ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

ГОМОЛОГИИ ПЕТЕЛЬ МОМЕНТ–УГОЛ-КОМПЛЕКСОВ И КВАЗИТОРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Выполнил студент
603 группы
Вылегжанин Федор Евгеньевич

подпись студента

Научный руководитель:
профессор, д.ф.-м.н.
Панов Тарас Евгеньевич

подпись научного руководителя

Москва

2024 г.

1. Введение

Гладкое $2n$-мерное многообразие M с локально стандартным действием n-мерного тора T^n называют *квазиторическим*, если факторпространство эквивариантно диффеоморфно простому многограннику. Это естественное топологическое обобщение гладких проективных торических многообразий находится в центре внимания торической топологии [DJ91, BP15]. Другим важным семейством пространств с действием тора являются момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$, которые строятся по абстрактным симплициальным комплексам $\mathcal{K}$. Если $\mathcal{K}$ — комплекс на множестве вершин $[m] = \{1,\dots,m\}$, то на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ действует компактный m-мерный тор $\mathbb{T}^m$. Известно, что каждое квазиторическое многообразие эквивариантно гомеоморфно факторпространству некоторого момент-угол комплекса по свободно действующему подтору $T^{m-n} \subset \mathbb{T}^m$; таким образом, оно является "частичным фактором": $M \cong \mathcal{Z}_\mathcal{K}/T^{m-n}$. Более общо, мы будем называть *частичными факторами* все пространства вида $X = EH \times_H \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, где $H \subset \mathbb{T}^m$ — замкнутая подгруппа. Если $H \curvearrowright \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ свободно, имеем $X \simeq \mathcal{Z}_\mathcal{K}/H$. Конструкция Бореля для естественных действий $\mathbb{T}^m \curvearrowright \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^m/H \curvearrowright X$ называется *пространством Дэвиса–Янушкевича* $\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$.

Мы исследуем алгебры Понтрягина (гомологии пространств петель) частичных факторов, в том числе момент-угол комплексов и квазиторических многообразий. Это подалгебры в алгебрах Понтрягина соответствующих пространств Дэвиса–Янушкевича; более точно, имеем расширения алгебр Хопфа

$$\mathbf{k} \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}) \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \to \Lambda[u_1,\dots,u_m] \to \mathbf{k},$$

$$\mathbf{k} \to H_*(\Omega X;\mathbf{k}) \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \to \Lambda[t_1,\dots,t_n] \to \mathbf{k}$$

всякий раз, когда $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Алгебра Хопфа $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ изоморфна Ext-алгебре $\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ кольца Стэнли–Райснера. Она всегда содержит частично коммутативную алгебру

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! := T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2 = 0,\ i = 1,\dots,m;\ u_iu_j + u_ju_i = 0,\ \{i,j\} \in \mathcal{K}),$$

и совпадает с ней в случае, когда $\mathcal{K}$ — *флаговый* симплициальный комплекс. Таким образом, для флаговых $\mathcal{K}$ описание гомологий пространств петель $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ и $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ сводится к алгебраической задаче. Основные результаты данной работы — описание этих алгебр Понтрягина как ассоциативных алгебр, заданных образующими и соотношениями.

Введём необходимые обозначения. Для элемента $x \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ и подмножества $A = \{a_1 < \dots < a_k\} \subset [m]$ обозначим

$$c(A,x) := [u_{a_1},[u_{a_2},\dots[u_{a_k},x]\dots]] \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}).$$

Этот элемент принадлежит подалгебре $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}) \subset H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$, если $x = u_i$ и $A \neq \varnothing$ (см. следствие 3.10). Для каждого $J \subset [m]$ обозначим через $\Theta(J)$ множество таких вершин $i \in J$, что

- Вершины i и $\max(J)$ принадлежат разным компонентам связности комплекса $\mathcal{K}_J$, и
- i — наименьшая вершина своей компоненты связности.

Ясно, что $|\Theta(J)| = \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$. Рассмотрим $\sum_{J\subset[m]} \dim \widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$-элементное множество

$$\Big\{c(J\setminus\{i\},u_i):\ J \subset [m],\ i \in \Theta(J)\Big\} \subset H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}).$$

Мы называем его элементы *GPTW-образующими* в честь Грбич, Панова, Терио и Ву. Наконец, обозначим через $b_i(X;\mathbf{k})$ наименьшее число элементов, порождающих $\mathbf{k}$-модуль $H_i(X;\mathbf{k})$.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей, $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс без призрачных вершин на вершинах $[m]$.*

(1) *Для каждого подмножества $J \subset [m]$ выберем набор симплициальных 1-циклов*

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J} \lambda_{ij}^{(\alpha)}[\{i,j\}] \in C_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),$$

порождающих $\mathbf{k}$*-модуль* $H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$. *Тогда алгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ *порождается GPTW-образующими по модулю соотношений*

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}\lambda_{ij}^{(\alpha)}\sum_{\substack{J\setminus\{i,j\}=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>j}}\pm\Big[\widehat{c}(A,u_i),\widehat{c}(B,u_j)\Big]=0,$$

соответствующих выбранным 1-циклам. (Здесь $\widehat{c}(A,u_i)$ *и* $\widehat{c}(B,u_j)$ *— это элементы* $c(A,u_i)$, $c(B,u_j)\in H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$, *произвольным образом выраженные через GPTW-образующие, и* $[x,y]:=x\cdot y-(-1)^{|x|\cdot|y|}y\cdot x$.*) В частности,* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ *допускает* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$*-однородное копредставление, в котором* $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих и* $\sum_{J\subset[m]}b_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ *соотношений.*

(2) *Если* $\mathbf{k}$ *— область главных идеалов, то это копредставление минимально: любое* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$*-однородное копредставление алгебры* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$ *содержит хотя бы* $\sum_{J\subset[m]}\dim\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих и хотя бы* $\sum_{J\subset[m]}b_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ *соотношений.*

Эта теорема следует из теорем 5.1 и 5.5, доказанных в разделе 5. В случае коэффициентов в поле эти результаты частично получены в работах Грбич, Панова, Терио, Ву (минимальный набор образующих [GPTW16, Theorem 4.3]) и автора (число соотношений и их степени [Vyl22, Corollary 4.5]). Иногда число соотношений можно уменьшить, если не требовать $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-однородности (см. теорему 5.6).

Для частичного фактора $X(\mathcal{K},\lambda):=ET_\lambda\times_{T_\lambda}\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}$ замкнутая подгруппа $T_\lambda=\mathrm{Ker}(\lambda_*:\mathbb{T}^m\to\mathbb{T}^n)$ задаётся выбором гомоморфизма $\lambda:\mathbb{Z}^m\to\mathbb{Z}^n$. Частичный фактор будет гомотопически эквивалентен квазиторическому многообразию над многогранником P, если $\mathcal{K}=\partial P^*$ — двойственная триангуляция $(n-1)$-мерной сферы, а λ удовлетворяет условию невырожденности: для каждого $(n-1)$-симплекса $\{i_1,\dots,i_n\}\in\mathcal{K}$ элементы $\lambda(e_{i_1}),\dots,\lambda(e_{i_n})$ образуют базис решетки $\mathbb{Z}^n$.

Будем считать элементы $u_1,\dots,u_m\in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ стандартным базисом решётки $\mathbb{Z}^m$.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{k}$ *— поле или* $\mathbb{Z}$, *а* $X=X(\mathcal{K},\lambda)$ *— квазиторическое многообразие над* n*-мерным многогранником* P, *соответствующее флаговому комплексу* $\mathcal{K}$ *на множестве вершин* $[m]$ *и характеристической функции* $\lambda:\mathbb{Z}^m\to\mathbb{Z}^n$. *Выберем базис* $z_1,\dots,z_{m-n}$ *в* $\mathrm{Ker}\,\lambda\subset\mathbb{Z}^m=\mathbb{Z}\cdot u_1\oplus\dots\oplus\mathbb{Z}\cdot u_m$. *Тогда алгебра* $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})$ *порождена элементами* $z_1,\dots,z_{m-n}$ *по модулю* $h_2(P)=n(n-1)/2-m(n-1)+f_{n-2}(P)$ *квадратичных соотношений (здесь* $f_{n-2}(P)$ *— число граней коразмерности* 2*).*

Эта теорема доказана в разделе 7. Для произвольных частичных факторов $X=X(\mathcal{K},\lambda)$ алгебра $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ может быть устроена сложнее (иметь другие образующие, помимо описанных, и соотношения между ними). Во флаговом случае её описание во многом сведено к вычислению первых и вторых гомологий биградуированного цепного комплекса $(\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$. Таким образом, в каждом конкретном случае копредставление алгебры Понтрягина $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})$ можно получить в результате явных вычислений.

1.1. **Структура работы.** Раздел 2 содержит предварительные сведения из алгебры. Отметим следствие 2.2, с помощью которого мы строим цепные отображения из свободных резольвент в бар-резольвенту. В разделе 3 мы напоминаем сведения из торической топологии и обсуждаем свойства алгебр Понтрягина $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ и $H_*(\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})$. Основные вычисления проведены в разделе 4. В разделе 5 мы доказываем теорему 1.1 и рассматриваем в качестве примера случай, когда $\mathcal{K}$ — граница m-угольника. В разделе 6 рассматривается случай частичных факторов, а в разделе 7 — квазиторических многообразий. В приложении A мы разрабатываем гомологический подход к копредставлениям связных градуированных алгебр над коммутативным кольцом с единицей. В приложении B доказан следующий фольклорный факт: расщепимые расслоения пространств петель соответствуют (при переходе к гомологиям) расширениям алгебр Хопфа. Приложение C содержит коммутаторные тождества, которые использованы в разделе 4.

1.2. **Благодарности.** Автор благодарен своему научному руководителю Тарасу Евгеньевичу Панову за чуткое руководство и внимание к этой работе, Маттиасу Францу за ссылку на результат [Fra21', Proposition 6.5], и Владимиру Горчакову, Дмитрию Пионтковскому, Темурбеку Рахматуллаеву и Георгию Черных за полезные обсуждения и комментарии.

