассоциативные алгебры и связанные конструкции из гомологической алгебры.

В Разделе 3 мы доказываем Теорему 1.1 и описываем структуру левого $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля на $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$.

В Разделе 4 мы интерпретируем построенную Фробергом минимальную резольвенту левого $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$ как свободную резольвенту $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$. С помощью этой резольвенты доказываются Теоремы 1.2, 1.4 и 1.5.

В Разделе 5 изучается LS-категория $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ и $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ во флаговом случае. Мы вычисляем $\mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ и показываем, что неравенство $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \le \mathrm{cat}(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ обращается в равенство из-за вырождения спектральной последовательности Милнора-Мура. Наконец, мы обсуждаем оценки снизу на $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}})$ в общем случае и cup-длину $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ во флаговом случае.

Благодарности. Автор благодарит своего научного руководителя Т. Е. Панова за помощь, поддержку и ценные советы, и Д. И. Пионтковского за помощь с алгебрами Кошуля.

Содержание

2. Предварительные сведения

2.1. **Симплициальные комплексы и полиэдральные произведения.** *Симплициальный комплекс* $\mathcal{K}$ на множестве вершин V – это набор подмножеств $I \subset V$, называемых *гранями* или *симплексами*, удовлетворяющий условию

- Если $I \in \mathcal{K}$ и $J \subset I$, то $J \in \mathcal{K}$.

Из этого условия следует, что $\varnothing \in \mathcal{K}$. Элемент $i \in V$ называется *призрачной вершиной*, если $\{i\} \notin \mathcal{K}$. Мы рассматриваем только комплексы без призрачных вершин, так что $\{i\} \in \mathcal{K}$ для всех $i \in V$. Обычно $V = [m] := \{1, \ldots, m\}$.

Каждому подмножеству $J \subset [m]$ сопоставляется симплициальный комплекс $\mathcal{K}_J := \{I \in \mathcal{K} :\ I \subset J\}$ на множестве вершин J, называемый *полным подкомплексом* $\mathcal{K}$ на J.

Недостающей гранью комплекса $\mathcal{K}$ называется всякое $J \subset [m]$, такое что $J \notin \mathcal{K}$, но любое собственное подмножество J принадлежит $\mathcal{K}$. Комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый*, если все его недостающие грани двухэлементны. Полные подкомплексы флаговых комплексов флаговые. Флаговый комплекс однозначно определяется своим 1-остовом. Поэтому каждому $\mathcal{K}$ соответствует единственный флаговый комплекс $\mathcal{K}^f$ с тем же 1-остовом, называемый *флагификацией* комплекса $\mathcal{K}$. Ясно, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}^f$.

Линк симплекса $I \in \mathcal{K}$ – это комплекс $\operatorname{lk}_{\mathcal{K}} I := \{J \in \mathcal{K} : I \cap J = \varnothing,\ I \cup J \in \mathcal{K}\}$.

Лемма 2.1 ([PT, Lemma 2.3]). *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, и $I \in \mathcal{K}$. Тогда $\operatorname{lk}_{\mathcal{K}} I$ – полный подкомплекс $\mathcal{K}$.* □

Пусть теперь $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ – набор пар топологических пространств, $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на $[m]$. Соответствующее *полиэдральное произведение* – это следующее топологическое пространство:

$$(\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i \right) \subset \prod_{i=1}^m X_i.$$

Мы пишем $(X, A)^{\mathcal{K}} := (\underline{X}, \underline{A})^{\mathcal{K}}$ в случае $X_1 = \dots = X_m = X$, $A_1 = \dots = A_m = A$. Также $X^{\mathcal{K}} := (X, \mathrm{pt})^{\mathcal{K}}$.

Момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (D^2, S^1)^{\mathcal{K}}$ и *вещественный момент-угол комплекс* $\mathcal{R}_{\mathcal{K}} := (D^1, S^0)^{\mathcal{K}}$ – важные частные случаи этой конструкции. Гомологии и когомологии момент-угол комплексов хорошо известны:

Теорема 2.2 (см. [BP, Theorem 4.5.8]). *Для любой группы коэффициентов,*

$$H_p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{p-|J|-1}(\mathcal{K}_J), \quad H_p(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J),$$

$$H^p(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{p-|J|-1}(\mathcal{K}_J), \quad H^p(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}^{p-1}(\mathcal{K}_J).$$ □

2.2. **Мультиградуированные ассоциативные алгебры.** В дальнейшем $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей, $\otimes$ – тензорное произведение $\mathbf{k}$-модулей. В случае коэффициентов в поле мы обычно пишем $\mathbb{F}$ вместо $\mathbf{k}$.

Мультиградуировкой $\mathbf{k}$-модуля будем называть градуировку аддитивной полугруппой вида $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, $k = 0, 1, 2$. Мы обозначаем элементы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ буквами греческого алфавита, а элементы $\mathbb{Z}$ – буквами латинского. Стандартный базис $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ обозначается $e_1, \dots, e_m$. Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ – мультииндекс, мы пишем $|\alpha| := \sum_{i=1}^m \alpha_i$.

Есть стандартные проекции $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m \to \mathbb{Z}$, $e_i \mapsto 1$ и $\mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}$, $(n_1, \dots, n_k) \mapsto n_1 + \dots + n_k$. Поэтому каждый $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированный $\mathbf{k}$-модуль $\mathbb{Z}$-градуирован тотальной степенью:

$$V_n := \bigoplus_{i_1 + \dots + i_k + |\alpha| = n} V_{i_1, \dots, i_k, \alpha}.$$

Заметим, что иногда мы пишем $|x|$ вместо $\deg x$.

Для градуировки однородных компонент мы используем соглашение $\deg M_\alpha = \deg M^\alpha = \alpha$ с единственным исключением: $\deg \operatorname{Ext}_A^n = -n$. Если M – свободный градуированный $\mathbf{k}$-модуль, обозначим как $M^{\#}$ градуированно-двойственный $\mathbf{k}$-модуль: $(M^{\#})_\alpha := \operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(M_\alpha, \mathbf{k})$.

Мультиградуированной алгеброй мы называем $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированную связную $\mathbf{k}$-алгебру с единицей, являющуюся свободным $\mathbf{k}$-модулем конечного типа ($\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированная алгебра A *связна*, если она связна как $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра, то есть $A_{<0} = 0$ и $A_0 \cong \mathbf{k}$). Примеры:

(1) $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированная свободная ассоциативная алгебра (тензорная алгебра) $T(a_1, \dots, a_N)$, где a_i – произвольные образующие положительной тотальной степени;
(2) $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированная коммутативная $\mathbf{k}$-алгебра $\mathbf{k}[m] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$, $\deg v_i = 2e_i$;
(3) $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированная *алгебра Стэнли-Райснера* симплициального комплекса $\mathcal{K}$

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m] / \left(\prod_{i \in I} v_i : I \notin \mathcal{K} \right), \ \deg v_i = 2e_i;$$

(4) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$-градуированная внешняя $\mathbf{k}$-алгебра $\Lambda[m] := \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, $\deg u_i = (-1, 2e_i)$.

Теперь рассмотрим $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированную $\mathbf{k}$-алгебру A, левые A-модули $L, \widetilde{L}$ и правый A-модуль R. Тогда, для любого $i \geq 0$, $\mathbf{k}$-модули $\mathrm{Ext}^i_A(L, \widetilde{L})$ и $\mathrm{Tor}^A_i(R, L)$ $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы. Поэтому $\mathrm{Ext}_A(L, \widetilde{L})$ и $\mathrm{Tor}^A(R, L)$ – $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированные $\mathbf{k}$-модули. Например,

$$\text{если } x \in \mathrm{Ext}^i_A(L, \widetilde{L})_{j_1,\dots,j_k,\alpha}, \text{ то } \deg x = (-i, j_1, \dots, j_k, \alpha);$$
$$\text{если } y \in \mathrm{Tor}^A_i(R, L)_{j_1,\dots,j_k,\alpha}, \text{ то } \deg y = (i, j_1, \dots, j_k, \alpha).$$

Изоморфизм $\Lambda[m] \cong \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ объясняет наш выбор градуировки на $\Lambda[m]$.

2.3. **Ряды Пуанкаре и минимальные копредставления.**

Определение 2.3. Пусть $V = \bigoplus_{i,\alpha} V_{i,\alpha}$ – $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированное векторное пространство. Его *ряд Пуанкаре* – это формальный степенной ряд от $m+1$ переменных $(t, \lambda) = (t, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$:

$$F(V; t, \lambda) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}} \dim(V_{i,\alpha}) \cdot t^i \lambda^\alpha, \quad \lambda^\alpha := \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\alpha_i}.$$

Обычно V будет сосредоточено в степенях $\mathbb{Z}_{\leq 0} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, поэтому $F(V; t, \lambda) \in \mathbb{Z}[[t^{-1}, \lambda]]$.

Копредставлением мультиградуированной алгебры называют эпиморфизм $\pi : T(a_1, \dots, a_N) \twoheadrightarrow A$ вместе с выбором элементов $r_1, \dots, r_M \in T(a_1, \dots, a_N)$, называемых *соотношениями*, которые порождают идеал $\mathrm{Ker}\, \pi \subset T(a_1, \dots, a_N)$. Мы предполагаем, что образующие имеют положительную тотальную степень, а соотношения однородны. Тогда A связна, и проекция $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ задает структуру левого A-модуля на $\mathbf{k}$. Кроме того, верны следующие стандартные свойства связных алгебр с единицей, с аналогичными доказательствами по индукции:

Предложение 2.4. *Пусть $\mathbb{F}$ – поле, A – мультиградуированная $\mathbb{F}$-алгебра.*

(a) *Существует такая свободная резольвента левого A-модуля $\mathbb{F}$ вида*

$$\dots \xrightarrow{d} A \otimes_{\mathbb{F}} R_2 \xrightarrow{d} A \otimes_{\mathbb{F}} R_1 \xrightarrow{d} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F} \longrightarrow 0,$$

что $d : R_n \to A_{>0} \otimes_{\mathbb{F}} R_{n-1}$, $d : R_1 \to A_{>0}$. Она называется минимальной *резольвентой и единственна с точностью до изоморфизма. Под действием функтора $\mathbb{F} \otimes_A (-)$ все дифференциалы обращаются в ноль, так что $R_n \cong \mathrm{Tor}^A_n(\mathbb{F}, \mathbb{F})$.*

(b) *С точностью до естественной эквивалентности, есть взаимно-однозначное соответствие между копредставлениями $A \simeq T(a_1, \dots, a_N)/(r_1, \dots, r_M)$ и точными последовательностями A-модулей вида $A \otimes_{\mathbb{F}} R_2 \to A \otimes_{\mathbb{F}} R_1 \to A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{F} \to 0$. При этом соответствии множество $\{a_1, \dots, a_N\}$ является базисом градуированного векторного пространства R_1, а $\{r_1, \dots, r_M\}$ – базисом R_2.*

В частности, существует минимальное копредставление $A \simeq T(a_1, \dots, a_N)/(r_1, \dots, r_M)$, *такое что*

$$\mathrm{Tor}^A_1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \simeq \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{F} \cdot a_i, \quad \mathrm{Tor}^A_2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \simeq \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{F} \cdot r_j.$$

Число образующих и соотношений в минимальном копредставлении в каждой степени – наименьшее возможное среди всех копредставлений A.