2. Предварительные сведения: алгебра

2.1. **Связные градуированные алгебры.** Зафиксируем коммутативное ассоциативное кольцо $\mathbf{k}$ с единицей. Мы рассматриваем ассоциативные $\mathbf{k}$-алгебры с единицей, градуированные коммутативным моноидом G (обычно $G = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$, $k = 0, 1, 2$.) Все левые A-модули тоже подразумеваются G-градуированными. Элементы моноида $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ обозначаются как $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$, $\alpha_j \geq 0$. Подмножества $J \subset [m]$ отождествляются с элементами $\sum_{j \in J} e_j \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$. Обозначим также

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \operatorname{supp} \alpha := \{i \in [m] : \ \alpha_i > 0\}.$$

Каждая $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированная алгебра A также рассматривается как $\mathbb{Z}$-градуированная относительно тотальной градуировки $A_n := \bigoplus_{n = i_1 + \dots + i_k + |\alpha|} A_{i_1, \dots, i_k, \alpha}$.

Градуированная алгебра A *связна*, если $A_{<0} = 0$ и $A_0 = \mathbf{k} \cdot 1$. Имеем каноническую аугментацию $\varepsilon : A \to A_0 = \mathbf{k}$ и аугментационный идеал $I(A) := \operatorname{Ker} \varepsilon$. Примеры связных $\mathbf{k}$-алгебр:

- внешняя алгебра $\Lambda[m] := \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, $\deg(u_i) = (-1, 2e_i) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$ с базисом $\{u_I := u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_k}, \ I = \{i_1 < \dots < i_k\}\}$;
- алгебра многочленов $\mathbf{k}[m] := \mathbf{k}[v_1, \dots, v_m]$, $\deg(v_i) = (0, 2e_i)$ с базисом $\{v^\alpha := \prod_{i=1}^m v_i^{\alpha_i}, \ \alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0}\}$;
- тензорная алгебра $T(x_1, \dots, x_N)$, где x_i — однородные элементы произвольной положительной степени.

Для каждого однородного элемента a обозначим $\overline{a} := (-1)^{1+\deg(a)} \cdot a$. Ясно, что $\overline{a \cdot b} = -\overline{a} \cdot \overline{b}$ и $\overline{\overline{a}} = a$.

Если A — G-градуированная алгебра, то каждый комплекс A-модулей (M, d) рассматривается как $\mathbb{Z} \times G$-градуированный модуль с дифференциалом степени $(-1, 0)$. Мы используем правило знаков Кошуля относительно тотальной градуировки: $d(a \cdot m) = (-1)^{\deg(a)} a \cdot d(m) = -\overline{a} \cdot d(m)$. Некоторые формулы из работы [Vyl22] не следуют этому правилу и исправленны в данном тексте.

2.2. **Бар-резольвента и бар-конструкция.** Пусть A — связная $\mathbf{k}$-алгебра, $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ — аугментация. Полученный A-модуль $\mathbf{k}$ имеет *бар-резольвенту*

$$\dots \to \mathrm{B}_2(A) \to \mathrm{B}_1(A) \to \mathrm{B}_0(A) \to \mathbf{k} \to 0,$$

где $\mathrm{B}_n(A) := A \otimes I(A)^{\otimes n}$. Элемент вида $a \otimes a_1 \dots \otimes a_n \in \mathrm{B}_n(A)$ имеет бистепень $(n, \deg(a) + \sum_{i=1}^n \deg(a_i))$ и традиционно записывается как $a[a_1| \dots |a_n]$. Дифференциал d_{B} имеет бистепень $(-1, 0)$ и задаётся формулой

$$-d_{\mathrm{B}}(a[a_1| \dots |a_n]) := \overline{a} \cdot a_1[a_2| \dots |a_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \overline{a}[\overline{a}_1| \dots |\overline{a}_{i-1}|\overline{a}_i \cdot a_{i+1}|a_{i+2}| \dots |a_n].$$

Рассмотрим также стягивающую гомотопию $s_n : \mathrm{B}_n(A) \to \mathrm{B}_{n+1}(A)$,

$$s_n(a[a_1| \dots |a_n]) := \begin{cases} 0, & a \in A_0 \simeq \mathbf{k}; \\ [a|a_1| \dots |a_n], & \deg(a) > 0; \end{cases} \quad s_{-1} : \mathbf{k} \to \mathrm{B}_0(A), \quad 1 \mapsto 1[]. \tag{2.1}$$

Легко проверить, что $s \circ d_{\mathrm{B}} + d_{\mathrm{B}} \circ s = \mathrm{id}$, $d_{\mathrm{B}}^2 = 0$. Таким образом, $(\mathrm{B}(A), d_{\mathrm{B}})$ — свободная резольвента левого A-модуля $\mathbf{k}$. Вычисляя функтор Tor с помощью бар-резольвенты, мы получаем

$$\operatorname{Tor}^A_n(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \cong H_n\Big[\overline{\mathrm{B}}(A), d_{\overline{\mathrm{B}}}\Big],$$

где $\overline{\mathrm{B}}(A) := \mathbf{k} \otimes_A \mathrm{B}(A)$ называется *бар-конструкцией* алгебры A. Имеем

$$\overline{\mathrm{B}}_n(A) = I(A)^{\otimes n}, \quad \deg([a_1| \dots |a_n]) = (n, \deg(a_1) + \dots + \deg(a_n)), \ \deg d_{\overline{\mathrm{B}}} = (-1, 0),$$

$$d_{\overline{\mathrm{B}}}([a_1| \dots |a_n]) = \sum_{i=1}^{n-1} [\overline{a}_1| \dots |\overline{a}_{i-1}|\overline{a}_i \cdot a_{i+1}|a_{i+2}| \dots |a_n] \in \overline{\mathrm{B}}_{n-1}(A). \tag{2.2}$$

В частности, $d_{\overline{\mathrm{B}}}([x|y]) = [\overline{x} \cdot y]$ и $d_{\overline{\mathrm{B}}}([x|y|z]) = [\overline{x} \cdot y|z] + [\overline{x}|\overline{y} \cdot z]$.

2.3. **Цепные отображения в резольвенту со стягивающей гомотопией.** Любое отображение модулей можно продолжить до отображения их свободных резольвент. Более того, такое продолжение можно построить с помощью стягивающей гомотопии для второй резольвенты. По-видимому, эта рекурсивная конструкция известна специалистам; её обобщения и приложения обсуждаются в работе [BM23]. Автор благодарен Георгию Черных за ссылку.

Лемма 2.1. *Пусть A — ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра. Предположим, что диаграмма левых A-модулей и их гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\widehat{d}_n"] & C_{n-1} \arrow[r, "\widehat{d}_{n-1}"] \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] & C_{n-2} \arrow[d, "\varphi_{n-2}"] \\ B_n \arrow[r, "d_n"'] & B_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] & B_{n-2} \end{tikzcd}$$

коммутативна и удовлетворяет следующим условиям:

(1) C_n *— свободный A-модуль с базисом* $\{e_i\}$;

(2) $\widehat{d}_{n-1} \circ \widehat{d}_n = 0$;

(3) *определены $\mathbf{k}$-линейные отображения $s_{n-1} : B_{n-1} \to B_n$ и $s_{n-2} : B_{n-2} \to B_{n-1}$ такие, что* $d_n \circ s_{n-1} + s_{n-2} \circ d_{n-1} = \mathrm{id}_{B_{n-1}}$.

Зададим A-линейное отображение $\varphi_n : C_n \to B_n$ на базисе по формуле

$$\varphi_n(e_i) := s_{n-1}(\varphi_{n-1}(\widehat{d}_n(e_i))) \in B_n.$$

Тогда $d_n \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \widehat{d}_n$.

Доказательство. Так как $d_n \circ \varphi_n$ and $\varphi_{n-1} \circ \widehat{d}_n$ — морфизмы A-модулей, достаточно показать, что они совпадают на базисе модуля C_n. По определению имеем

$$d_n(\varphi_n(e_i)) = (d_n \circ s_{n-1} \circ \varphi_{n-1} \circ \widehat{d}_n)(e_i).$$

По условию (3), $d \circ s \circ \varphi \circ \widehat{d} = \varphi \circ \widehat{d} - s \circ d \circ \varphi \circ \widehat{d}$. Из коммутативности диаграммы и условия (2) получаем $s \circ d \circ \varphi \circ \widehat{d} = s \circ \varphi \circ \widehat{d} \circ \widehat{d} = 0$. Поэтому $d_n(\varphi_n(e_i)) = \varphi_{n-1}(\widehat{d}_n(e_i)) - 0$. □

Следствие 2.2. *Пусть A — связная $\mathbf{k}$-алгебра, $(A \otimes V_\bullet, \widehat{d}_\bullet)$ — свободная резольвента левого A-модуля $\mathbf{k}$. Пусть $\overline{\varphi}_0 : V_0 \to \mathbf{k}$ — отображение $\mathbf{k}$-модулей такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A \otimes V_1 \arrow[r, "\widehat{d}_1"] & A \otimes V_0 \arrow[r, "\widehat{d}_0"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\overline{\varphi}_0"'] & \mathbf{k} \arrow[d, equal, "\mathrm{id}=:\varphi_{-1}"] \\ \mathrm{B}_1(A) \arrow[r, "d_{\mathrm{B},1}"] & A \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbf{k} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Выберем базисы $\{e_i^{(n)}\}$ у $\mathbf{k}$-модулей V_n, и рекурсивно определим A-линейные отображения $\varphi_n : A \otimes V_n \to \mathrm{B}_n(A)$ по формуле

$$\varphi_0 := \mathrm{id}_A \otimes \overline{\varphi}_0, \quad \varphi_n(a \otimes e_i^{(n)}) := a \cdot s_{n-1}(\varphi_{n-1}(\widehat{d}_n(e_i^{(n)}))),$$

где $s_{n-1} : \mathrm{B}_{n-1}(A) \to \mathrm{B}_n(A)$ — это стягивающая гомотопия (2.1).

Тогда $\varphi_\bullet : (A \otimes V_\bullet, \widehat{d}) \to (\mathrm{B}_\bullet(A), d_\mathrm{B})$ — цепное отображение.

Доказательство. Индукция по n. При $n = 0$ тождество $d_{\mathrm{B},n} \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \widehat{d}_n$ верно, так как диаграмма коммутативна. Переход индукции (от $n-1$ к n) обеспечивается леммой 2.1. □

2.4. **Расширения алгебр Хопфа и гомологии петель.** Если A — алгебра Хопфа над $\mathbf{k}$, мы обозначаем коумножение через $\Delta : A \to A \otimes A$, а отображения (ко)единицы — через $\eta_A : \mathbf{k} \to A$, $\varepsilon_A : A \to \mathbf{k}$. Градуированная $\mathbf{k}$-алгебра Хопфа A *связна*, Если $A_{<0} = 0$, $A_0 = \mathbf{k} \cdot 1$. Тогда коединица совпадает со стандартной аугментацией $\varepsilon : A \to A_0 \simeq \mathbf{k}$.

Определение 2.3. Пусть $\iota : A \to C$, $\pi : C \to B$ — морфизмы $\mathbf{k}$-алгебр Хопфа. Они образуют *расширение алгебр Хопфа*, или *короткую точную последовательность алгебр Хопфа*

$$\mathbf{k} \to A \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} B \to \mathbf{k},$$

если выполнены следующие условия:

(1) ι инъективно;
(2) π сюръективно;
(3) $\pi\circ\iota=\varepsilon$;
(4) $\operatorname{Ker}\pi=I(A)\cdot C$;
(5) $\operatorname{Im}\iota=\{x\in C:\ ((\mathrm{id}_C\otimes\pi)\circ\Delta)(x)=x\otimes 1\}$.

Эквивалентное и более "симметричное" определение см. в [AD95, Definition 1.2.0, Proposition 1.2.3]. Расширения связных алгебр Хопфа неявно изучались в [MM65, §4].

Предложение 2.4 (см. [MM65, Proposition 4.9])**.** *Пусть $\iota: A\to C$, $\pi: C\to B$ — морфизмы связных $\mathbf{k}$-алгебр Хопфа. Предположим, что отображение $\Phi: A\otimes B\to C$ — изоморфизм левых A-модулей и правых C-комодулей, причём*

$$\iota=\Phi\circ(\mathrm{id}_A\otimes\eta_B),\quad \pi\circ\Phi=\varepsilon_A\otimes\mathrm{id}_B.$$

Тогда $\mathbf{k}\to A\xrightarrow{\iota}C\xrightarrow{\pi}B\to\mathbf{k}$ — расширение алгебр Хопфа. Наоборот, для всякого расширения связных алгебр Хопфа определено отображение Φ с описанными свойствами. $\square$

Наш основной пример алгебр Хопфа — это алгебры Понтрягина (гомологии петель) односвязных топологических пространств. Пусть $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо, Y — такое топологическое пространство, что $H_*(Y;\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Тогда на $H_*(Y;\mathbf{k})$ возникает кокоммутативное *cup-коумножение*, двойственное к cup-умножению на $H^*(Y;\mathbf{k})$: это композиция

$$H_*(Y;\mathbf{k})\xrightarrow{\Delta_*}H_*(Y\times Y;\mathbf{k})\xrightarrow[\simeq]{AW_*}H_*(C_*(Y;\mathbf{k})\otimes C_*(Y;\mathbf{k}))\xleftarrow[\simeq]{\kappa}H_*(Y;\mathbf{k})\otimes H_*(Y;\mathbf{k}),$$

где AW — отображение Александера–Уитни, а κ — изоморфизм Кюннета. Если Y также является H-пространством, то cup-коумножение согласовано с умножением Понтрягина

$$m: H_*(Y;\mathbf{k})\otimes H_*(Y;\mathbf{k})\xrightarrow{\times}H_*(Y\times Y;\mathbf{k})\xrightarrow{\mu_*}H_*(Y;\mathbf{k}),$$

поэтому $H_*(Y;\mathbf{k})$ — кокоммутативная алгебра Хопфа. В частности, $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ — связная кокоммутативная $\mathbf{k}$-алгебра Хопфа, если X — такое односвязное пространство, что $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ — *свободный* $\mathbf{k}$*-модуль* [MM65, 8.9]. Без предположения свободности коумножение не определено, поэтому $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ — лишь связная ассоциативная $\mathbf{k}$-алгебра с единицей.

В приложении B мы описываем ситуацию, когда расслоению $F\to E\to B$ односвязных расслоений соответствует расширение связных алгебр Хопфа $\mathbf{k}\to H_*(\Omega F;\mathbf{k})\to H_*(\Omega E;\mathbf{k})\to H_*(\Omega B;\mathbf{k})\to\mathbf{k}$.

3. Предварительные сведения: торическая топология

3.1. **Симплициальные комплексы и полиэдральные произведения.** *Симплициальный комплекс* $\mathcal{K}$ на множестве вершин W — это непустое семейство подмножеств $I\subset W$, замкнутое относительно перехода к подмножеству. Элементы $I\in\mathcal{K}$ называются *гранями*. Мы предполагаем, что $\mathcal{K}$ *не имеет призрачных вершин*, то есть $\{i\}\in\mathcal{K}$ для всех $i\in W$. Обычно $W\subset[m]:=\{1,\dots,m\}$. Часто под свойствами комплекса $\mathcal{K}$ мы подразумеваем свойства его *геометрической реализации* — топологического пространства $|\mathcal{K}|:=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\Delta_I\subset\Delta_W$.

Для каждого $J\subset W$ определен *полный подкомплекс* комплекса $\mathcal{K}$, симплициальный комплекс $\mathcal{K}_J:=\{I\in\mathcal{K}:\ I\subset J\}$ на множестве вершин J.

Подмножество $I\subset W$ называется *недостающей гранью* комплекса $\mathcal{K}$, если $I\notin\mathcal{K}$, но $I\setminus i\in\mathcal{K}$ для всех $i\in I$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ *флаговый*, если все его недостающие грани двухэлементны.

Для каждого комплекса $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m]$ определено $\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированное *кольцо Стэнли–Райснера*

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]:=\mathbf{k}[v_1,\dots,v_m]/\left(\prod_{i\in I}v_i=0,\ I\notin\mathcal{K}\right),\quad \deg v_i:=2e_i\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}.$$

Как $\mathbf{k}$-модуль, оно имеет однородный базис $\{v^\alpha:=\prod_{i=1}^m v_i^{\alpha_i}\mid \operatorname{supp}\alpha\in\mathcal{K}\}$. Двойственный $\mathbf{k}$-модуль $\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ — это *коалгебра Стэнли–Райснера*. Она имеет аддитивный базис $\{\chi_\alpha\mid\operatorname{supp}\alpha\in\mathcal{K}\}$, $\deg\chi_\alpha=2\alpha$, и коммутативное ассоциативное коумножение $\Delta\chi_\alpha:=\sum_{\alpha=\beta+\gamma}\chi_\beta\otimes\chi_\gamma$.

Пусть теперь $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, (X,A) — пара топологических пространств. Их *полиэдральное произведение* $(X,A)^{\mathcal{K}}$ — это объединение

$$(X,A)^{\mathcal{K}} := \bigcup_{I\in\mathcal{K}} (X,A)^I \subset X^m, \quad (X,A)^I = Y_1\times\dots\times Y_m, \quad Y_j := \begin{cases} X, & j\in I;\\ A, & j\notin I.\end{cases}$$

Мы рассматриваем два частных случая этой конструкции: *момент–угол-комплексы* $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} := (D^2,S^1)^{\mathcal{K}}$ и *пространства Дэвиса–Янушкевича* $\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) := (\mathbb{C}P^\infty,*)^{\mathcal{K}}$. Хорошо известно, что $H^*(\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ и $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\cong\mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[m]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$ как градуированные кольца. Более того,

$$H^n(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}) = \bigoplus_{n=-i+2|J|} H^{-i,2J}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k}), \quad H^{-i,2J}(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}};\mathbf{k})\cong\widetilde{H}^{|J|-i-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),$$

и умножение в когомологиях имеет геометрическое описание в терминах отображений симплициальных комплексов $\mathcal{K}_{I\sqcup J}\hookrightarrow\mathcal{K}_I*\mathcal{K}_J$, см. [BP15, Theorem 4.5.8].

3.2. **Гомологии петель как алгебры Хопфа.**

Предложение 3.1 ([BP15, Theorem 4.3.2, §8.4])**.** *Имеем гомотопическое расслоение $\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\to\mathrm{DJ}(\mathcal{K})\xrightarrow{i}(\mathbb{C}P^\infty)^m$ односвязных пространств, где i — стандартное вложение. Отображение Ωi имеет гомотопическое сечение $\sigma:\mathbb{T}^m\to\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$, соответствующее выбору образующих в $\pi_2(\mathrm{DJ}(\mathcal{K}))\cong\mathbb{Z}^m$, и задает гомотопическую эквивалентность $\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})\simeq\Omega\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}\times\mathbb{T}^m$.* □

Следующее описание алгебры $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ впервые получено в [PR08, (8.4)] для $\mathbf{k}=\mathbb{Q}$, но рассуждение без труда обобщается на произвольное кольцо коэффициентов. Основные элементы доказательства — целочисленная *формальность* пространства $\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$ [NR05], кобар-конструкция Адамса (см. [FHT92]) и алгебраический результат Фроберга [Frö75].