(c) *Ряды Пуанкаре для A и $\mathrm{Tor}^A_n(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ связаны тождеством*

$$\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \cdot F(\mathrm{Tor}^A_n(\mathbb{F}, \mathbb{F}); t, \lambda) = \frac{1}{F(A; t, \lambda)}.$$

Доказательство. (a) См. [BP, Proposition A.2.3].
(b) См. [Wa, §7].
(c) См. [BP, Proposition A.2.1]. □

В случае произвольного кольца коэффициентов дифференциалы в комплексе, который получается из минимальной резольвенты применением функтора $\mathbf{k} \otimes_A (-)$, могут быть ненулевыми (см. замечание после [BP, Proposition A.2.3]). Тем не менее, каждое копредставление A соответствует некоторой резольвенте, и модуль $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ можно вычислить как гомологии комплекса $\dots \to \bigoplus \mathbf{k} \cdot r_j \to \bigoplus \mathbf{k} \cdot a_i \to \mathbf{k} \to 0$. Это позволяет оценить снизу число образующих и соотношений:

Предложение 2.5. *Пусть* $\mathbf{k}$ *– кольцо главных идеалов,* A *– мультиградуированная* $\mathbf{k}$*-алгебра. Обозначим за* $N_{i,\alpha}$ *минимальное число порождающих* $\mathbf{k}$*-модуля* $\mathrm{Tor}_i^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_\alpha$*. Тогда каждое копредставление алгебры* A *содержит хотя бы* $N_{1,\alpha}$ *образующих и хотя бы* $N_{2,\alpha}$ *соотношений степени* α*.*

Доказательство. Пусть $A = T(a_1,\dots,a_N)/(r_1,\dots,r_M)$ – копредставление. Построим точную последовательность

$$\bigoplus_{j=1}^M A\cdot r_j \to \bigoplus_{i=1}^N A\cdot a_i \to A \to \mathbf{k} \to 0,$$

как в [Wa, §7], и произвольно продолжим ее до свободной резольвенты левого A-модуля $\mathbf{k}$. Тогда $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ – это гомологии комплекса

$$\dots \to \bigoplus_{j=1}^M \mathbf{k}\cdot r_j \to \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{k}\cdot a_i \to \mathbf{k} \to 0.$$

В частности, $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_\alpha$ – фактормодуль подмодуля свободного $\mathbf{k}$-модуля, имеющего базис $\{r_j : \deg r_j = \alpha\}$. Для колец главных идеалов верно, что подмодуль свободного модуля – свободный модуль не большего ранга [Al, Proposition 5.1]. Поэтому $\mathbf{k}$-модуль $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_\alpha$ может быть порожден $\#\{r_j : \deg r_j = \alpha\}$ элементами, откуда $\#\{r_j : \deg r_j = \alpha\} \geq N_{2,\alpha}$. Аналогично, $\#\{a_i : \deg a_i = \alpha\} \geq N_{1,\alpha}$. □

2.4. **(Ко)алгебры Стэнли-Райснера.** Напомним, что *алгебра Стэнли-Райснера* – это $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная $\mathbf{k}$ алгебра

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] := \mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\left(\textstyle\prod_{i\in I} v_i : I \notin \mathcal{K}\right),\ \deg v_i = 2e_i.$$

Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ определим $\mathrm{supp}\,\alpha := \{j \in [m] : \alpha_j > 0\}$ и $v^\alpha := \prod_{j=1}^m v_j^{\alpha_j} \in \mathbf{k}[\mathcal{K}]$. Тогда $\{v^\alpha\}_{\mathrm{supp}\,\alpha\in\mathcal{K}}$ – аддитивный базис для $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$, и

$$v^\alpha\cdot v^\beta = \begin{cases} v^{\alpha+\beta}, & \mathrm{supp}\,\alpha\cup\mathrm{supp}\,\beta \in \mathcal{K};\\ 0, & \mathrm{supp}\,\alpha\cup\mathrm{supp}\,\beta \notin \mathcal{K}.\end{cases}$$

Рассмотрим также двойственную коалгебру $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle := \mathbf{k}[\mathcal{K}]^\#$ с двойственным базисом $\{\chi_\alpha\}_{\mathrm{supp}\,\alpha\in\mathcal{K}}$, $\chi_\alpha := (v^\alpha)^\#$, $\deg\chi_\alpha = 2\alpha$. Коумножение в $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ задано формулой

$$\Delta\chi_\alpha = \sum_{\alpha=\beta+\gamma} \chi_\beta\otimes\chi_\gamma,$$

где суммирование ведется по всем $\beta,\gamma \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. В частности,

$$\Delta\chi_{ii} = 1\otimes\chi_{ii} + \chi_i\otimes\chi_i + \chi_{ii}\otimes 1,\ i = 1,\dots,m;$$
$$\Delta\chi_{ij} = 1\otimes\chi_{ij} + \chi_i\otimes\chi_j + \chi_j\otimes\chi_i + \chi_{ij}\otimes 1,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}.$$

Нам понадобится следующее обозначение: $\mathbf{k}[\mathcal{K}]_{(s)}$ – это $\mathbf{k}$-подмодуль в $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ с аддитивным базисом

$$\{v^\alpha \in \mathbf{k}[\mathcal{K}] : |\alpha| = s\}.$$

Аналогично определим модули $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(s)}$. Например, $\chi_{ij} \in \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)}$, при том что $\deg\chi_{ij} = 2e_i + 2e_j$.

2.5. **Бар- и кобар-конструкции.** Мы следуем [Pr, §1]. Пусть A – связная $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная $\mathbf{k}$-алгебра с единицей, являющаяся свободным $\mathbf{k}$-модулем конечного типа. Пусть $I := \mathrm{Ker}(\varepsilon : A \to \mathbf{k}) = A_{>0} \subset A$ – аугментационный идеал. Также обозначим $\overline{a} := (-1)^{1+|a|}\cdot a$. Тогда, для градуированного левого A-модуля L и правого A-модуля R, *двусторонняя бар-конструкция* $\mathrm{B}(R,L) := R\otimes T(I)\otimes L$ – это $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный комплекс с градуировкой

$$\deg r[a_1|\dots|a_s]l := (s, |r| + \sum_{i=1}^s |a_i| + |l|)$$

и дифференциалом ∂ степени $(-1,0)$:

$$-\partial(r[a_1|\dots|a_s]l) := \overline{r}a_1[a_2|\dots|a_s]l + \sum_{i=1}^{s-1}\overline{r}[\overline{a}_1|\dots|\overline{a}_i a_{i+1}|\dots|a_s]l + \overline{a}[\overline{a}_1|\dots|\overline{a}_{s-1}]a_s l.$$

Хорошо известно, что $\mathrm{B}(A,L)$ – свободная резольвента левого A-модуля L. Поэтому модуль $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ может быть вычислен как когомологии комплекса

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{B}(A,\mathbf{k}),\mathbf{k}) \cong (\mathbf{k}\otimes_A \mathrm{B}(A,\mathbf{k}))^\# \cong \mathrm{B}(\mathbf{k},\mathbf{k})^\#$$

(мы используем *изоморфизм сопряжения* $\mathrm{Hom}_A(M,N^\#)\cong(N\otimes_A M)^\#$, который имеет место для левых A-модулей M,N, являющихся свободными $\mathbf{k}$-модулями конечного типа).

Этот комплекс совпадает с *кобар-конструкцией Адамса* $\Omega_* A^\#$ (см. [Ad]), где коалгебра $A^\# := \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(A,\mathbf{k})$ градуированно двойственна к A. Кобар-конструкция – это $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный $\mathbf{k}$-модуль $\Omega_* A^\# \cong T(I^\#)$ с градуировкой

$$\deg[x_1|\dots|x_s] := (-s, |x_1|+\dots+|x_s|)$$

и дифференциалом $\partial^\#$ степени $(-1,0)$: если $\Delta x_i = 1\otimes x_i + x_i\otimes 1 + \sum_r x'_{i,r}\otimes x''_{i,r}$, то

$$\partial^\#[x_1|\dots|x_s] = \sum_{i=1}^{s}\sum_r [\overline{x}_1|\dots|\overline{x}_{i-1}|\overline{x}'_{i,r}|x''_{i,r}|x_{i+1}|\dots|x_s].$$

Кобар-конструкция является дифференциальной градуированной алгеброй относительно

$$[x_1|\dots|x_s]\smile[y_1|\dots|y_t] := [x_1|\dots|x_s|y_1|\dots|y_t].$$

Поэтому $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный $\mathbf{k}$-модуль $H(\Omega_* A^\#)$ – ассоциативная алгебра.

Таким образом, мы получаем следующее:

Предложение 2.6. *Пусть $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей. Пусть A – связная $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная $\mathbf{k}$-алгебра с единицей, являющаяся свободным $\mathbf{k}$-модулем конечного типа. Тогда $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \cong H(\Omega_* A^\#)$ как $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированные $\mathbf{k}$-модули, и этот изоморфизм задает на $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ структуру связной градуированной ассоциативной алгебры.* $\square$

3. Алгебры Понтрягина пространств Дэвиса-Янушкевича

3.1. Доказательство Теоремы 1.1.

Напомним формулировку теоремы:

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс, $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированную $\mathbf{k}$-алгебру*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! := T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2=0,\ i=1,\dots,m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}),\ \deg|u_i| = (-1,2e_i).$$

Тогда

(a) *$H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ как градуированные алгебры;*

(b) *Имеет место вложение $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$.*

(c) *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$.*

Доказательство. (a) В [BP, Proposition 8.4.10] доказан изоморфизм градуированных $\mathbf{k}$-алгебр $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \cong H(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)$. С другой стороны, $H(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)\cong \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ по Предложению 2.6, так как $\mathbf{k}[\mathcal{K}] = (\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)^\#$ – свободный $\mathbf{k}$-модуль конечного типа.

(b) Следуя [Lö, Corollary 1.1], докажем, что $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ изоморфна “диагональной” подалгебре

$$D = \bigoplus_{i,\alpha:\ |\alpha|=i} \mathrm{Ext}^i_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2\alpha} \subset \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

Обозначим

$$D_0 = \bigoplus_{i,\alpha:\ |\alpha|=i} \Omega_{-i}\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{2\alpha} \subset \Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle.$$

По соображениям размерности, любой элемент D_0 имеет вид $[\chi_{j_1}|\dots|\chi_{j_s}]$, поэтому $D_0 \cong T(\chi_1,\dots,\chi_m)$.

Так как кобар-конструкция $(\Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\partial^\#)$ сосредоточена в размерностях

$$\{(-i,2\alpha):\ 0\leq i\leq|\alpha|\}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0},$$

а $\partial^\#$ имеет степень $(-1,0)$, получаем $D = D_0/(D_0\cap\mathrm{Im}\,\partial^\#)$. Заметим: из того, что D – алгебра, следует, что подмодуль $D_0\cap\mathrm{Im}\,\partial^\#\subset D_0$ – двусторонний идеал. Пусть теперь

$$\varphi^\# : \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)} \to \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}$$

– непримитивная часть коумножения в $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$. Так как $\varphi^{\#}(\chi_{ii}) = \chi_i \otimes \chi_i$ для любого $i = 1, \dots, m$ и $\varphi^{\#}(\chi_{ij}) = \chi_i \otimes \chi_j + \chi_j \otimes \chi_i$ для любых $\{i,j\} \in \mathcal{K}$, имеем $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \cong D_0/(\operatorname{Im}\varphi^{\#})$.

Наконец, покажем, что $D_0 \cap \operatorname{Im}\partial^{\#} = (\operatorname{Im}\varphi^{\#})$ как двусторонние идеалы в D_0. Пусть $f \in D_0 \cap \operatorname{Im}\partial^{\#}$. Так как $\partial^{\#}$ имеет степень $(-1,0)$, можно считать, что f однородный и имеет степень $(-i, 2\alpha)$, $|\alpha| = i$. Имеем $f = \partial^{\#} g$ для некоторого $\deg g = (-i+1, 2\alpha)$. Обозначим $V = \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}$ и $W = \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)}$. Из соображений размерности,

$$g \in \Omega_{-i+1}\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{2\alpha} = \bigoplus_{i=0}^{n-2} V^{\otimes i} \otimes W \otimes V^{\otimes(n-i-2)}.$$

Так как $\partial^{\#} V = 0$ и $\partial^{\#}|_W = \varphi^{\#}$, получаем

$$\partial^{\#} g \in \sum_{i=0}^{n-2} V^{\otimes i} \otimes \operatorname{Im}\varphi^{\#} \otimes V^{\otimes(n-i-2)} \subset D_0 \cdot \operatorname{Im}\varphi^{\#} \cdot D_0,$$

так что $D_0 \cap \operatorname{Im}\partial^{\#} \subset (\operatorname{Im}\varphi^{\#})$. Наоборот: ограничение $\partial^{\#}$ на $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)} \subset I^{\#} \subset \Omega_*\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ совпадает с $\varphi^{\#}$. Следовательно, $\operatorname{Im}\varphi^{\#} \subset D_0 \cap \operatorname{Im}\partial^{\#}$.

Итак,

$$\operatorname{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \supset D = D_0/(D_0 \cap \operatorname{Im}\partial^{\#}) = D_0/(\operatorname{Im}\varphi^{\#}) \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!.$$

(c) Если $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, то $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ – квадратичная алгебра:

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}] = T(v_1, \dots, v_m)/(v_i v_j = 0,\ \{i,j\} \notin \mathcal{K};\ v_i v_j = v_j v_i,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}).$$

Следовательно, $\mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ принадлежит к классу квадратичных алгебр, рассмотренных Фробергом в [Fr]: его переменные X_i и Y_i соответствуют нашим v_i и u_i.

Так как выполнено условие B' из [Fr, Lemma 4], существует свободная резольвента $(\mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!, d)$ для левого $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$-модуля $\mathbf{k}$:

$$\dots \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(2)} \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(1)} \xrightarrow{d} \mathbf{k}[\mathcal{K}] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!_{(0)} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \to 0. \tag{3.1}$$

Этот комплекс $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуирован:

$$\deg u_i = (-1, 2e_i), \quad \deg v_i = (0, 2e_i).$$

Тогда d имеет степень $(1,0)$, и $H^*((\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!)^{\#}_*, d^{\#}) \cong \operatorname{Ext}^*_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_*$. Из градуировки на $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ следует, что $\operatorname{Ext}^i_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2\alpha} = 0$ при $i \neq |\alpha|$. Следовательно, $\operatorname{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = D$. □

Замечание 3.2. Мы использовали результаты, сформулированные в [Fr, Lö, Pr] для алгебр над полем. Но аналогичные утверждения верны для произвольного кольца $\mathbf{k}$, если все $\mathbf{k}$-модули свободны и имеют конечный тип. Так, в доказательствах используется точность функтора $\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(-,\mathbf{k})$ для свободных $\mathbf{k}$-модулей и изоморфизмы сопряжения $M^{\#\#} \cong M$, $\operatorname{Hom}_A(M, N^{\#}) \cong (N \otimes_A M)^{\#}$, но не используется теорема об универсальных коэффициентах.

Замечание 3.3. Было бы интересно вывести (b) из (c) топологическими методами, используя флагификацию. Панов и Терио доказали в [PT], что у отображения $\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}} \to \Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}^f}$ есть правое гомотопически обратное. Переходя к гомологиям, получаем, что у отображения $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированных алгебр $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \to \mathbf{k}[\mathcal{K}^f]^! \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ есть $\mathbf{k}$-линейное сечение $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \hookrightarrow H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$. Однако неясно, мультипликативно ли сечение, и сохраняет ли оно $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировку.

Замечание 3.4. Как видно из (c), во флаговом случае алгебра $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ сосредоточена в размерностях $\{(-i, 2\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0} :\ 0 \leq i = |\alpha|\}$. Если $\mathcal{K}$ нефлаговый, то это неверно (можно лишь утверждать, что она сосредоточена в размерностях $\{(-i, 2\alpha) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0} :\ 0 \leq i \leq |\alpha|\}$).

Так, можно показать, что каждая недостающая грань $J \notin \mathcal{K}$ соответствует ненулевому элементу $\mu_J \in \operatorname{Ext}^2_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2J} \cong H_{-2,2J}(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$, который можно интерпретировать как "высшее коммутаторное произведение" $\mu_J = [\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_k}]$, $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ (см. [BP, Example 8.4.6].) Если $|J| \neq 2$, то μ_J не принадлежит "диагональной" подалгебре $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! \subset H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$.

3.2. **Формула Кюннета для алгебр Понтрягина.** Имеем расщепимое главное расслоение

$$\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{i} \Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}} \xrightarrow{p} \mathbb{T}^m$$

H-пространств (см. [BP, §8.4]) и, следовательно, точную последовательность алгебр Хопфа

$$1 \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \xrightarrow{i_*} H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \xrightarrow{p_*} \Lambda[u_1,\dots,u_m] \to 0.$$

В частности, i_* и p_* – гомоморфизмы $\mathbf{k}$-алгебр. Отображение $p:\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}} \to \mathbb{T}^m \simeq \Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^m$ индуцируется отображением симплициальных комплексов $\mathcal{K} \hookrightarrow \Delta^{m-1}$, поэтому элемент

$$u_i \in \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \cong H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$$

переходит в элемент

$$u_i \in \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = H_*(\mathbb{T}^m;\mathbf{k}) \cong \Lambda[u_1,\dots,u_m].$$

Пусть I – подмножество в $[m]$. Упорядочим его элементы: $I=\{i_1,\dots,i_k\}$, $i_1<\dots<i_k$, и обозначим

$$u_I := u_{i_1}\wedge\dots\wedge u_{i_k} \in \Lambda[u_1,\dots,u_m], \quad \widehat{u}_I := u_{i_1}\cdot\ldots\cdot u_{i_k} \in H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}).$$

Ясно, что $\{u_I\}_{I\subset[m]}$ – аддитивный базис для $\Lambda[u_1,\dots,u_m]$. Морфизм p_* имеет $\mathbf{k}$-линейное сечение $\sigma:\Lambda[u_1,\dots,u_m]\to H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$, заданное на базисе как $\sigma(u_I):=\widehat{u}_I$. Если $\mathrm{sk}_1\mathcal{K}\neq \mathrm{sk}_1\Delta^{m-1}$, то это сечение не мультипликативно.

Морфизм i_* задает на $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ структуру левого $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля: $x\cdot y := i_*(x)y$. Рассмотрим $\mathbf{k}$-линейное отображение

$$T: H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m] \to H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}), \quad T(x\otimes u_I) := i_*(x)\widehat{u}_I.$$

Предложение 3.5. *T является изоморфизмом левых $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модулей. Кроме того, коммутативна следующая диаграмма $\mathbf{k}$-модулей:*

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m] \arrow[r, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "T"', "\cong"] & \mathbf{k}\otimes\Lambda[u_1,\dots,u_m] \arrow[d, "\lambda\otimes u_I\mapsto\lambda u_I"', "\cong"] \\
H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) \arrow[r, "p_*"] & \Lambda[u_1,\dots,u_m]
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $x_1,x_2\in H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ и $I\subset[m]$. Имеем:

$$T(x_1\cdot(x_2\otimes u_I)) = T(x_1x_2\otimes u_I) = i_*(x_1x_2)\widehat{u}_I = i_*(x_1)i_*(x_2)\widehat{u}_I = i_*(x_1)T(x_2\otimes u_I) = x_1\cdot T(x_2\otimes u_I).$$

Следовательно, T – $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-линейное отображение.

$\Lambda[u_1,\dots,u_m]$ – свободный $\mathbf{k}$-модуль. Расслоение p тривиально, и σ – сечение гоморфизма p_*. По формуле Кюннета получаем, что отображение T – изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей. Так как оно $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-линейно, это изоморфизм $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модулей.

Наконец, проверим коммутативность диаграммы (3.2):

$$\begin{tikzcd}
x\otimes u_I \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varepsilon(x)\otimes u_I \arrow[d, mapsto] \\
i_*(x)\widehat{u}_I \arrow[r, mapsto] & p_*(i_*(x))u_I
\end{tikzcd}$$

Так как $p\circ i$ гомотопически тривиально, имеем $p_*\circ i_* = \varepsilon$. $\square$

4. Соотношения в алгебрах Понтрягина во флаговом случае

В этом разделе рассматриваются цепные комплексы свободных левых модулей над $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ и $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$. Эти алгебры $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы, поэтому комплексы $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы: $\deg H_{-i,2\alpha}(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}) = (0,-i,2\alpha)$, и дифференциалы обычно имеют степень $(-1,0,0)$.

4.1. **Минимальная резольвента $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$.** Пусть $0\neq\chi_\alpha\in\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$, так что $\operatorname{supp}\alpha\in\mathcal{K}$. Заметим, что $\operatorname{supp}(\alpha-e_j)\in\mathcal{K}$ для любого $j\in\operatorname{supp}\alpha$. Поэтому корректно определен элемент $\chi_{\alpha-e_j}\in\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$. В этом разделе мы полагаем

$$\deg\chi_\alpha:=(|\alpha|,-|\alpha|,2\alpha)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}.$$

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда левый $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуль $\mathbf{k}$ имеет минимальную резольвенту*

$$\text{(4.1)}\quad \ldots\xrightarrow{d}H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(2)}\xrightarrow{d}H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(1)}\xrightarrow{d}$$
$$\xrightarrow{d}H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(0)}\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{k}\to 0$$

со следующим дифференциалом степени $(-1,0,0)$:

$$\text{(4.2)}\qquad d:\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)}\to H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t-1)},\quad \chi_\alpha\mapsto\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}u_j\otimes\chi_{\alpha-e_j}.$$

Доказательство. По Теореме 3.1, во флаговом случае верно $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\cong\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$. Мы воспользуемся резольвентой Фроберга [Fr] для алгебры $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. В этот раз переменные u_i и v_i соответствуют X_i и Y_i. Определение функции $\operatorname{Index}(m)$ (см. [Fr, p. 32]) симметрично, поэтому существует резольвента $(\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],\ d_1+\cdots+d_m)$ для левого $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$-модуля $\mathbf{k}$.

Опишем дифференциалы Фроберга $d_1,\ldots,d_m$ явно. Пусть $x=u^{(\mu)}\otimes v^{(\nu)}\in\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ – произвольный моном. Элемент $d_j(x)$ определяется следующим образом:

- Если x не представим в виде $c\cdot u^{(\mu)}\otimes v_jv^{(\nu')}$, то $d_j(x):=0$;
- Если $x=c\cdot u^{(\mu)}\otimes v_jv^{(\nu')}$, то $d_j(x):=c\cdot u^{(\mu)}u_j\otimes v^{(\nu')}$.

Алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ коммутативна, и любой моном $v^{(\nu)}\neq 0$ однозначно представим в виде v^α, $\operatorname{supp}\alpha\in\mathcal{K}$. Поэтому

$$d_j(u^{(\mu)}\otimes v^\alpha)=\begin{cases}0, & j\notin\operatorname{supp}\alpha;\\ u^{(\mu)}u_j\otimes v^{\alpha-e_j}, & j\in\operatorname{supp}\alpha;\end{cases}$$

$$d(u^{(\mu)}\otimes v^\alpha)=\sum_{j=1}^m d_j(u^{(\mu)}\otimes v^\alpha)=\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}u^{(\mu)}u_j\otimes v^{\alpha-e_j}.$$

Заменяя $v^\alpha\in\mathbf{k}[\mathcal{K}]_{(|\alpha|)}$ на $\chi_\alpha\in\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(|\alpha|)}$, мы получаем в точности дифференциал (4.2). □

4.2. **Свободная резольвента $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$.** По Предложению 3.5, имеем изоморфизм $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированных левых $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модулей:

$$T:H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\Lambda[m]\to H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k}),\quad a\otimes u_I\mapsto i_*(a)\widehat{u}_I.$$

Рассмотрим $\mathbf{k}$-модули $M_t:=\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)}$. Они $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы:

$$\deg u_I\otimes\chi_\alpha=\deg u_I+\deg\chi_\alpha=(0+|\alpha|,-|I|-|\alpha|,2I+2\alpha)=(t,-|I|-t,2I+2\alpha).$$

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда левый $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуль $\mathbf{k}$ имеет свободную резольвенту*

$$\text{(4.3)}\qquad\cdots\to H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes M_2\xrightarrow{\widehat{d}}H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes M_1\xrightarrow{\widehat{d}}H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes M_0\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{k}\to 0$$

со следующим дифференциалом степени $(-1,0,0)$:

$$\text{(4.4)}\qquad\widehat{d}:M_t\to\Big(H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\underbrace{\Lambda[m]\Big)\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t-1)}}_{=M_{t-1}},\quad u_I\otimes\chi_\alpha\mapsto\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j)\otimes\chi_{\alpha-e_j}.$$

Доказательство. Цепной комплекс (4.1) – свободная резольвента левого $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$. Алгебра $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ сама является левым модулем над $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$. Следовательно, (4.1) – свободная резольвента левого $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$.