Теорема 3.2 ([Vyl22, Theorem 1.1])**.** *Для каждого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ без призрачных вершин и коммутативного кольца $\mathbf{k}$ с единицей, имеем изоморфизм $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ градуированных $\mathbf{k}$-алгебр (относительно умножения Понтрягина и умножения Йонеды). Более точно, имеем*

$$H_n(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\bigoplus_{-i+2|\alpha|=n}\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{2\alpha}.$$

Этот изоморфизм задаёт $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировку на $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$. "Диагональная" подалгебра $D=\bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0}}H_{-|\alpha|,2\alpha}(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\subset H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ изоморфна алгебре

$$\mathbf{k}[\mathcal{K}]^! := T(u_1,\dots,u_m)/(u_i^2=0,\ i=1,\dots,m;\ u_iu_j+u_ju_i=0,\ \{i,j\}\in\mathcal{K}),\quad \deg u_i=(-1,2e_i).$$

Для флаговых $\mathcal{K}$ алгебра $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ совпадает с D, поэтому

$$H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!.\quad\square$$

Если $H_*(\Omega Y;\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, то cup-коумножение согласовано с умножением Понтрягина, поэтому эта ассоциативная алгебра является кокоммутативной $\mathbf{k}$-алгеброй Хопфа. Похожим образом, если A — коммутативная градуированная $\mathbf{k}$-алгебра такая, что $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, то шаффл-умножение на бар-конструкции (см. [Mac95, Theorem X.12.2]) индуцирует коммутативное коумножение на $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$, согласованное с умножением Йонеды. В нашем случае эти коумножения совпадают. Это следует из более сильного утверждения о формальности пространств Дэвиса–Янушкевича, так называемой *hga-формальности* [Fra21', Theorem 1.3].

Предложение 3.3 ([Fra21', Proposition 6.5])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс без призрачных вершин, $\mathbf{k}$ — область главных идеалов такая, что $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Тогда $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})\cong\mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ как алгебры Хопфа.*

Набросок доказательства. Пусть A — дифференциальная градуированная алгебра. Структура *гомотопической алгебры Герштенхабера* (hga-алгебры) на A — это выбор умножения на её бар-конструкции $\overline{\mathrm{B}}(A)$, превращающий $\overline{\mathrm{B}}(A)$ в дифференциальную градуированную биалгебру [Fra21', §4]. Такая структура возникает естественным образом, если A коммутативна (в качестве умножения надо взять шаффл-умножение) или $A=C^*(X;\mathbf{k})$ — это алгебра коцепей на 1-приведенном симплициальном множестве (тогда умножение фактически построено Бауэсом [Bau81, §2]). В таком случае $H^*(\Omega X;\mathbf{k}) \cong H^*\left[\overline{\mathrm{B}}(C^*(X;\mathbf{k}))\right]$ как биалгебры. Как доказал Франц [Fra21', Theorem 1.3], hga-алгебры $C^*(\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ и $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ квази-изоморфны. Функтор $\overline{\mathrm{B}}$ сохраняет квази-изоморфизмы, поэтому $H^*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \cong H^*(\overline{\mathrm{B}}(\mathbf{k}[\mathcal{K}]);\mathbf{k}) \cong \mathrm{Tor}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ как биалгебры. Так как структура алгебры Хопфа на биалгебре определяется однозначно, это изоморфизм алгебр Хопфа. Изоморфизм алгебр Хопфа $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbf{k}[\mathcal{K}]}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ получается из него дуализацией. □

Замечание 3.4. Алгебра $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ — не всегда свободный $\mathbf{k}$-модуль. Например, пусть $\mathcal{K}$ — минимальная триангуляция $\mathbb{R}P^2$. Тогда $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомотопически эквивалентно букету $\Sigma^7\mathbb{R}P^2$ и нескольких сфер [GPTW16, Example 3.3]. Имеем $\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \simeq \Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K} \times \mathbb{T}^m$, поэтому $\Omega\Sigma^7\mathbb{R}P^2$ — ретракт $\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$. Следовательно, $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbb{Z})$ имеет 2-кручение.

Вспомним, что элемент x *примитивен*, если $\Delta x = x\otimes 1 + 1\otimes x$, а алгебра Хопфа *примитивно порождена*, если она мультипликативно порождается своими примитивными элементами.

Гипотеза 3.5. *Алгебра Хопфа $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ примитивно порождена для всех симплициальных комплексов $\mathcal{K}$ и всех колец $\mathbf{k}$ таких, что $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль.*

Согласно глубоким результатам Андре и Шодина (см. [Avr98, Theorem 10.2.1(5)]), для каждого поля $\mathbf{k}$ алгебра Хопфа $\mathrm{Ext}_A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ является универсальной обертывающей некоторой алгебры Ли (2-ограниченной алгебры Ли, если $\operatorname{char}\mathbf{k} = 2$). В частности, эта алгебра Хопфа примитивно порождена. (Последнее также следует из результатов Браудер [Bro63], см. [Nei16, Theorem 10.4].) Поэтому гипотеза 3.5 верна, если $\mathbf{k}$ — поле.

Замечание 3.6. Алгебра Хопфа $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ не всегда примитивно порождена, даже если X — надстройка. Например, можно взять $X = \Sigma\mathbb{C}P^2$, $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/2$ (см. [BG12, §4.2]). С другой стороны, из [Hal92, Theorem B] следует, что $H_*(\Omega\Sigma\mathbb{C}P^d;\mathbb{Z}/p)$ примитивно порождена при всех $p > d$.

Теперь опишем связь между гомологиями петель пространств Дэвиса–Янушкевича и момент–угол-комплексов.

Предложение 3.7. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей такое, что $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Тогда*

$$\mathbf{k} \to H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}) \xrightarrow{\iota} H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \xrightarrow{p} \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \to \mathbf{k}$$

— расширение связных $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированных $\mathbf{k}$-алгебр Хопфа. Проекция p переводит u_i в u_i. Имеем также $\mathbf{k}$-линейное сечение $\sigma_* : \Lambda[u_1,\ldots,u_m] \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$, заданное формулой

$$\sigma_*(u_I) = \widehat{u}_I := u_{i_1}\cdot\ldots\cdot u_{i_k}, \quad I = \{i_1 < \cdots < i_k\}.$$

Таким образом, формула $\Phi(a\otimes u_I) := \iota(a)\cdot\widehat{u}_I$ задает изоморфизм левых $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$-модулей и правых $\Lambda[u_1,\ldots,u_m]$-комодулей, $\Phi : H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\Lambda[u_1,\ldots,u_m] \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$.

Доказательство. По теореме B.3, расслоение из предложения 3.1 задает требуемое расширение алгебр Хопфа. Формула для p следует из функториальности, так как отображение $\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \hookrightarrow \mathrm{DJ}(\Delta_{[m]}) \cong (\mathbb{C}P^\infty)^m$ индуцировано вложением $\mathcal{K} \hookrightarrow \Delta_{[m]}$. Формула для σ_* следует из описания гомотопического сечения $\sigma : \mathbb{T}^m \simeq \Omega B\mathbb{T}^m = (\Omega\mathbb{C}P^\infty)^{\times m} \to \Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$ как конкатенации петель, $(\gamma_1,\ldots,\gamma_m) \mapsto \gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_m$. Отображения p и σ_* согласованы с $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировкой, поэтому мультиградуировка на $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ корректно определена. □

Так как ι инъективно, мы отождествляем элементы алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ с их образами в $H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$. Опишем некоторые из этих элементов. Напомним, что мы обозначаем $[a,b] := ab + (-1)^{\deg(a)\deg(b)+1}ba$ и $c(I,x) := [u_{i_1},[u_{i_2},\ldots,[u_{i_k},x]\ldots]] \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ для $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ и $x \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$. В частности, $c(\varnothing,x) := x$ и $c(\{i\},u_j) = [u_i,u_j] = u_iu_j + u_ju_i$.

Следствие 3.8. *Пусть $x \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ — примитивный элемент такой, что $p(x) = 0$. Тогда $x \in H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие B.4 к расширению алгебр Хопфа из предложения 3.7. □

Следствие 3.9. *Пусть* $x \in H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ *— примитивный элемент, и пусть* $I \subset [m]$, $I \neq \varnothing$. *Тогда* $c(I,x) \in H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$.

Доказательство. Элементы $u_1, \dots, u_m \in H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ примитивны по соображениям размерности. Примитивные элементы образуют алгебру Ли, так что $c(I,x) \in H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ примитивен. Имеем $p(c(I,x)) = c(I, p(x)) = 0$, так как это коммутатор в коммутативной алгебре $\Lambda[m]$. Поэтому $c(I,x) \in H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ по следствию 3.8. □

Следствие 3.10. *Пусть* $j \in [m]$ *и* $I \subset [m]$, $I \neq \varnothing$. *Тогда* $c(I, u_j) \in H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$. □

3.3. **Флаговый случай.** Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс без призрачных вершин. По теореме 3.2, $H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, поэтому структура алгебры Хопфа $H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$ корректно определена. Кроме того. связная $\mathbf{k}$-алгебра $\mathbf{k}[\mathcal{K}]^!$ порождена примитивными элементами $u_1, \dots, u_m$ степени 1. Эти условия определяют структуру алгебры Хопфа однозначно. Поэтому во флаговом случае гипотеза 3.5 верна для всех $\mathbf{k}$.

Предложение 3.11 ([GPTW16, Corollary 5.2])**.** *Если* $\mathcal{K}$ *— флаговый симплициальный комплекс, то* $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$ *— свободный* $\mathbf{k}$*-модуль конечного типа.* □

Итак, во флаговом случае имеем расширение алгебр Хопфа
$$\mathbf{k} \to H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \to \Lambda[m] \to \mathbf{k}$$
(из предложения 3.7) для любого кольца $\mathbf{k}$.

4. Основные вычисления

Далее $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$ без призрачных вершин, а $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей. Мы рассматриваем $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированные $\mathbf{k}$-алгебры, которые связны относительно тотальной градуировки $A_n := \bigoplus_{n=-i+|\alpha|} A_{-i,\alpha}$.

4.1. Резольвенты и формулы для дифференциалов.