Рассмотрим цепочку изоморфизмов $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$-модулей:

$$H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes M_t=\!=\!=H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)}\xrightarrow{T\otimes\mathrm{id}}H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^{\mathcal{K}};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)}.$$

Мы докажем, что она задает изоморфизм между цепными комплексами (4.3) и (4.1):

$$(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes M,\widehat{d}) \xrightarrow{T\otimes\mathrm{id}} (H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,d).$$

Достаточно показать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes M_t \arrow[r, "\widehat{d}"] \arrow[d, "T\otimes\mathrm{id}"', "\cong"] & H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes M_{t-1} \arrow[d, "T\otimes\mathrm{id}"', "\cong"] \\
H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)} \arrow[r, "d"] & H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t-1)}
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Для произвольных $x\in H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ и $u_I\otimes\chi_\alpha\in\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle_{(t)}=M_t$ имеем

$$\begin{tikzcd}
x\otimes(u_I\otimes\chi_\alpha) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha} xT^{-1}(\widehat{u}_Iu_j)\otimes\chi_{\alpha-e_j} \\
i_*(x)\widehat{u}_I\otimes\chi_\alpha \arrow[r, mapsto] & \sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha} i_*(x)\widehat{u}_Iu_j\otimes\chi_{\alpha-e_j}.
\end{tikzcd}$$

Но $T(xT^{-1}(\widehat{u}_Iu_j))=i_*(x)T(T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j))=i_*(x)\widehat{u}_Iu_j$, так как T – $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$-линейное отображение, а алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ действует на $H_*(\Omega(\mathbb{C}\mathrm{P}^\infty)^\mathcal{K};\mathbf{k})$ за счет гомоморфизма i_*. □

Замечание 4.3. С помощью резольвенты (4.3) можно получить копредставление алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$. Однако для явного описания T^{-1} требуется нетривиальное коммутаторное исчисление. Также, чтобы получить копредставление с помощью Предложения 2.4(b), нужна резольвента вида $\dots\to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\to\mathbf{k}\to 0$, а не

$$\dots\to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\Lambda[m]\to\mathbf{k}\to 0.$$

4.3. Доказательства Теоремы 1.2 и Следствия 1.3.

Предложение 4.4. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый комплекс. Тогда* $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\simeq H(M,\overline{d})$, *где*

$$\overline{d}:M_t\to M_{t-1},\quad u_I\otimes\chi_\alpha\mapsto\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}(u_I\wedge u_j)\otimes\chi_{\alpha-e_j}.$$

Доказательство. Применив функтор $\mathbf{k}\otimes_{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(-)$ к резольвенте (4.3), получаем дифференциал $M_t\to M_{t-1}$,

$$u_I\otimes\chi_\alpha\mapsto((\varepsilon\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})\left(\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j)\otimes\chi_{\alpha-e_j}\right)=\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j))\otimes\chi_{\alpha-e_j}.$$

Гомологии этого комплекса изоморфны $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ по определению.

Из (3.2) следует, что $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j))=p_*(\widehat{u}_Iu_j)=u_I\wedge u_j$. Поэтому

$$\sum_{j\in\operatorname{supp}\alpha}(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(T^{-1}(\widehat{u}_Iu_j))\otimes\chi_{\alpha-e_j}=\overline{d}(u_I\otimes\chi_\alpha).$$ □

Теорема 4.5. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей. Тогда*

$$\mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Этот изоморфизм $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуирован в следующем смысле:

$$\mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Доказательство. Сначала рассмотрим *алгебру Кошуля* кольца Стэнли-Райснера. Это следующая $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m$-градуированная алгебра, снабженная дифференциалом степени $(1,0,0)$:

$$(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],d),\ \deg u_i=(0,-1,2e_i),\ \deg v_i=(1,-1,2e_i);\ du_i=v_i,\ dv_i=0.$$

Дифференциал продолжается на аддитивный базис по правилу Лейбница: $d=\sum_{i=1}^m\frac{\partial}{\partial u_i}\otimes v_i$.

Рассмотрим теперь двойственную коалгебру $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\delta)$, где $\delta=\sum_{i=1}^m u_i\otimes\frac{\partial}{\partial\chi_i}$. Этот дифференциал совпадает с $\overline{d}$. То есть $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ – это гомологии комплекса, двойственного к алгебре Кошуля.

Напомним, как вычисляются когомологии алгебры Кошуля. По [BP, Lemma 3.2.6], факторизация по однородному ацикличному идеалу (u_iv_i,v_i^2) задает квази-изоморфизм

$$(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],d)\to(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],d)/(u_iv_i=v_i^2=0)=:R(\mathcal{K}).$$

В доказательстве [BP, Theorem 3.2.9] построен изоморфизм цепных комплексов

$$\widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\xrightarrow{\cong}R^{*+1,-|J|,2J}(\mathcal{K}),\ \ I\mapsto\pm u_{J\setminus I}\otimes v^I$$

для всех $J\subset[m]$. Кроме того, прямая сумма задает изоморфизм комплексов

$$\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\xrightarrow{\cong}R(\mathcal{K}).$$

Переходя к $\mathbf{k}$-двойственным комплексам и затем к гомологиям, получаем изоморфизмы

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong H_n(R^{*+1,-|J|,2J}(\mathcal{K})^\#)\xrightarrow{\cong}\widetilde{H}_n(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Их прямая сумма – искомый изоморфизм

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_n(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).\qquad\square$$

Для краткости, обозначим минимальное число образующих $\mathbf{k}$-модуля M как $\dim M$.

Следствие 4.6. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, $\mathbf{k}$ – коммутативное кольцо с единицей.*

(a) *Если $\mathbf{k}$ – кольцо главных идеалов, то любое копредставление алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ содержит хотя бы $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ образующих и $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ соотношений;*

(b) *Если $\mathbf{k}=\mathbb{F}$ – поле, то минимальное копредставление содержит ровно $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$ образующих и $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$ соотношений.*

Доказательство. (a) Следует из Теоремы 4.5 и Предложения 2.5.

(b) Следует из Теоремы 4.5 и Предложения 2.4(b). $\square$

Замечание 4.7. Алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуирована, поэтому $\mathbb{F}$-модули $\mathrm{Tor}_i^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F})$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированы. Следовательно, $\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$ соотношений в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$, соответствующие подмножеству $J\subset[m]$, имеют степень $(-|J|,2J)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Аналогично, если $\mathbf{k}$ – кольцо главных идеалов, то в любом копредставлении алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ есть хотя бы $\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ соотношений степени $(-|J|,2J)$.

Заметим, что $\dim\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ зависит от $\mathbf{k}$, поэтому число соотношений в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ тоже зависит. Например, пусть $\mathcal{K}$ – флаговая триангуляция $\mathbb{R}P^2$. Тогда в градуированной компоненте степени $(-m,2[m])$ имеем

- хотя бы одно соотношение в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Z})$;
- ровно одно соотношение в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Z}/2)$;
- ни одного соотношения в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$, если $\mathrm{char}\,\mathbb{F}\neq 2$.

Естественно ожидать следующее: в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ есть такое соотношение $r=0$ степени $(-m,2[m])$, что $2r=0$ следует из соотношений, имеющих меньшую степень.

Замечание 4.8. Недавно Ли Цай [Ca] получил метод, который строит по подмножеству $J\subset[m]$ и по *замкнутому симплициальному пути* в $\mathcal{K}_J$ соотношение в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ степени $(-|J|,2J)$. Мы ожидаем, что

- это соотношение зависит только от гомотопического класса этого пути (в классе свободных замкнутых путей);
- если взять замкнутые симплициальные пути, порождающие фундаментальные группы всех связных компонент всех полных подкомплексов, то соответствующий набор соотношений будет достаточным.

Ожидания основаны на следующих соображениях. Над полем, “модуль минимальных соотношений” в $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ изоморфен $\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$. Но первые гомологии $\mathcal{K}_J$ порождаются образами замкнутых путей, порождающих фундаментальные группы связных компонент, под действием гомоморфизма Гуревича.

Другим аргументом является аналогия между копредставлениями алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ и группы $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ (см. [ПВ, GIPS]). Как показал Цай, аналогичный набор соотношений в $\pi_1(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ является достаточным (это следует из теоремы ван Кампена).

4.4. Мультиградуированные ряды Пуанкаре алгебр Понтрягина и суперaлгебр Ли.

Теорема 4.9. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, $\mathbb{F}$ – поле. Тогда*

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});t,\lambda)}=-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)t^{-|J|}\lambda^{2J}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Из Теоремы 4.5 следует, что

$$F\left(\operatorname{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F});t,\lambda\right)=\sum_{J\subset[m]}\dim_\mathbb{F}\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})t^{-|J|}\lambda^{2J}.$$

По Предложению 2.4(c),

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});\lambda)}=\sum_{n=0}^\infty(-1)^nF\left(\operatorname{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F});t,\lambda\right)=$$

$$=\sum_{J\subset[m]}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\dim_\mathbb{F}\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J)t^{-|J|}\lambda^{2J}=-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)t^{-|J|}\lambda^{2J}. \qquad \square$$

Замечание 4.10. Пусть $n=\dim\mathcal{K}$. h-*числа* комплекса $\mathcal{K}$ определяются равенством

$$\sum_{i=0}^n h_is^{n-i}=\sum_{I\in\mathcal{K}}(s-1)^{n-|I|}.$$

Следующая формула для $\mathbb{Z}$-градуированного ряда Пуанкаре алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})$ следует из результатов Панова и Рэя [PR], см. [BP, Proposition 8.5.4]:

$$\frac{1}{F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F});t)}=(1+t)^{m-n}\sum_{i=0}^n h_i\cdot(-t)^i.$$

Приведем набросок доказательства того, что эта формула согласуется с (4.5) при $t=\lambda_1=\dots=\lambda_m$. Надо проверить тождество

$$(1+t)^{m-n}\sum_{i=0}^n h_i\cdot(-t)^i=-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)t^{|J|}. \tag{4.6}$$

Подставив $s=-1/t$ в определение h-чисел, получаем

$$(1+t)^{-n}\sum_{i=0}^n h_i\cdot(-t)^i=\sum_{I\in\mathcal{K}}(-t)^{|I|}(1+t)^{-|I|}.$$

С другой стороны, $-\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)=\sum_{I\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|I|}$ за счет симплициальных гомологий. Поэтому (4.6) равносильно следующему тождеству, которое легко проверяется изменением порядка суммирования:

$$\sum_{J\subset[m]}\sum_{I\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|I|}t^{|J|}=\sum_{I\in\mathcal{K}}(-1)^{|I|}\cdot t^{|I|}(1+t)^{m-|I|}. \quad \square$$

По теореме Милнора-Мура [MM], алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q})$ является универсальной обертывающей для градуированной суперaлгебры Ли $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$. Поэтому $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$ снабжается $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$-градуировкой:

$$\pi_n(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}=\bigoplus_{n=-i+2|\alpha|}(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-i,2\alpha},\quad(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-i,2\alpha}\subset H_{-i,2\alpha}(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q}).$$

Замечание 4.11. Возникает вопрос:

- Есть ли естественная $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировка на $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})$?

Если $\mathcal{K}$ флаговый, то, возможно, такую градуировку можно ввести с помощью гомотопического разложения $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ из [PT, Corollary 7.3]. Это мотивировано таким рассуждением: по [PT, Theorem 1.1], $\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ является гомотопическим ретрактом $\Omega\mathcal{Z}_{\overline{\mathcal{K}}}$, где $\overline{\mathcal{K}}$ – несвязное объединение m точек. Но $\mathcal{Z}_{\overline{\mathcal{K}}}$ – букет сфер, и в этом случае мультиградуировка на гомотопических группах предоставляется теоремой Хилтона-Милнора (см. доказательство [GPTW, Theorem 5.3(c)]). Однако, как и в Замечании 3.3, нам неизвестно, сохраняет ли мультиградуировку гомотопическое сечение, построенное в [PT].

Теперь применим Теорему 4.9 для вычисления мультиградуированного ряда Пуанкаре для $\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$ во флаговом случае. Пусть L – связная $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная супералгебра Ли, а $U(L)$ – ее универсальная обертывающая. Предполагается, что первая градуировка всегда неотрицательна или неположительна, поэтому можно делить на формальные степенные ряды и извлекать логарифмы. Зададим коэффициенты $l_{i,\alpha}$ и $u_{j,\beta}$ с помощью тождеств

$$F(L;t,\lambda)=\sum_{i,\alpha} l_{i,\alpha}t^i\lambda^\alpha,\quad \ln F(U(L);t,\lambda)=\sum_{j,\beta}u_{j,\beta}t^j\lambda^\beta.$$

Также обозначим

$$F(L;-t,-\lambda)=\sum_{i,\alpha}\widetilde{l}_{i,\alpha}t^i\lambda^\alpha,\quad \ln F(U(L);-t,-\lambda)=\sum_{j,\beta}\widetilde{u}_{j,\beta}t^j\lambda^\beta.$$

Ясно, что $\widetilde{l}_{i,\alpha}=(-1)^{i+|\alpha|}l_{i,\alpha}$, $\widetilde{u}_{j,\beta}=(-1)^{j+|\beta|}u_{j,\beta}$.

Лемма 4.12. *Ряды Пуанкаре обладают следующими свойствами:*

(1) $F(V_1\oplus V_2;t,\lambda)=F(V_1;t,\lambda)+F(V_2;t,\lambda)$;
(2) $F(V_1\otimes V_2;t,\lambda)=F(V_1;t,\lambda)\cdot F(V_2;t,\lambda)$.

Доказательство. Если $\{v_i\}_{i\in I}$ – базис векторного пространства V и $\deg v_i=(a_i,b_i)$, то $F(V;t,\lambda)=\sum_{i\in I}t^{a_i}\lambda^{b_i}$.

(1) Базис прямой суммы – это объединение базисов.
(2) Базис тензорного произведения – это множество попарных тензорных произведений базисных векторов. □

Теорема 4.13 ([MM])**.**

$$F(U(L);t,\lambda)=\prod_{i,\alpha}(1-(-t)^i(-\lambda)^\alpha)^{(-1)^{i+|\alpha|+1}l_{i,\alpha}}.$$

Доказательство. Из теоремы Пуанкаре-Биркгоффа-Витта следует: если $\{x_{i,\alpha}\}$ – однородный аддитивный базис для L, то $U(L)$ изоморфна, как градуированное векторное пространство, свободной градуированно-коммутативной алгебре, порожденной $\{x_{i,\alpha}\}$. Следовательно, каждое слагаемое $t^i\lambda^\alpha$ в $F(L;t,\lambda)$ соответствует множителю

$$\begin{cases}F(\Lambda[x_{i,\alpha}];\lambda), & i+|\alpha|\text{ нечетно}\\ F(\mathbb{F}[x_{i,\alpha}];\lambda), & i+|\alpha|\text{ четно}\end{cases}=\begin{cases}1+t^i\lambda^\alpha, & i+|\alpha|\text{ нечетно,}\\ \frac{1}{1-t^i\lambda^\alpha}, & i+|\alpha|\text{ четно}\end{cases}=(1-(-1)^{i+|\alpha|}t^i\lambda^\alpha)^{(-1)^{i+|\alpha|+1}}$$

в $F(U(L);t,\lambda)$. □

Лемма 4.14. $\widetilde{l}_{i,\alpha}=\sum_{k|i,\alpha}\widetilde{u}_{i/k,\alpha/k}\dfrac{\mu(k)}{k}$, *где* $\sum_{k|i,\alpha}$ *обозначает суммирование по всем натуральным* k, *делящим* $i,\alpha_1,\dots,\alpha_m$, *а* $\mu(n)$ *– функция Мёбиуса.*

Доказательство. По Теореме 4.13, $F(U(L);-t,-\lambda)=\prod_{i,\alpha}(1-t^i\lambda^\alpha)^{-\widetilde{l}_{i,\alpha}}$. Поэтому

$$\sum_{j,\beta}\widetilde{u}_{j,\beta}t^j\lambda^\beta=-\sum_{i,\alpha}\widetilde{l}_{i,\alpha}\ln(1-t^i\lambda^\alpha)=\sum_{i,\alpha}\widetilde{l}_{i,\alpha}\sum_{k=1}^\infty\frac{t^{ik}\lambda^{k\alpha}}{k}=\sum_{j,\beta}\sum_{k|j,\beta}\widetilde{l}_{j/k,\beta/k}\frac{t^j\lambda^\beta}{k}.$$

Таким образом, $\widetilde{u}_{j,\beta}=\sum_{k|j,\beta}\widetilde{l}_{j/k,\beta/k}\cdot\frac{1}{k}$. Искомое тождество получается применением ($\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированной) формулы обращения Мёбиуса. □

Теорема 4.15. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Рассмотрим $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный формальный степенной ряд*
$$\sum_{\beta} w_\beta \lambda^\beta = -\ln\left(-\sum_{J\subset[m]} \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)(-\lambda)^J\right).$$
Тогда для всех $\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ верно
$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha} = (-1)^{|\alpha|}\sum_{k|\alpha}\frac{\mu(k)}{k}w_{\alpha/k}.$$
В остальных случаях $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{i,\beta}=0$.

Доказательство. Пусть $L=\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}$, так что $U(L)=H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q})$ по теореме Милнора-Мура. Из Теоремы 4.9 имеем
$$\sum_{i,\beta}\widetilde{u}_{i,\beta}t^i\lambda^\beta = -\ln\left(-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)(-t)^{-|J|}\lambda^{2J}\right) = -\ln\left(-\sum_{J\subset[m]}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)(-\lambda^2/t)^J\right) = \sum_\alpha w_\alpha t^{-|\alpha|}\lambda^{2\alpha}.$$
Поэтому $\widetilde{u}_{-|\alpha|,2\alpha}=w_\alpha$, а в остальных случаях $\widetilde{u}_{i,\beta}=0$. По Лемме 4.14,
$$\widetilde{l}_{-|\alpha|,2\alpha} = \sum_{k|-|\alpha|,2\alpha}\widetilde{u}_{-|\alpha|/k,2\alpha/k}\frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k|\alpha}w_{\alpha/k}\frac{\mu(k)}{k},$$
и иначе $\widetilde{l}_{i,\beta}=0$. Наконец, $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha}=l_{-|\alpha|,2\alpha}=(-1)^{|\alpha|}\widetilde{l}_{-|\alpha|,2\alpha}$. □

Замечание 4.16. Числа $l_n:=\dim\pi_{n+1}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}=\dim\pi_n(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q}=\sum_{|\alpha|=n}l_{-|\alpha|,2\alpha}$ для флаговых комплексов $\mathcal{K}$ впервые были описаны Дэнемом и Суциу [DS, Theorem 4.2.1]. Они рассуждали похожим образом: $\mathbb{Z}$-градуированная версия Теоремы 4.13 дает
$$F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q});t)=\prod_{r\geq 1}\frac{(1+t^{2r-1})^{l_{2r}}}{(1-t^{2r})^{l_{2r+1}}}.$$
Затем используется *формула Лёфволла*, связывающая $F(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q});t)$ с биградуированным рядом Пуанкаре для $H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Q})$. Иногда этот подход упрощает вычисления, как в [DS, Example 7.2.1], но в общем случае формула из Теоремы 4.15 более явная. Также она дает ответ с учетом мультиградуировки.

Замечание 4.17. В работе [Us] Устиновский интерпретировал *неотрицательность* чисел $l_n=\dim(\pi_n(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})$ как полиномиальные неравенства, которым должны удовлетворять h-числа комплекса $\mathcal{K}$ во флаговом случае (h-числа появляются как коэффициенты в формуле Панова-Рэя).

Аналогичо, в мультиградуированном случае мы можем интерпретировать неотрицательность чисел $l_{-|\alpha|,2\alpha}=\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha}$ как полиномиальные неравенства на приведенные эйлеровы характеристики полных подкомплексов в $\mathcal{K}$. Из этих неравенств следуют неравенства Устиновского, так как $l_n=\sum_{|\alpha|=n}l_{-|\alpha|,2\alpha}$. Однако их комбинаторная интерпретация менее ясна. В частности, в мультиградуированном случае логарифм формального степенного ряда не выражается через многочлены Ньютона, как в [Us, Lemma 1.4].

Пример 4.18. Рассмотрим неравенство $\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha}\geq 0$ при $\alpha=[m]=\sum_{i=1}^m e_i\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. В этом случае $k|\alpha$ только при $k=1$. По Теореме 4.15,
$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-m,2[m]}=(-1)^m w_{[m]},\quad \sum_\beta w_\beta\lambda^\beta=-\ln\left(1-\sum_{\substack{J\subset[m],\\ J\neq\varnothing}}(-1)^{|J|}\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_J)\lambda^J\right).$$
Раскрывая правую часть по формуле $-\ln(1-t)=\sum_{N\geq 1}t^N/N$ и смотря на коэффициент при $\lambda^{[m]}$, мы получаем следующее неравенство: для любого флагового комплекса $\mathcal{K}$
$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})\otimes\mathbb{Q})_{-m,2[m]}=\sum_{N\geq 1}\frac{1}{N}\sum_{[m]=J_1\sqcup\dots\sqcup J_N}^{J_i\neq\varnothing}\prod_{i=1}^N\widetilde{\chi}(\mathcal{K}_{J_i})\geq 0. \tag{4.7}$$

Здесь набор подмножеств $J_1, \dots, J_N$ упорядочен, поэтому каждое разбиение $\{J_1, \dots, J_N\}$ множества $[m]$ учитывается в сумме ровно $N!$ раз.

Если $\gcd(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = 1$, то аналогичные вычисления дают неравенство

$$\dim(\pi_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \otimes \mathbb{Q})_{-|\alpha|,2\alpha} = \sum_{N\ge1} \frac{1}{N} \sum_{\alpha=J_1+\dots+J_N}^{J_i\ne\varnothing} \prod_{i=1}^{N} \widetilde{\chi}(\mathcal{K}_{J_i}) \ge 0.$$

5. LS-категория момент-угол комплексов во флаговом случае

Пусть X – топологическое пространство. Его *LS-категория* $\operatorname{cat}(X)$ – это наименьшее целое n, такое что найдется открытое покрытие $X = U_0 \cup \dots \cup U_n$, в котором каждое из вложений $U_i \hookrightarrow X$ гомотопно тривиальному отображению.

Замечание 5.1. В ранних источниках, таких как [Gi], покрытие обозначалось как $U_1 \cup \dots \cup U_n$. Поэтому значение $\operatorname{cat}(X)$ было сдвинуто на 1. В остальных работах, на которые мы ссылаемся, используется современное соглашение.

Нижние и верхние оценки на $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ получены в работе [BG]. Мы воспользуемся следующим результатом:

Предложение 5.2 ([BG, Corollary 3.13])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс без призрачных вершин. Тогда* $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \le \operatorname{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K})$. □

5.1. LS-категория вещественных момент-угол комплексов во флаговом случае.

Для флаговых комплексов вычисление $\operatorname{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K})$ сводится к проблеме из теории групп, решенной Дранишниковым [Dr].