Согласно [Vyl22, Proposition 4.1], левый $H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k})$-модуль $\mathbf{k}$ имеет свободную резольвенту $(H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, d)$, $\deg \chi_\alpha := (|\alpha|, -|\alpha|, 2\alpha)$, $\deg(d) = (-1, 0, 0)$, с дифференциалом
$$d(1 \otimes \chi_\alpha) := \sum_{i \in \mathrm{supp}(\alpha)} u_i \otimes \chi_{\alpha - e_i}.$$
Изоморфизм левых $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$-модулей
$$\Phi : H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \to H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}), \quad a \otimes u_I \mapsto a \cdot \widehat{u}_I$$
из предложения 3.7 позволяет рассматривать эту резольвенту как свободную резольвенту $(H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, \widehat{d})$ левого $H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})$-модуля $\mathbf{k}$. Применяя функтор $\mathbf{k} \otimes_{H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})} (-)$, мы получаем цепной комплекс $(\Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, \overline{d})$, гомологии которого изоморфны $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$. Дифференциалы $\widehat{d}$ и $\overline{d}$ определяются коммутативной диаграммой
$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n)} \arrow[r, "d"] & H_*(\Omega \mathrm{DJ}(\mathcal{K}); \mathbf{k}) \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n-1)} \arrow[r] & \dots \\
\dots \arrow[r] & H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n)} \arrow[r, dashed, "\widehat{d}"] \arrow[u, "\Phi\otimes\mathrm{id}", "\simeq"'] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] & H_*(\Omega \mathcal{Z}_{\mathcal{K}}; \mathbf{k}) \otimes \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n-1)} \arrow[r] \arrow[u, "\Phi\otimes\mathrm{id}", "\simeq"'] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] & \dots \\
\dots \arrow[r] & \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n)} \arrow[r, dashed, "\overline{d}"] & \Lambda[m] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n-1)} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$
Здесь $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle_{(n)}$ — $\mathbf{k}$-подмодуль в $\mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle$ с базисом $\{\chi_\alpha : \ |\alpha| = n\}$. Та же конструкция, но с другими знаками, рассматривалась автором в [Vyl22, Section 4]. Теперь опишем дифференциалы $\widehat{d}$ явно. Определим кошулев знак $\theta(A,B) := |\{(a,b) \in A \times B : \ a > b\}|$ для подмножеств $A, B \subset [m]$.

Предложение 4.1. *Дифференциал $\widehat{d}$ задается формулой*

$$\begin{aligned}\widehat{d}(1\otimes u_I\otimes\chi_\alpha) = &\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}(-1)^{|I|}\cdot 1\otimes(u_I\wedge u_i)\otimes\chi_{\alpha-e_i}\\ &+\sum_{\substack{i\in\operatorname{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}}(-1)^{|I|}c(I,u_i)\otimes 1\otimes\chi_{\alpha-e_i}\\ &+\sum_{\substack{i\in\operatorname{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}}\ \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\\ B\neq\varnothing}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}c(A,u_i)\otimes u_B\otimes\chi_{\alpha-e_i}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Дифференциал $\overline{d}$ задается формулой

$$\overline{d}(u_I\otimes\chi_\alpha)=(-1)^{|I|}\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}(u_I\wedge u_i)\otimes\chi_{\alpha-e_i}.\tag{4.2}$$

Замечание 4.2. Мы обозначаем $\max(\varnothing):=-\infty$. Таким образом, при $I=\varnothing$ вторая и третья суммы равны нулю.

Доказательство предложения. Вспомним, что $u_j^2=0\in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$. По предложению C.2, имеем

$$\begin{aligned}\widehat{u}_I\cdot u_i &= 1\cdot\begin{cases}(-1)^{|I_{>i}|}\widehat{u}_{I\sqcup i}, & i\notin I;\\ 0, & i\in I;\end{cases}+\sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,u_i)\cdot\widehat{u}_B\\ &=\Phi\Big(1\otimes(u_I\wedge u_i)+\sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,u_i)\otimes u_B\Big)\in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}).\end{aligned}$$

(Здесь $c(A,u_i)\in H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ по следствию 3.10.) Обозначим $\Phi_0=\Phi\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle}$. Тогда

$$\Phi_0(\widehat{d}(1\otimes u_I\otimes\chi_\alpha))=d(\Phi_0(1\otimes u_I\otimes\chi_\alpha))=d(\widehat{u}_I\otimes\chi_\alpha)=(-1)^{|I|}\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\widehat{u}_Iu_i\otimes\chi_{\alpha-e_i}$$

$$=(-1)^{|I|}\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\Phi_0\Big(1\otimes(u_I\wedge u_i)\otimes\chi_{\alpha-e_i}+\sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,u_i)\otimes u_B\otimes\chi_{\alpha-e_i}\Big).$$

Применив Φ_0^{-1}, получаем

$$\widehat{d}(1\otimes u_I\otimes\chi_\alpha)=\sum_{i\in\operatorname{supp}(\alpha)}\Big((-1)^{|I|}\cdot 1\otimes(u_I\wedge u_i)\otimes\chi_{\alpha-e_i}+\sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}c(A,u_i)\otimes u_B\otimes\chi_{\alpha-e_i}\Big).$$

С точностью до элементарных преобразований, это в точности формула (4.1). При гомоморфизме $\varepsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$ она переходит в формулу (4.2), так как $\varepsilon(1)=1$ и $\varepsilon(c(A,u_i))=0$ для $A\neq\varnothing$. $\square$

4.2. **Вычисление Tor-модулей.** По [Vyl22, Theorem 1.2], для флаговых $\mathcal{K}$ имеем $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуированный изоморфизм $\mathbf{k}$-модулей

$$\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),\quad \mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).\tag{4.3}$$

Заметим, что гомологии $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ допускают $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировку, и для любого $\mathcal{K}$ имеем аналогичный аддитивный изоморфизм, двойственный к [BP15, Theorem 4.5.8]:

$$H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\cong\bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),\quad H_{n-|J|,2J}(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\cong\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Поэтому во флаговом случае имеем $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\cong H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$. Более того, оба модуля вычисляются как гомологии комплекса $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,d)$.

Замечание 4.3. В общем случае, если пространство X односвязно, и $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ свободно над $\mathbf{k}$, определена *спектральная последовательность Милнора–Мура* $E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_q \Rightarrow H_{p+q}(X;\mathbf{k})$. Как видно, она вырождается на E^2 для $X = \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, если $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.

Построим цепное отображение g, индуцирующее изоморфизм (4.3). Для всякого цепного комплекса $(C_\bullet, d)$ свободных $\mathbf{k}$-модулей определён *дуальный комплекс*

$$(C^\bullet, d_{dual}),\quad C^n := \mathrm{Hom}_\mathbf{k}(C_n,\mathbf{k}),\quad d_{dual}(f) : c \mapsto f(d(c)).$$

Дуализация сохраняет изоморфизмы и цепные гомотопии. Для каждого симплициального комплекса $\mathcal{K}$ приведенный комплекс симплициальных цепей $\widetilde{C}_*(\mathcal{K};\mathbf{k})$ имеет базис $\{[I] :\ I \in \mathcal{K}\}$, $\deg[I] := |I|+1$ и дифференциал

$$d([I]) := \sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|}[I\setminus i].$$

Дуальный комплекс — это приведенный комплекс симплициальных коцепей $(\widetilde{C}^*(\mathcal{K};\mathbf{k}), d_{dual})$, имеющий базис $\{[I]^* :\ I\in\mathcal{K}\}$ и дифференциал

$$d_{dual}([I]^*) = \sum_{\substack{i\notin I:\\ I\sqcup i\in\mathcal{K}}}(-1)^{|I_{<i}|}[I\sqcup i]^*.$$

Предложение 4.4. *Для каждого $J\subset[m]$ рассмотрим отображение*

$$g_J : \widetilde{C}_{*-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \to (\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{*,-|J|,2J},\quad [L]\mapsto \epsilon(L,J)\cdot u_{J\setminus L}\otimes\chi_L,$$

где $\epsilon(L,J) := (-1)^{\sum_{\ell\in L}|J_{<\ell}|}$. Тогда g_J — цепное отображение, а их прямая сумма

$$g : \bigoplus_{J\subset[m]}\widetilde{C}_*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \to (\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$$

индуцирует изоморфизм в гомологиях. Следовательно,

$$H_{n,-|J|,2J}(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d}) \cong \widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),\quad J\subset[m],\ n\geq 0,$$

а остальные градуированные компоненты модуля $H_*(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$ равны нулю.

Так как $\mathrm{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k}) \cong H(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$, из этого предложения следует формула (4.3). Его доказательство получается дуализацией рассуждений из [BP15, §3.2].

Доказательство предложения 4.4. Рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру $(\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}], d)$, где дифференциал задан на образующих как $d(u_i)=v_i$, $d(v_i)=0$, а $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq 0}$-градуировка — как

$$\deg u_i := (0,-1,2e_i),\quad \deg v_i := (1,-1,2e_i),\quad \deg d := (1,0,0).$$

Этот комплекс имеет базис $\{u_I v^\alpha :\ I\subset[m],\ \alpha\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0},\ \mathrm{supp}(\alpha)\in\mathcal{K}\}$ и дифференциалы

$$d(u_I v^\alpha) = \sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|}u_{I_{<i}}v_i u_{I_{>i}}v^\alpha = \sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|}u_{I\setminus i}v_i v^\alpha.$$

Дуальный комплекс $(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}])^*$ имеет базис $\{(u_I v^\alpha)^* :\ I\subset[m],\ \mathrm{supp}(\alpha)\in\mathcal{K}\}$ и дифференциал

$$d_{dual}((u_I v^\alpha)^*) = \sum_{i\in\mathrm{supp}(\alpha):\ i\notin I}(-1)^{|I_{<i}|}(u_{I\sqcup i}v^{\alpha-e_i})^*.$$

Эта формула аналогична (4.2). Получаем изоморфизм цепных комплексов

$$\psi : (\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d}) \to ((\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}])^*, d_{dual}),\quad u_I\otimes\chi_\alpha \mapsto (u_I v^\alpha)^*.$$

Теперь рассмотрим дифференциальную градуированную алгебру $R^*(\mathcal{K}) := (\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}])/(u_i v_i = v_i^2 = 0,\ i=1,\dots,m)$. Она корректно определена, так как $(u_i v_i, v_i^2)\subset\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ — d-инвариантный идеал. Следующие факты получены в ходе доказательства [BP15, Theorem 3.2.9].

Лемма 4.5 ([BP15, Lemma 3.2.6])**.** *Естественная проекция $\pi : \Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}] \to R^*(\mathcal{K})$ является цепной гомотопической эквивалентностью.* $\square$

Лемма 4.6. *Корректно определены цепные отображения* $f_J : \widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \to R^*(\mathcal{K})$,

$$f_J : \widetilde{C}^{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} R^{n,-n,2J}(\mathcal{K}), \quad [L]^* \mapsto \epsilon(L,J)\cdot u_{J\setminus L}v^L, \quad \epsilon(L,J) := (-1)^{\sum_{\ell\in L}|J_{<\ell}|}.$$

Их прямая сумма $f : \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \to R^*(\mathcal{K})$ *— это изоморфизм цепных отображений.*

□

После дуализации получаем цепную гомотопическую эквивалентность π^* и изоморфизм f^* цепных комплексов. Осталось показать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{C}^*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}) \arrow[r, "g"] & (\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle, \overline{d}) \\ (R^*(\mathcal{K}))^* \arrow[u, "f^*", "\simeq"'] \arrow[r, "\pi^*", "\sim"'] & ((\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}])^*, d_{dual}) \arrow[u, "\psi", "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Действительно, $f^*((u_{J\setminus L}v^L)^*) = \epsilon(L,J)\cdot[L]$, поэтому

$$g(f^*((u_{J\setminus L}v^L)^*) = \epsilon(L,J)\cdot\epsilon(L,J)u_{J\setminus L}\otimes\chi_L = \psi(\pi^*((u_{J\setminus L}v^L)^*)).$$

□

Замечание 4.7. В наших обозначениях имеем $\epsilon(L,J) = (-1)^n$, $n = \theta(J\setminus L, L) + |L|(|L|-1)/2$ для всех $L\subset J$.

4.3. **Цепное отображение в бар-резольвенту.**

Теорема 4.8. *Тождественное отображение левого* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$*-модуля* $\mathbf{k}$ *продолжается до отображения свободных резольвент* $\varphi_\bullet : (H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})\otimes\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle, \widehat{d}) \to (\mathrm{B}_*(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})), d_\mathrm{B})$, *заданного формулой*

$$\varphi_n(u_I\otimes\chi_\alpha) = (-1)^{|I|} \sum_{\substack{\alpha=e_{i_1}+\dots+e_{i_n},\\ I=A_1\sqcup\dots\sqcup A_n:\\ \max(A_t)>i_t,\ \forall t\in[n]}} (-1)^{\sum_{1\le t_1<t_2\le n}\theta(A_{t_1},A_{t_2})} \Big[c(A_1,u_{i_1})\Big|\dots\Big|c(A_n,u_{i_n})\Big].$$

Доказательство. Применим следствие 2.2 для $\overline{\varphi}_0(u_I) = \varepsilon(u_I)$. Достаточно показать, что $\varphi_{n+1}(u_I\otimes\chi_\alpha) = s(\varphi_n(\widehat{d}(u_I\otimes\chi_\alpha)))$ при $|\alpha| = n+1$, $n\ge 0$. Из формулы (4.1) и $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$-линейности отображения φ_n имеем

$$\varphi_n(\widehat{d}(u_I\otimes\chi_\alpha)) = \sum_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)} (-1)^{|I|}\varphi_n((u_I\wedge u_i)\otimes\chi_{\alpha-e_i})$$

$$+ \sum_{\substack{i\in\mathrm{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}} (-1)^{|I|}c(I,u_i)\varphi_n(1\otimes\chi_{\alpha-e_i}) + \sum_{\substack{i\in\mathrm{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}} \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\\ B\ne\varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|A|}c(A,u_i)\varphi_n(u_B\otimes\chi_{\alpha-e_i}).$$

Первая сумма отображается в ноль под действием s, так как все слагаемые лежат в $\overline{\mathrm{B}}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}))\subset \operatorname{Ker} s\subset \mathrm{B}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}))$. Все слагаемые второй суммы равны нулю по определению φ_n. Поэтому только третья сумма вносит вклад в $s(\varphi_n(\widehat{d}(u_I\otimes\chi_\alpha)))$. Имеем

$$s(\varphi_n(\widehat{d}(u_I\otimes\chi_\alpha))) = \sum_{\substack{i\in\mathrm{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}} \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\\ B\ne\varnothing}} \sum_{\substack{\alpha-e_i=e_{i_1}+\dots+e_{i_n},\\ B=A_1\sqcup\dots\sqcup A_n:\\ \max(A_t)>i_t,\ \forall t\in[n]}} (-1)^\zeta s\Big(c(A,u_i)\Big[c(A_1,u_{i_1})\Big|\dots\Big|c(A_n,u_{i_n})\Big]\Big)$$

$$= \sum_{\substack{i\in\mathrm{supp}(\alpha):\\ \max(I)>i}} \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\\ B\ne\varnothing}} \sum_{\substack{\alpha-e_i=e_{i_1}+\dots+e_{i_n},\\ B=A_1\sqcup\dots\sqcup A_n:\\ \max(A_t)>i_t,\ \forall t\in[n]}} (-1)^\zeta \Big[c(A,u_i)\Big|c(A_1,u_{i_1})\Big|\dots\Big|c(A_n,u_{i_n})\Big],$$

где $\zeta = |B| + \theta(A,B) + |A| + \sum_{1\le t_1<t_2\le n}\theta(A_{t_1},A_{t_2})$. Обозначим $i = i_0$, $A = A_0$, тогда

$$s(\varphi_n(\widehat{d}(u_I\otimes\chi_\alpha))) = \sum_{\substack{\alpha=e_{i_0}+\dots+e_{i_n},\\ I=A_0\sqcup\dots\sqcup A_n:\\ \max(A_t)>i_t,\ t=0,\dots,n}} (-1)^{\sum_{t=1}^n\theta(A_0,A_t)+|I|+\sum_{1\le t_1<t_2\le n}\theta(A_{t_1},A_{t_2})} \Big[c(A_0,u_{i_0})\Big|\dots\Big|c(A_n,u_{i_n})\Big].$$

С точностью до сдвига нумерации, правая часть равна $\varphi_{n+1}(u_I\otimes\chi_\alpha)$.

□

Теорема 4.9. *Зафиксируем* $J\subset[m]$. *Пусть класс* $\alpha\in\mathrm{Tor}_n^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ *представлен циклом*

$$\kappa=\sum_{I\in\mathcal{K}_J,|I|=n}\lambda_I\cdot[I]\in\widetilde{C}_{n-1}(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Тогда тот же класс представлен циклом $\kappa'\in\overline{\mathrm{B}}_n(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}))_{-|J|,2J}$ *в бар-конструкции,*

$$\kappa':=\sum_{I\in\mathcal{K}_J,|I|=n}\epsilon(I,J)\lambda_I\sum_{\substack{I=\{i_1,\dots,i_n\},\\ J\setminus I=J_1\sqcup\dots\sqcup J_n:\\ \max(J_t)>i_t,\ \forall t\in[n]}}(-1)^{\sum_{1\le t_1<t_2\le n}\theta(J_{i_1},J_{i_2})}\Big[c(J_1,u_{i_1})\Big|\dots\Big|c(J_n,u_{i_n})\Big].$$

Доказательство. Отображение $\widetilde{H}_*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\to\mathrm{Tor}_*^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ индуцировано композицией цепных отображений

$$\bigoplus\nolimits_{J\subset[m]}\widetilde{C}_*(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\xrightarrow[\sim]{g}(\Lambda[m]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})\xrightarrow[\sim]{\overline{\varphi}}(\overline{\mathrm{B}}(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})),d_{\overline{\mathrm{B}}}),$$

где g определено в предложении 4.4, а $\overline{\varphi}$ индуцировано цепным отображением φ из теоремы 4.8. Имеем $\kappa'=\overline{\varphi}(g(\kappa))$ по построению. □

Формула становится проще при $n=1,2$.

Следствие 4.10. *Зафиксируем* $J\subset[m]$. *Пусть класс* $\alpha\in\mathrm{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J)$ *представлен циклом*

$$\kappa=\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}\lambda_{ij}[\{i,j\}]\in\widetilde{C}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}).$$

Тогда тот же класс представлен следующим циклом в бар-конструкции:

$$\kappa'=\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|J_{<i}|+|J_{<j}|}\lambda_{ij}\sum_{\substack{J\setminus\{i,j\}=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>j}}(-1)^{\theta(A,B)}\Big[c(A,u_i)\Big|c(B,u_j)\Big]+(-1)^{\theta(B,A)}\Big[c(B,u_j)\Big|c(A,u_i)\Big].\quad\square$$

Следствие 4.11. *Пусть* $J\subset[m]$, *и пусть симплициальный комплекс* $\mathcal{K}_J$ *имеет* $t+1$ *компонент связности. Выберем по одной вершине* $i_1,\dots,i_t,\max(J)$ *в каждой из этих компонент. Тогда* $\mathbf{k}$*-модуль* $\mathrm{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}\cong\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\simeq\mathbf{k}^t$ *имеет базис, представленный циклами*

$$\Big[c(J\setminus i_s,u_{i_s})\Big]\in\overline{\mathrm{B}}_1(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K}))_{-|J|,2J},\quad s=1,\dots,t.$$

Доказательство. Обозначим $j:=\max(J)$. Модуль $\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ имеет базис, представленный циклами $\kappa_s=[\{j\}]-[\{i_s\}]\in\widetilde{C}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$, $1\le s\le t-1$. По теореме 4.9, модуль $\mathrm{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-|J|,2J}$ имеет базис, представленный циклами

$$\kappa_s'=0\pm\Big[c(J\setminus i_s,u_{i_s})\Big],\quad s=1,\dots,t.$$

(Слагаемое $[\{j\}]$ в κ_s не вносит вклад в κ_s', так как подмножество $J_1:=J\setminus\{j\}$ не удовлетворяет условию $\max(J_1)>j$.) □

5. Образующие и соотношения во флаговом случае

5.1. **Минимальные наборы образующих.** Обозначим $\widetilde{b}_0(X):=\operatorname{rank}\widetilde{H}_0(X;\mathbf{k})$. Это число не зависит от $\mathbf{k}$, так как $\widetilde{b}_0(X)+1$ равно числу компонент связности пространства X.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathcal{K}$ — *флаговый симплициальный комплекс на множестве вершин* $[m]$, $\mathbf{k}$ — *коммутативное кольцо с единицей. Для каждого* $J\subset[m]$ *выберем* $\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$*-элементное подмножество* $\Theta(J)\subset J\setminus\{\max(J)\}$ *так, чтобы* $\Theta(J)\sqcup\{\max(J)\}$ *содержало ровно по одной вершине из каждой компоненты связности комплекса* $\mathcal{K}_J$. *Тогда алгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ *мультипликативно порождена следующим набором из* $\sum_{J\subset[m]}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *элементов:*

$$\Big\{c(J\setminus i,u_i):\quad i\in\Theta(J),\ J\subset[m]\Big\},\quad c(J\setminus i,u_i)\in H_{-|J|,2J}(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}).$$

Если $\mathbf{k}$ — *область главных идеалов, то это множество минимально: любое* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\ge0}$*-однородное копредставление алгебры* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ *содержит хотя бы* $\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих степени* $(-|J|,2J)$, *а любое* $\mathbb{Z}$*-однородное копредставление — хотя бы* $\sum_{|J|=n}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих степени* n.