Теорема 5.3 (см. [ПВ])**.** *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то $\mathcal{R}_\mathcal{K} = B(\mathrm{RC}'_\mathcal{K})$, где $\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$ – коммутант прямоугольной группы Кокстера $\mathrm{RC}_\mathcal{K}$.* □

Когомологическая размерность $\operatorname{cdim}_\mathbf{k} X$ топологического пространства X над кольцом $\mathbf{k}$ – это наименьшее целое n, такое что $\widetilde{H}^i(X; \mathbf{k}) = 0$ для всех $i > n$. Аналогично, *гомологическая размерность* $\operatorname{hdim}_\mathbf{k} X$ – это наименьшее n, такое что $\widetilde{H}_i(X; \mathbf{k}) = 0$ для всех $i > n$.

Когомологическая размерность $\operatorname{cd} G$ дискретной группы G – это наименьшее целое n, такое что $H^i(G; M) = 0$ для всех $i > n$ и всех $\mathbb{Z}[G]$-модулей M.

Чтобы покрыть вырожденные случаи, положим $\operatorname{cdim}_\mathbf{k} \mathrm{pt} := -1$ и $\operatorname{cd} 1 := 0$. Заметим, что $\operatorname{cdim}_\mathbf{k} \varnothing := -1$.

Теорема 5.4. $\operatorname{cd} G = \operatorname{cat}(BG)$ *для любой дискретной группы* G.

Доказательство. По теореме Эйленберга-Ганеа [EG], неравенство $\operatorname{cd} G \ne \operatorname{cat}(BG)$ возможно только в случае $\operatorname{cd} G = 1$. Но в этом случае G свободна по теореме Столлингса-Свана [Sw]. Тогда BG – букет окружностей, поэтому $\operatorname{cat}(BG) = 1$. □

Предложение 5.5 ([Br, Proposition VIII.2.2])**.** $\operatorname{cdim}_\mathbb{Z} BG \le \operatorname{cd} G \le \dim BG$. □

Следствие 5.6. *Если $\mathcal{K}$ флаговый, то* $\operatorname{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{R}_\mathcal{K} \le \operatorname{cd} \mathrm{RC}'_\mathcal{K} = \operatorname{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K}) \le \dim \mathcal{R}_\mathcal{K}$. □

Предложение 5.7. *Если $\mathcal{K} \ne \Delta^{m-1}$, то* $\operatorname{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{R}_\mathcal{K} = 1 + \max_{J\subset[m]} \operatorname{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J$.

Доказательство. По Теореме 2.2, $H^n(\mathcal{R}_\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}^{n-1}(\mathcal{K}_J; \mathbb{Z})$. Так как $\mathcal{K} \ne \Delta^{m-1}$, в $\mathcal{K}$ найдется несвязный полный подкомплекс; поэтому $H^1(\mathcal{R}_\mathcal{K}; \mathbb{Z}) \ne 0$. Значит, $\operatorname{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{R}_\mathcal{K} > 0$, а при $n > 0$ имеем $H^n(\mathcal{R}_\mathcal{K}; \mathbb{Z}) = \widetilde{H}^n(\mathcal{R}_\mathcal{K}; \mathbb{Z})$. □

Напомним понятие *виртуальной когомологической размерности* дискретной группы G : если $G_1 \subset G$ – подгруппа конечного индекса, такая что $\operatorname{cd} G_1 < \infty$, то $\operatorname{vcd} G := \operatorname{cd} G_1$. Согласно результату Серра (см. [Br, §VIII.11]), это число не зависит от выбора G_1.

Предложение 5.8 (cf. [Dr, p. 142])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

$$\operatorname{cd} \mathrm{RC}'_\mathcal{K} = 1 + \max_{I\in\mathcal{K}} \operatorname{cdim}_\mathbb{Z} \operatorname{lk}_\mathcal{K} I.$$

Доказательство. Имеем $\operatorname{vcd}\mathrm{RC}_\mathcal{K} = \operatorname{cd}\mathrm{RC}'_\mathcal{K}$, так как $[\mathrm{RC}_\mathcal{K} : \mathrm{RC}'_\mathcal{K}] = |\mathbb{Z}_2^m| < \infty$ и $\operatorname{cd}\mathrm{RC}'_\mathcal{K} \leq \dim\mathcal{R}_\mathcal{K} < \infty$. В [Dr] Дранишников получил следующую формулу:

$$\operatorname{vcd}\mathrm{RC}_\mathcal{K} = \max(\operatorname{lcd}(\mathcal{K}), 1 + \operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}),\ \text{где } \operatorname{lcd}(\mathcal{K}) := 1 + \max_{I\in\mathcal{K}, I\neq\varnothing} \operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\operatorname{lk}_\mathcal{K} I$$

(в обозначениях [Dr], пустое множество не является симплексом). Осталось заметить, что $\operatorname{lk}_\mathcal{K}\varnothing = \mathcal{K}$. □

Предложение 5.9. *Для любого флагового комплекса* $\mathcal{K} \neq \Delta^{m-1}$ *имеем* $\operatorname{cd}\mathrm{RC}'_\mathcal{K} = \operatorname{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = \operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{R}_\mathcal{K} = 1 + \max_{J\subset[m]}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}_J$.

Доказательство. По Следствию 5.6, Предложению 5.8, Лемме 2.1 и Предложению 5.7,

$$\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{R}_\mathcal{K} \leq \operatorname{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = \operatorname{cd}\mathrm{RC}'_\mathcal{K} = 1 + \max_{I\in\mathcal{K}}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\operatorname{lk}_\mathcal{K} I \leq 1 + \max_{J\subset[m]}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}_J = \operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{R}_\mathcal{K}.\quad\square$$

Замечание 5.10. Таким образом,

$$\max_{I\in\mathcal{K}}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\operatorname{lk}_\mathcal{K} I = \max_{J\subset[m]}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}_J$$

для флаговых $\mathcal{K}$. На самом деле это тождество выполнено для всех симплициальных комплексов. Его можно получить, применив *комбинаторную двойственность Александера* (см. [BP, Corollary 2.4.6]) к результатам Айзенберга [Ай, Предложение 3.2]. Он доказал, что *s-линк-ацикличные* симплициальные комплексы – это в точности *s-подкомплекс-ацикличные* комплексы.

5.2. **Нижние оценки на LS-категорию момент-угол комплексов.** Пусть $\mathbb{F}$ – поле, X – односвязный клеточный комплекс. Существует гомологическая спектральная последовательность в первом квадранте, называемая *спектральной последовательностью Милнора-Мура*, со следующими свойствами:

$$E^2_{p,q} \cong \operatorname{Tor}_p^{H_*(\Omega X;\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F})_q \Rightarrow H_{p+q}(X;\mathbb{F}).$$

Ее можно построить так (см. [To, Section II.A]). Пусть (A,d) – связная дифференциальная градуированная алгебра над $\mathbb{F}$. Тогда ее приведенная бар-конструкция $\overline{\mathrm{B}}(A) := \mathrm{B}(\mathbb{F},\mathbb{F})$ (см. Подраздел 2.5) является бикомплексом. Получаем спектральную последовательность с

$$E^2 = H(H(\overline{\mathrm{B}}(A),d),\partial) \cong H(\overline{\mathrm{B}}(H(A)),\partial) \cong \operatorname{Tor}^{H(A)}(\mathbb{F},\mathbb{F})$$

(второе равенство следует из формулы Кюннета).

Спектральная последовательность Милнора-Мура соответствует случаю $A = C_*(\Omega X;\mathbb{F})$. В других подходах к построению этой спектральной последовательности используются естественные геометрические фильтрации на пространствах, слабо эквивалентных X :

- Конструкция Милнора классифицирующего пространства $B_\infty G(X)$ топологической группы $G(X) \simeq \Omega X$ [Mi] (см. также [БЛ, Раздел 6]);
- Конструкция расслоений-корасслоений Ганеа [Ga];
- Фильтрация Дж.Уайтхеда на пространстве отображений $\Delta^\infty \to X$ (см. [Gi, §1]).

Эти конструкции приводят к изоморфным спектральным последовательностям, см. [Gi, §3]. Наличие геометрической интерпретации показывает, что спектральная последовательность Милнора-Мура сходится к $H_*(X;\mathbb{F})$.

Замечание 5.11. В действительности dg-коалгебры $\overline{\mathrm{B}}(C_*(\Omega X;\mathbf{k}))$ и $C_*(X;\mathbf{k})$ квази-изоморфны для любого кольца $\mathbf{k}$, см. [FHT, Theorem IV]. Это даёт спектральную последовательность

$$(E^0,d^0) = (\overline{B}(C_*(\Omega X;\mathbf{k})),d) \Rightarrow H_*(X;\mathbf{k}),$$

но первый лист в ней не обязательно изоморфен $\overline{B}(H_*(\Omega X;\mathbf{k}))$.

LS-категория пространства X оценивается снизу *инвариантом Тумера* $e_\mathbb{F}(X)$:

Теорема 5.12 ([Gi, Theorem 2.2], см. также [To, Theorem II.B.2])**.** *Для спектральной последовательности Милнора-Мура обозначим* $e_\mathbb{F}(X) := \max\{p : E^\infty_{p,*} \neq 0\}$. *Тогда* $\operatorname{cat}(X) \geq e_\mathbb{F}(X)$. □

Предложение 5.13. *Пусть* $\mathcal{K}$ *– флаговый симплициальный комплекс,* $\mathbb{F}$ *– поле. Тогда спектральная последовательность Милнора-Мура для* $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ *над* $\mathbb{F}$ *вырождается в* E^2, *и* $e_\mathbb{F}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 1 + \max_{J\subset[m]}\operatorname{hdim}_\mathbb{F}\mathcal{K}_J$.

Доказательство. Вычислим размерности векторных пространств $E^2_{*,*}$ and $E^\infty_{*,*}$ с помощью Теоремы 4.5 и Теоремы 2.2:

$$\sum_{p,q} \dim E^2_{p,q} = \sum_i \dim \mathrm{Tor}_i^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F}) = \sum_i \sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_{i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{F});$$

$$\sum_{p,q} \dim E^\infty_{p,q} = \sum_i \dim H_i(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F}) = \sum_i \sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_{i-|J|-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{F}).$$

Они равны, поэтому все дифференциалы тривиальны. Формула для инварианта Тумера следует из Теоремы 4.5: $E^\infty_{p,*} \cong E^2_{p,*} \cong \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{F})}(\mathbb{F},\mathbb{F}) = \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{p-1}(\mathcal{K}_J;\mathbb{F})$. □

Лемма 5.14. *Пусть X – топологическое пространство с конечно порожденными группами гомологий. Тогда* $\mathrm{cdim}_\mathbb{Z} X = \max_\mathbb{F} \mathrm{hdim}_\mathbb{F} X$, *где максимум берется по всем полям* $\mathbb{F}$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{cdim}_\mathbb{Z} X = n$, и пусть $\mathbb{F}$ – поле. По теореме об универсальных коэффициентах, $\widetilde{H}_k(X;\mathbb{F})$ выражается через $\widetilde{H}^k(X;\mathbb{Z})$ и $\widetilde{H}^{k+1}(X;\mathbb{Z})$. Следовательно, $\widetilde{H}_k(X;\mathbb{F}) = 0$ при $k > n$. Поэтому $\mathrm{hdim}_\mathbb{F} X \le n$ при всех $\mathbb{F}$.

Осталось показать, что $\widetilde{H}_n(X;\mathbb{F}) \ne 0$ для некоторого $\mathbb{F}$. Так как $\widetilde{H}^n(X;\mathbb{Z}) \ne 0$, возможны два случая:

- Нетривиальна свободная часть $\widetilde{H}^n(X;\mathbb{Z})$. Тогда $\widetilde{H}^n(X;\mathbb{Q}) \ne 0$, откуда $\widetilde{H}_n(X;\mathbb{Q}) \ne 0$.
- Нетривиально p-кручение в $\widetilde{H}^n(X;\mathbb{Z})$ для некоторого p. Тогда нетривиально p-кручение в $\widetilde{H}_{n-1}(X;\mathbb{Z})$. Значит, есть нетривиальное p-кручение в $\widetilde{H}_{n-1}(X;\mathbb{Z}/p)$ и $\widetilde{H}_n(X;\mathbb{Z}/p)$. Таким образом, $\widetilde{H}_n(X;\mathbb{Z}/p) \ne 0$. □

Предложение 5.15. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда* $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \ge 1 + \max_{J\subset[m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J$.