Доказательство. По следствию 4.11, образы циклов $\{[c(J \setminus i, u_i)] : J \subset [m], i \in \Theta(J)\} \subset \overline{\mathrm{B}}_1(H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k}))$ аддитивно порождают $\mathbf{k}$-модуль $\mathrm{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Поэтому, по пункту (1) теоремы A.6, алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ мультипликативно порождена описанными элементами. Нижняя оценка на число образующих следует из формулы (4.3) и пункта (2) теоремы A.10. □

Определение 5.2. Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$, и пусть $J \subset [m]$. Выберем в качестве $\Theta(J)$ множество наименьших вершин соответствующих компонент связности. Более точно, определим $\Theta(J)$ как множество всех таких вершин $i \in J$, что

(1) i и $\max(J)$ принадлежат разным компонентам связности комплекса $\mathcal{K}_J$;
(2) i — наименьшая вершина (имеет наименьший номер) в своей компоненте связности.

Соответствующий набор образующих $\{c(J \setminus i, u_i) :\ i \in \Theta(J),\ J \subset [m]\}$ мы будем называть *GPTW-образующими.*

Грбич, Панов, Терио и Ву доказали [GPTW16, Theorem 4.3], что GPTW-образующие минимально порождают алгебру $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$, если $\mathbf{k}$ является полем. Минимальность была доказана топологическими методами. Наша теорема 5.1 дает чисто алгебраическое доказательство, которое проходит для любого кольца $\mathbf{k}$.

5.2. **Переписывание вложенных коммутаторов.** Итак, GPTW-образующие мультипликативно порождают алгебру $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ для любого кольца $\mathbf{k}$ и любого флагового комплекса $\mathcal{K}$.

Определение 5.3. Пусть $i \in J \subset [m]$. Выразим элемент $c(J \setminus i, u_i) \in H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ как некоммутативный многочлен от GPTW-образующих (этот многочлен определен не однозначно). Любое такое выражение мы будем обозначать $\widehat{c}(J \setminus i, u_i)$.

Эти некоммутативные многочлены можно вычислить рекурсивно, следуя доказательству [GPTW16, Theorem 4.3]. Опишем явный алгоритм.

Алгоритм 5.4. Пусть выражения $\widehat{c}(A \setminus t, u_t)$, $|A| < |J|$, уже вычислены, и надо вычислить $\widehat{c}(J \setminus i, u_i)$. Возможны три случая:

(1) $i = \max(J)$. Обозначим $j = \max(J \setminus i)$. Тогда $c(J \setminus i, u_i) = c(J \setminus ij, [u_j, u_i]) = c(J \setminus j, u_j)$. Задача сведена к случаю $i \neq \max(J)$.
(2) i и $\max(J)$ лежат в одной компоненте связности комплекса $\mathcal{K}_J$. Назовём *рангом* вершины i длину кратчайшего пути из i в $\max(J)$ по рёбрам комплекса $\mathcal{K}_J$. Случай ранга ноль рассмотрен выше. Если ранг равен 1, то имеем $[u_{\max(J)}, u_i] = 0$, поэтому
$$c(J \setminus i, u_i) = c(J \setminus \{i, \max(J)\}, [u_{\max(J)}, u_i]) = 0.$$
Пусть теперь ранг больше 1, и $\{i, j\}$ — первое ребро в (любом) кратчайшем пути из i в $\max(J)$. Так как $[u_i, u_j] = 0 \in H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$, тождество (C.4) позволяет выразить $c(J \setminus i, u_i)$ через $c(J \setminus j, u_j)$ (этот элемент имеет меньший ранг) и коммутаторы меньшей степени (выражения для которых уже вычислены).
(3) i и $\max(J)$ лежат в разных компонентах связности. Пусть i_0 — наименьшая вершина в компоненте связности, содержащей i. Назовём *рангом* вершины i длину кратчайшего пути из i в i_0. Если ранг равен нулю, то $i \in \Theta(J)$, поэтому можно взять $\widehat{c}(J \setminus i, u_i) := c(J \setminus i, u_i)$. Иначе мы уменьшаем ранг с помощью тождества (C.4), как в случае (2).

5.3. **Минимальные наборы соотношений.** Пусть M — конечно порожденный $\mathbf{k}$-модуль. Обозначим через $\mathrm{gen}(M)$ наименьшее число его порождающих. Обозначим $b_0(X) := \mathrm{gen}(\widetilde{H}_0(X;\mathbf{k}))$, $b_1(X;\mathbf{k}) := \mathrm{gen}(H_1(X;\mathbf{k}))$.

Теорема 5.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве вершин $[m]$, $\mathbf{k}$- — коммутативное кольцо с единицей. Для каждого $J \subset [m]$ выберем набор симплициальных 1-циклов*
$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J} \lambda_{ij}^{(\alpha)}[\{i,j\}] \in \widetilde{C}_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}),$$

порождающих $\mathbf{k}$*-модуль* $H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$*. Тогда алгебра* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ *мультипликативно порождается GPTW-образующими* $\{c(J\setminus i,u_i):\ i\in\Theta(J),\ J\subset[m]\}$ *(см. определение 5.2) и задается соотношениями*

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|J_{<i}|+|J_{<j}|}\lambda_{ij}^{(\alpha)}\sum_{\substack{J\setminus\{i,j\}=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>j}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\Big[\widehat{c}(A,u_i),\widehat{c}(B,u_j)\Big]=0. \tag{5.1}$$

В частности, $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ *допускает копредставление, в котором* $\sum_{J\subset[m]}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих и* $\sum_{J\subset[m]}b_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ *соотношений: нужно взять 1-циклы, соответствующие минимальным наборам порождающих.*

Если $\mathbf{k}$ *— область главных идеалов, то это копредставление минимально: любое* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$*-однородное копредставление содержит хотя бы* $b_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$ *соотношений степени* $(-|J|,2J)$ *для каждого* $J\subset[m]$*.*

Доказательство. По следствию 4.10, выбранные 1-циклы соответствуют элементам

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|J_{<i}|+|J_{<j}|}\lambda_{ij}^{(\alpha)}\sum_{\substack{J\setminus ij=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>j}}(-1)^{\theta(A,B)}\Big[c(A,u_i)\Big|c(B,u_j)\Big]+(-1)^{\theta(B,A)}\Big[c(B,u_j)\Big|c(A,u_i)\Big]$$

в бар-конструкции, образы которых аддитивно порождают модуль $\mathrm{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Применим пункт (2) теоремы A.6. (В обозначениях этой теоремы, мы берем GPTW-образующие в качестве $a_1,\dots,a_N$. Их образы свободно порождают модуль $\mathrm{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$, поэтому можно взять $R=0$. Мы берем $\widehat{c}(A,u_i)$ и $\widehat{c}(B,u_j)$ в качестве многочленов $P_{j,\alpha}$ и $Q_{j,\alpha}$.) Мы получаем, что алгебра $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ порождена GPTW-образующими по модулю соотношений

$$\sum_{\{i<j\}\in\mathcal{K}_J}(-1)^{|J_{<i}|+|J_{<j}|}\lambda_{ij}^{(\alpha)}\sum_{\substack{J\setminus ij=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>j}}(-1)^{\theta(A,B)}\overline{\widehat{c}(A,u_i)}\widehat{c}(B,u_j)+(-1)^{\theta(B,A)}\overline{\widehat{c}(B,u_j)}\widehat{c}(A,u_i)=0.$$

Обозначим $x=\widehat{c}(A,u_i)$, $y=\widehat{c}(B,u_j)$. Так как $\theta(A,B)+\theta(B,A)\equiv|A|\cdot|B|$, имеем

$$\begin{aligned}(-1)^{\theta(A,B)}\overline{x}y+(-1)^{\theta(B,A)}\overline{y}x&=(-1)^{\theta(A,B)}\Big((-1)^{|A|}xy+(-1)^{|B|+|A|\cdot|B|}yx\Big)\\&=(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\Big(xy-(-1)^{(|A|+1)(|B|+1)}yx\Big)=(-1)^{\theta(A,B)+|A|}[x,y].\end{aligned}$$

Поэтому полученные соотношения совпадают с (5.1). Наконец, нижняя оценка на число соотношений следует из формулы (4.3) и пункта (2) теоремы A.10. □

Иногда число соотношений можно уменьшить, если не требовать, чтобы копредставление было $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$-однородным. Например, предположим, что для некоторых $I,J\subset[m]$ выполнено $|I|=|J|=n$, $H_1(\mathcal{K}_I;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/2$, $H_1(\mathcal{K}_J;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/3$. Тогда мультиградуированные компоненты модуля $\mathrm{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Z})}(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ степеней $(-n,2I)$ и $(-n,2J)$ равны $\mathbb{Z}/2$ и $\mathbb{Z}/3$, соответственно. По теореме A.10, любое $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$-однородное копредставление алгебры $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbb{Z})$ содержит соотношения этих мультистепеней. С другой стороны, эти $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$-градуированные компоненты вносят вклад $\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/3\simeq\mathbb{Z}/6$ в $\mathbb{Z}$-градуированную компоненту степени n. Поэтому эти два $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^m_{\geq0}$-однородные соотношения эквивалентны одному $\mathbb{Z}$-однородному соотношению (например, сумме исходных соотношений). Сформулируем общее утверждение.