Доказательство. $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \ge \max_\mathbb{F} e_\mathbb{F}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = 1 + \max_{J\subset[m]} \max_\mathbb{F} \mathrm{hdim}_\mathbb{F} \mathcal{K}_J = 1 + \max_{J\subset[m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J$. □

Теперь мы можем доказать Теорему 1.6. Напомним формулировку:

Теорема 5.16. *Пусть $\mathcal{K} \ne \Delta^{m-1}$ – флаговый симплициальный комплекс. Тогда*

$$\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{R}_\mathcal{K} = 1 + \max_{I\in\mathcal{K}} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathrm{lk}_\mathcal{K} I = 1 + \max_{J\subset[m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J.$$

Доказательство. Предложения 5.2, 5.9, 5.15 дают циклические нестрогие неравенства. □

Следствие 5.17. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговая триангуляция d-мерного многообразия. Тогда* $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{cat}(\mathcal{R}_\mathcal{K}) = d + 1$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\max_{J\subset[m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J = d$. Имеем

$$d = \mathrm{hdim}_{\mathbb{Z}/2} \mathcal{K} \le \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K} \le \max_{J\subset[m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J \le \dim \mathcal{K} = d.$$ □

Замечание 5.18. LS-категорию $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ для произвольных триангуляций одномерных и двумерных многообразий вычислили Бебен и Грбич [BG, Proposition 4.7 и Proposition 4.12]. В нефлаговом случае $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ может быть меньше, чем $d + 1$.

Обозначим множество недостающих граней комплекса $\mathcal{K}$ как $\mathrm{MF}(\mathcal{K})$. По определению, $\mathrm{MF}(\mathcal{K}) = \{I \subset [m] :\ I \notin \mathcal{K},\ \text{и } I \setminus \{i\} \in \mathcal{K},\ \forall i \in I\}$. Для получения оценок снизу в нефлаговом случае воспользуемся неравенством, замеченным Бебеном и Грбич:

Предложение 5.19 (см. [BG, Lemma 3.11]). *Пусть $\mathcal{L}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{L}_s$ – фильтрация симплициальных комплексов, такая что $\mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p \subset \mathrm{MF}(\mathcal{L}_p)$ для всех $p = 0, \dots, s-1$. Тогда* $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_s}) \le \mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_0}) + s$.

Доказательство. Рассуждение дословно повторяет доказательства лемм [BG, Lemma 3.10 и Lemma 3.11]. Ключевой шаг – проверка разложения

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p} = \bigsqcup_{I\in\mathcal{L}_{p+1}\setminus\mathcal{L}_p} \prod_{i\in I} (D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i\notin I} S^1. \tag{5.1}$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$. Найдется симплекс $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$, такой что $x \in \prod_{i\in I} D^2 \times \prod_{i\notin I} S^1$. По предположению, для любого $j \in I$ имеем $I \setminus \{j\} \in \mathcal{L}_p$. Если для некоторого $j \in I$ верно $x_j \in S^1$, то

$$x \in \prod_{i\in I\setminus\{j\}} D^2 \times \prod_{i\notin I\setminus\{j\}} S^1 \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$$

– противоречие. Значит, $x_j \in D^2 \setminus S^1$ для всех $j \in I$. Это рассуждение показывает, что

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p} \subset \bigsqcup_{I\in\mathcal{L}_{p+1}\setminus\mathcal{L}_p} \prod_{i\in I}(D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i\notin I} S^1.$$

Наоборот, пусть $x \in \prod_{i\in I}(D^2 \setminus S^1) \times \prod_{i\notin I} S^1$ для некоторого $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$. Очевидно,

$$x \in \prod_{i\in I} D^2 \times \prod_{i\notin I} S^1 \subset \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}}.$$

Если $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$, то найдется симплекс $J \in \mathcal{L}_p$, такой что $x \in \prod_{i\in J} D^2 \times \prod_{i\notin J} S^1$. Получаем $I \subset J$, что противоречит $I \notin \mathcal{L}_p$ и $J \in \mathcal{L}_p$. Значит, $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_{p+1}} \setminus \mathcal{Z}_{\mathcal{L}_p}$. Тождество (5.1) проверено. $\square$

Теперь мы введем число $\nu(\mathcal{K})$, которое измеряет, насколько комплекс $\mathcal{K}$ нефлаговый. Напомним, что $\mathcal{K}^f$ – единственный флаговый симплициальный комплекс на $[m]$, такой что $\operatorname{sk}_1 \mathcal{K}^f = \operatorname{sk}_1 \mathcal{K}$.

Определение 5.20. Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Рассмотрим следующую фильтрацию симплициальных комплексов:

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{K}, \quad \mathcal{L}_{p+1} := \mathcal{L}_p \cup \{I \in \operatorname{MF}(\mathcal{L}_p) : \ |I| \geq 3\}$$

(на p-ом шаге к комплексу $\mathcal{L}_p$ добавляются все его недостащие грани, кроме недостающих ребер).

Ясно, что фильтрация стабилизируется на флаговом симплициальном комплексе. Так как $\operatorname{sk}_1 \mathcal{L}_p = \operatorname{sk}_1 \mathcal{L}_{p-1} = \dots = \operatorname{sk}_1 \mathcal{K}$ для любого p, фильтрация стабилизируется на $\mathcal{K}^f$. Определим $\nu(\mathcal{K})$ как наименьшее $n \geq 0$, такое что $\mathcal{L}_n = \mathcal{K}^f$.

Предложение 5.21. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Тогда* $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f}) \leq \operatorname{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) + \nu(\mathcal{K})$ *или, эквивалентно,*

$$\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \geq 1 - \nu(\mathcal{K}) + \max_{J\subset[m]} \operatorname{cdim}_{\mathbb{Z}} \mathcal{K}^f_J.$$

Доказательство. Ясно, что фильтрация $\mathcal{K} = \mathcal{L}_0 \subset \dots \subset \mathcal{L}_{\nu(\mathcal{K})} = \mathcal{K}^f$ из Определения 5.20 удовлетворяет условиям Предложения 5.19. Поэтому $\operatorname{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}^f}) \leq \operatorname{cat}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) + \nu(\mathcal{K})$. Второе неравенство следует из Теоремы 5.16. $\square$

Число $\nu(\mathcal{K})$ и комплексы $\mathcal{L}_p$ можно описать явно:

Предложение 5.22. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Тогда $\nu(\mathcal{K})$ – это наименьшее $n \geq 0$, такое что верно следующее: $J \in \mathcal{K}$ всякий раз, когда $J \subset I \in \mathcal{K}^f$ и $|I \setminus J| \geq n$.*

Доказательство. Рассмотрим симплициальные комплексы

$$\mathcal{L}'_p := \{I \in \mathcal{K}^f \mid J \in \mathcal{K} \text{ для любого } J \subset I, \text{ такого что } |I \setminus J| \geq p\}.$$

Ясно, что $\mathcal{L}'_p \subset \mathcal{L}'_{p+1}$.

Условия "$J \in \mathcal{K}$ всякий раз, когда $J \subset I \in \mathcal{K}^f$ и $|I \setminus J| \geq n$" и "$\mathcal{L}'_n = \mathcal{K}^f$" эквивалентны. Поэтому достаточно показать, что $\mathcal{L}'_p = \mathcal{L}_p$ для всех $p \geq 0$. Индукция по p.

База индукции: $\mathcal{L}'_0 = \{I \in \mathcal{K}^f \mid J \in \mathcal{K} \text{ для всех } J \subset I\} = \mathcal{K} = \mathcal{L}_0$.

Шаг индукции: пусть $\mathcal{L}'_p = \mathcal{L}_p$. Мы покажем, что $\mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}'_{p+1}$ и $\mathcal{L}'_{p+1} \setminus \mathcal{L}'_p \subset \mathcal{L}_{p+1}$. Ясно, что отсюда следует $\mathcal{L}'_{p+1} = \mathcal{L}_{p+1}$.

(1) Пусть $I \in \mathcal{L}_{p+1} \setminus \mathcal{L}_p$. Тогда $I \in \mathcal{K}^f$ и $I \in \operatorname{MF}(\mathcal{L}_p)$.
Предположим, что $J \subset I$ и $|I \setminus J| \geq p + 1$. Так как $|I \setminus J| \geq 1$, найдется элемент $i \in I \setminus J$. Тогда $J \subset I \setminus \{i\}$ и $|(I \setminus \{i\}) \setminus J| \geq p$. Также $I \setminus \{i\} \in \mathcal{L}'_p$, так как $I \in \operatorname{MF}(\mathcal{L}'_p)$. Следовательно, $J \in \mathcal{K}$. Это рассуждение показывает, что $I \in \mathcal{L}'_{p+1}$.

(2) Пусть $I \in \mathcal{L}'_{p+1} \setminus \mathcal{L}'_p$, так что $I \in \mathcal{K}^f$. Чтобы показать, что $I \in \mathcal{L}_{p+1}$, мы докажем, что $I \in \operatorname{MF}(\mathcal{L}_p)$ и $|I| \geq 3$.

- Пусть $i \in I$. Предположим, что $J \subset I \setminus \{i\}$ таково, что $|(I \setminus \{i\}) \setminus J| \geq p$. Тогда $J \subset I$ и $|I \setminus J| \geq p+1$. Из $I \in \mathcal{L}'_{p+1}$ получаем $J \in \mathcal{K}$. Следовательно, $I \setminus \{i\} \in \mathcal{L}'_p$ для любого $i \in I$. Мы доказали, что $I \in \mathrm{MF}(\mathcal{L}'_p)$.
- Пусть $|I| \leq 2$. Тогда $I \in \mathrm{sk}_1 \mathcal{L}'_{p+1}$. Но $\mathcal{L}'_{p+1} \subset \mathcal{K}^f$, так что $I \in \mathrm{sk}_1 \mathcal{K}^f = \mathrm{sk}_1 \mathcal{L}_{\nu(\mathcal{K})} = \cdots = \mathrm{sk}_1 \mathcal{L}_p$ – противоречие с $I \notin \mathcal{L}_p$. □

Следствие 5.23. *Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Пусть $d = \dim \mathcal{K}^f$, и $\mathrm{sk}_i \mathcal{K} = \mathrm{sk}_i \mathcal{K}^f$ для некоторого $i \leq d$. Тогда $\nu(\mathcal{K}) \leq d - i$.*

Доказательство. За счет Предложения 5.22 достаточно доказать следующее: $J \in \mathcal{K}$ всякий раз, когда $J \subset I \in \mathcal{K}^f$ и $|I \setminus J| \geq d-i$. Но если $I \in \mathcal{K}^f$, то $|I| \leq d+1$. Следовательно, $|J| \leq i+1$, то есть $J \in \mathrm{sk}_i \mathcal{K}^f = \mathrm{sk}_i \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. Итак, $J \in \mathcal{K}$, что и требовалось. □

Пример 5.24. Пусть $\mathcal{K}$ – i-остов флагового комплекса $\mathcal{K}^f$, $2 \leq i \leq d = \dim \mathcal{K}^f$. Тогда $\nu(\mathcal{K}) \leq d - i$ по Следствию 5.23. С другой стороны, рассмотрим произвольный d-мерный симплекс $I \in \mathcal{K}^f$ и выберем в нем подмножество $J \subset I$, $|J| = i+2$. Тогда $J \notin \mathcal{K}$ и $|I \setminus J| = (d+1)-(i+2) = d-i-1$. Следовательно, $\nu(\mathcal{K}) = d-i$. В частности, $\nu(\mathrm{sk}_i \Delta^{m-1}) = m-i-1$.

Но в общем случае неравенство $\nu(\mathcal{K}) \leq \min\{n : \mathrm{sk}_{d-n} \mathcal{K} = \mathrm{sk}_{d-n} \mathcal{K}^f\}$ может быть строгим. Например, для $\mathcal{K} = \partial\Delta^2 \sqcup \partial\Delta^5$ имеем $\nu(\mathcal{K}) = 1$ и $d = 5$, хотя $\mathrm{sk}_4 \mathcal{K} \neq \mathrm{sk}_4 \mathcal{K}^f$.

Следствие 5.25. *Пусть $\mathcal{K}$ – флаговая триангуляция d-мерного многообразия. Пусть $\mathcal{L}$ – такой симплициальный комплекс на $[m]$, что $\mathrm{sk}_i \mathcal{K} \subset \mathcal{L} \subset \mathrm{sk}_j \mathcal{K}$ для некоторых i, j, $1 \leq i \leq j \leq d$. Тогда $i+1 \leq \mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{L}) \leq j+1$. В частности, $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{\mathrm{sk}_i \mathcal{K}}) = i+1$.*

Доказательство. По Следствию 5.17, $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = d+1$. Ясно что, $\mathrm{sk}_t \mathcal{K} = \mathrm{sk}_t(\mathrm{sk}_i \mathcal{K}) \subset \mathrm{sk}_t \mathcal{L} \subset \mathrm{sk}_t(\mathrm{sk}_j \mathcal{K}) = \mathrm{sk}_t \mathcal{K}$ для любого $t \leq i$. Поэтому $\mathrm{sk}_i \mathcal{L} = \mathrm{sk}_i \mathcal{K}$ и $\mathrm{sk}_1 \mathcal{L} = \mathrm{sk}_1 \mathcal{K}$.

Комплекс $\mathcal{K}$ флаговый, и $\mathrm{sk}_1 \mathcal{K} = \mathrm{sk}_1 \mathcal{L}$, так что $\mathcal{K} = \mathcal{L}^f$. Из Следствия 5.23 получаем $\nu(\mathcal{L}) \leq d-i$. По Предложению 5.21, $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \leq \mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{L}) + \nu(\mathcal{L})$. Таким образом, $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{L}) \geq (d+1)-(d-i) = i+1$.

С другой стороны, $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{L}) \leq 1+\dim \mathcal{L}$ по [BG, Lemma 3.11]. Верхняя оценка $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{L}) \leq j+1$ теперь следует из $\dim \mathcal{L} \leq \dim \mathrm{sk}_j \mathcal{K} = j$. □

Ясно, что аналогичное утверждение верно для любого флагового комплекса $\mathcal{K}$, такого что $\dim \mathcal{K} = \max_{J \subset [m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J = d$.

Пример 5.26. Каждому простому n-мерному многограннику P соответствует триангуляция $(n-1)$-мерной сферы ∂P^*. *Момент-угол многообразие* $\mathcal{Z}_P$ – это соответствующий момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_{\partial P^*}$. В работе [БЛ] Бухштабер и Лимонченко изучали некоторое семейство флаговых многогранников $\mathcal{Q} = \{Q_n\}_{n \geq 0}$, $\dim Q_n = n$. В частности, они вычислили LS-категорию соответствующих момент-угол многообразий [БЛ, Теорема 6.11]: $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n}) = n$. Для получения оценки снизу на $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n})$ они построили нетривиальное произведение длины n в кольце $H^*(\mathcal{Z}_{Q_n})$ и воспользовались известным неравенством $\mathrm{cat}(X) \geq \mathrm{cup}(X)$ между LS-категорией и *cup-длиной* пространства X. По определению, $\mathrm{cup}(X) \geq n$, если существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \widetilde{H}^*(X)$, такие что $\alpha_1 \smile \cdots \smile \alpha_n \neq 0$.

Применяя к $\mathcal{Z}_{Q_n}$ Следствие 5.17, мы получаем то же значение $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_{Q_n}) = n$ другим методом. Также, по Предложению 5.13, спектральная последовательность Милнора-Мура для $\mathcal{Z}_{Q_n}$ вырождается в E^2. Это усиливает результат из [БЛ, Теорема 6.11], где доказано вырождение этой спектральной последовательности в листе E^{n+1}.

Проблема 5.27. Неравенство $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) \geq \mathrm{cup}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ может быть строгим (см. [BG, Examples 5.8, 5.9]). Однако во всех известных примерах $\mathcal{K}$ не является флаговым. Возникает вопрос:

- Для всех ли флаговых симплициальных комплексов верно $\mathrm{cat}(\mathcal{Z}_\mathcal{K}) = \mathrm{cup}(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$?

Так как во флаговом случае LS-категория (Теорема 5.16) и кольцо когомологий [BP, Theorem 4.5.8] момент-угол комплекса известны, вопрос допускает чисто комбинаторную формулировку:

- Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс на $[m]$. Обозначим $d = \max_{J \subset [m]} \mathrm{cdim}_\mathbb{Z} \mathcal{K}_J$. Всегда ли существует такой набор непересекающихся подмножеств $A_1, \ldots, A_{d+1} \subset [m]$, что отображение

$$\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_1}) \otimes \cdots \otimes \widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_{d+1}}) \cong \widetilde{H}^d(\mathcal{K}_{A_1} * \cdots * \mathcal{K}_{A_{d+1}}) \to \widetilde{H}^d(\mathcal{K}_{A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_{d+1}}),$$

индуцированное вложением $\mathcal{K}_{A_1\sqcup\dots\sqcup A_{d+1}} \hookrightarrow \mathcal{K}_{A_1} * \dots * \mathcal{K}_{A_{d+1}}$, нетривиально?

(Классы $\alpha_1,\dots,\alpha_{d+1} \in H^*(\mathcal{Z}_\mathcal{K})$ можно считать $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-однородными, то есть $\alpha_i \in \widetilde{H}^{k_i}(\mathcal{K}_{A_i})$ для непересекающихся $A_1,\dots,A_{d+1}\subset[m]$ и $k_i\geq 0$. Но тогда $k_i=0$ из соображений размерности.)

Перейдя, если нужно, от $\mathcal{K}$ к $\mathcal{K}_J$, можно считать, что $\max_{J\subset[m]}\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}_J = \operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}=\mathcal{K}_{A_1\sqcup\dots\sqcup A_{d+1}}$. Наконец, можно считать, что классы $\alpha_i\in\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_i})$ индуцированы образующей группы $\widetilde{H}^0(S^0)$ под действием симплициальных отображений $\mathcal{K}_{A_i}\to S^0$ (любой элемент группы $\widetilde{H}^0(\mathcal{K}_{A_i})$ является линейной комбинацией таких классов). Это позволяет переформулировать вопрос следующим образом:

- Пусть $\mathcal{K}$ – флаговый симплициальный комплекс, и $d=\operatorname{cdim}_\mathbb{Z}\mathcal{K}$. Обозначим как $C_d = S^0*\dots*S^0$ октаэдральную триангуляцию d-мерной сферы. Всегда ли существует полный подкомплекс $\mathcal{K}_J$ и симплициальное отображение $\mathcal{K}_J\to C_d$, такое что соответствующий гомоморфизм $\widetilde{H}^d(C_d)\to\widetilde{H}^d(\mathcal{K}_J)$ нетривиален?

Заметим: если X – конечный симплициальный комплекс и $\operatorname{cdim}_\mathbb{Z} X = d$, то любой элемент $\alpha\in\widetilde{H}^d(X;\mathbb{Z})$ может быть индуцирован образующей группы $\widetilde{H}^d(S^d;\mathbb{Z})$ под действием некоторого *непрерывного* отображения $f: X\to S^d$ (это следует из теории препятствий). По теореме о симплициальной аппроксимации, f может быть сделано симплициальным после некоторого подразбиения комплекса X. То есть, по сути, мы спрашиваем: “Достаточно ли подразбиты флаговые симплициальные комплексы?”

Список литературы

[Ай] А. А. Айзенберг. Топологические приложения свойств колец Стенли-Райснера симплициальных комплексов. Тр. ММО, 73, №1 (2012), 47-85. 17

[БЛ] В. М. Бухштабер и И. Ю. Лимонченко. Произведения Масси, торическая топология и комбинаторика многогранников. Изв. РАН. Сер. матем., 83:6 (2019), 3-62. 17, 20

[ПВ] Т. Е. Панов и Я. А. Верёвкин. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера. Матем. сб., 207:11 (2016), 105-126. 2, 13, 16

[Ad] J. F. Adams. On the cobar construction. Proc Nat. Acad. Sci USA 42 (1956), 409-412. 7

[Al] P. Aluffi. Algebra: Chapter 0. Amer. Math. Soc., Providence, 2009. 6

[BG] P. Beben and J. Grbić. LS-category of moment-angle manifolds and higher order Massey products. Forum Mathematicum Vol. 33, 5 (2021), 1179-1205. 1, 2, 16, 18, 20

[BP] V. M. Buchstaber and T. E. Panov. *Toric topology*, volume 204 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015. 1, 4, 5, 7, 8, 9, 12, 13, 17, 20

[Br] K. S. Brown. Cohomology of Groups. Springer-Verlag, 1982. 16

[Ca] Li Cai. Some calculations of the homology of loop spaces of moment-angle complexes using Hall words. Доклад на International Polyhedral Products Seminar, 16 декабря 2021 г. http://math.princeton.edu/events/some-calculations-homology-loop-spaces-moment-angle-complexes-using-hall-words-2021-12 12

[Dr] A. N. Dranishnikov. Boundaries of Coxeter groups and simplicial complexes with given links. J. of Pure and Appl. Algebra 137 (1999), 139-151. 2, 16, 17

[DS] G. Denham and A. I. Suciu. Moment-angle complexes, monomial ideals, and Massey products. Pure and Appl. Math. Q. 3 (2007), 25-60. 2, 15

[EG] S. Eilenberg and T. Ganea. On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups. Ann. of Math. Vol. 65, 3 (1957), 517-518. 16

[Fr] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series. Math. Scand. 37 (1975), no. 1, 29-39. 1, 8, 10

[FHT] Y. Felix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. Adams' cobar equivalence. Trans. Amer. Math. Soc. 329, 2 (1992), 531-549. 17

[Ga] T. Ganea. Lusternik-Schnirelmann category and strong category. Illinois J. Math. 11(3) (1967), 417-427. 17

[Gi] M. Ginsburg. On the Lusternik-Schnirelmann category. Ann. of Math. Vol. 77, 3 (1963), 538-551. 16, 17

[GIPS] J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 152(1), 128-147. 1, 13

[GPTW] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes. Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6663-6682. 1, 14

[Lö] C. Löfwall. On the subalgebra generated by the one-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra. in Algebra, Algebraic Topology and their Interactions. J.-E. Roos ed. Lect. Notes Math. 1183., Springer-Verlag, Berlin/New York (1986), 291-338. 7, 8

[Mi] J. Milnor. Construction of Universal Bundles, II. Ann. of Math. Vol. 63, 3 (1956), 430-436. 17

[MM] J. W. Milnor and J. C. Moore. On the Structure of Hopf Algebras. Ann. of Math. Vol. 81, 2 (1965), 211–264. 2, 13, 14

[Pr] S. B. Priddy. Koszul resolutions. Trans. of the AMS 152 (1970), 39-60. 6, 8

[PR] T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322. 1, 13

[PT] T. Panov and S. Theriault. The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes. Compositio Math. 155, no. 1 (2019), 206-228. 4, 8, 14

[Sw] R. G. Swan. Groups of Cohomological Dimension One. J. Algebra 12 (1969), 585-601. 16

[To] G. H. Toomer. Lusternik-Schnirelmann Category and the Moore Spectral Sequence. Math. Z. 138 (1974), 123-143. 2, 17

[Us] Yu. Ustinovskiy. On face numbers of flag simplicial complexes. Discrete Comput. Geom. 60, 688–697 (2018). 2, 15

[Wa] C. T. C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra. Ann. of Math. Vol. 72, 3 (1960), 429-444. 5, 6