Теорема 5.6. *Пусть* $\mathcal{K}$ *— флаговый симплициальный комплек,* $\mathbf{k}$ *— область главных идеалов. Рассмотрим все однородные копредставления* $\mathbb{Z}$*-градуированной* $\mathbf{k}$*-алгебры* $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$*.*

1. *Существует копредставление, которое для каждого* $n\geq0$ *содержит ровно* $\sum_{|J|=n}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *образующих и ровно* $\mathrm{gen}(\bigoplus_{|J|=n}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}))$ *соотношений степени* n*. В качестве образующих можно взять GPTW-образующие, а в качестве соотношений — линейные комбинации тождеств из теоремы 5.5, соответствующие минимальному набору порождающих* $\mathbf{k}$*-модуля* $\bigoplus_{|J|=n}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})$*.*
2. *Для каждого* $n\geq0$*, любое копредставление содержит хотя бы* $\sum_{|J|=n}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ *и хотя бы* $\mathrm{gen}(\bigoplus_{|J|=n}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k}))$ *соотношений степени* n*.*

Доказательство. По теореме A.10, число $\operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ (соответственно, число $\operatorname{gen}\operatorname{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_n+\operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$) даёт точную оценку на число образующих (соответственно, соотношений) степени n. По формуле (4.3) имеем

$$\operatorname{Tor}_1^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_n=\bigoplus_{|J|=n}\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J;\mathbf{k})\simeq\mathbf{k}^{\sum_{|J|=n}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)},\ \operatorname{Tor}_2^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})=\bigoplus_{|J|=n}H_1(\mathcal{K}_J;\mathbf{k});$$

поэтому $\operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1=\sum_{|J|=n}\widetilde{b}_0(\mathcal{K}_J)$ и $\operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1=0$. В качестве образующих можно взять GPTW-образующие, так как образы соответствующих циклов порождают Tor_1 по следствию 4.11. □

5.4. **Пример: момент–угол-комплексы для m-циклов.** Пусть $\mathcal{K}$ — граница m-угольника. Соответствующий момент–угол-комплекс $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер, $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\cong\#_{k=3}^{m-1}(S^k\times S^{m+2-k})^{\#(k-2)\binom{m-2}{k-1}}$, поэтому $H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$ — алгебра с одним соотношений. Она рассматривалась в работах [Ver16, GIPS21]. С точки зрения теоремы 5.5, соотношение соответствует 1-циклу

$$\kappa=[\{1,m\}]-\sum_{i=1}^{m-1}[\{i,i+1\}]\in\widetilde{C}_1(\mathcal{K};\mathbf{k})$$

и имеет вид

$$\sum_{\substack{\{2,\dots,m-1\}=A\sqcup B:\\ \max(A)>1,\ \max(B)>m}}(\dots)\ -\ \sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{(i-1)+i}\sum_{\substack{[m]\setminus\{i,i+1\}=A\sqcup B:\\ \max(A)>i,\ \max(B)>i+1}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\Big[\widehat{c}(A,u_i),\widehat{c}(B,u_{i+1})\Big]=0.$$

Первая сумма пуста, так как $\max(B)\le m-1$. Аналогично, внутренняя сумма второй суммы пуста при $i=m-1,m-2$. Упрощенное соотношение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m-3}\sum_{\substack{[m]\setminus\{i,i+1\}=A\sqcup B:\\ \max(A),\max(B)\ge i+2}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\Big[\widehat{c}(A,u_i),\widehat{c}(B,u_{i+1})\Big]=0.$$

Некоторые слагаемые тоже автоматически равны нулю. Например, если $\max(B)=i+2$, то $c(B,u_{i+1})=c(B\setminus\{i+2\},[u_{i+2},u_{i+1}])=0$, поэтому можно взять $\widehat{c}(B,u_{i+1})=0$. Аналогично, $c(A,u_1)=0$, если $i=1$ и $m\in A$. Остальные слагаемые можно вычислить с помощью алгоритма 5.4. Нам не удалось получить замкнутую формулу для этого соотношения (явный многочлен от GPTW-образующих или какого-то другого набора минимальных образующих). Но по крайней мере имеем эффективный алгоритм, вычисляющий это соотношение для произвольного m.

Рассмотрим случай $m=5$. Помимо рассмотренных выше разбиений $[5]\setminus\{i,i+1\}=A\sqcup B$, при $i=1$ допустимы разбиения $\{3,4,5\}=\{3\}\sqcup\{4,5\}=\{4\}\sqcup\{3,5\}=\{3,4\}\sqcup\{5\}$; при $i=2$ допустимы разбиения $\{1,4,5\}=\{4\}\sqcup\{1,5\}=\{1,4\}\sqcup\{5\}$. Полученное соотношение имеет пять слагаемых:

$$\begin{aligned}(-1)^{\theta(3,45)+1}\Big[\widehat{c}(3,u_1),\widehat{c}(45,2)\Big]+(-1)^{\theta(4,35)+1}\Big[\widehat{c}(4,u_1),\widehat{c}(35,2)\Big]+(-1)^{\theta(34,5)+2}\Big[\widehat{c}(34,u_1),\widehat{c}(5,u_2)\Big]\\+(-1)^{\theta(4,15)+1}\Big[\widehat{c}(4,u_2),\widehat{c}(15,u_3)\Big]+(-1)^{\theta(14,5)+2}\Big[\widehat{c}(14,u_2),\widehat{c}(5,u_3)\Big]=0.\end{aligned}$$

Все коммутаторы, кроме $\widehat{c}(14,u_2)=[u_1,[u_4,u_2]]=-[u_2,[u_4,u_1]]=-c(24,u_1)$, уже являются GPTW-образубщими. Получаем следующее соотношение между образующими:

$$\begin{aligned}-\Big[[u_3,u_1],[u_4,[u_5,u_2]]\Big]+\Big[[u_4,u_1],[u_3,[u_5,u_2]]\Big]-\Big[[u_5,u_2],[u_3,[u_4,u_1]]\Big]\\+\Big[[u_4,u_2],[u_1,[u_5,u_3]]\Big]+\Big[[u_5,u_3],[u_2,[u_4,u_1]]\Big]=0.\end{aligned}$$

Это соотношение впервые получено Веревкиным в результате компьютерного перебора [Ver16, Theorem 3.2]. При $m=6$ аналогичное соотношение изначально имеет вид суммы $7+10+4=21$ коммутаторов. После вычисления элементов $\widehat{c}(J\setminus i,u_i)$ и замены набора образующих его можно переписать в виде $\sum_{i=1}^{17}[a_i,b_i]=0$ (см. [Ver16, Theorem 4.1]). Это согласуется с гомеоморфизмом $\mathcal{Z}_\mathcal{K}\cong(S^3\times S^5)^{\#9}\#(S^4\times S^4)^{\#8}$.

6. Гомологии петель частичных факторов

Зафиксируем симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве вершин $[m]$, не имеющий призрачных вершин. Имеем стандартное действие $\mathbb{T}^m \curvearrowright \mathcal{Z}_\mathcal{K}$. Ниже мы пользуемся следующим фактом: всякий гомоморфизм компактных торов $f : T^k \to T^\ell$ однозначно задаётся индуцированным отображением на решетках однопараметрических подгрупп $\varphi : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^\ell$. (Отображение решёток восстанавливается по f как $f_* : H_1(T^k;\mathbb{Z}) \to H_1(T^\ell;\mathbb{Z})$; отображение торов восстанавливается по φ как $\mathbb{T} \otimes_\mathbb{Z} \varphi : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^\ell$.)

6.1. **Частичные факторы момент-угол комплексов.**

Определение 6.1. *Частичными факторами* момент–угол-комплекса $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ будем называть топологические пространства вида $EH \times_H \mathcal{Z}_\mathcal{K}$, где $H \subset \mathbb{T}^m$ — замкнутая подгруппа.

На таких пространствах есть остаточное действие факторгруппы $\mathbb{T}^m/H \simeq T^n$.

Замечание 6.2. Обычно также требуют, чтобы подгруппа H свободно действовала на момент–угол-комплексе. Мы не накладываем это условие, так как оно не играет роли при вычислениях в гомологиях петель. Впрочем, отметим, что для свободных действий имеем $EH \times_H \mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \mathcal{Z}_\mathcal{K}/H$ — пространство, гомотопически эквивалентное клеточному комплексу размерности $\le 2m$.

Всякая замкнутая подгруппа $H \subset \mathbb{T}^m$ имеет вид $T_\lambda := \operatorname{Ker}(\lambda_*)$, где

$$\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$$

— гомоморфизм решеток ранга n (*характеристическое отображение*), а $\lambda_* : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ – индуцированный им гомоморфизм торов. Действительно: топологическая группа $\mathbb{T}^m/H$ всегда изоморфна тору. Выберем изоморфизм $\mathbb{T}^m/H \simeq \mathbb{T}^n$; тогда $H = \operatorname{Ker}(f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n)$, и в качестве λ достаточно взять гомоморфизм $f_* : H_1(\mathbb{T}^m;\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^n;\mathbb{Z})$. Этот гомоморфизм имеет ранг n, так как соответствующее отображение торов сюръективно. Обратно, характеристическое отображение λ восстанавливается по подгруппе H однозначно с точностью до действия $GL(n,\mathbb{Z})$. Мы обозначаем

$$X(\mathcal{K},\lambda) := ET_\lambda \times_{T_\lambda} \mathcal{Z}_\mathcal{K};$$

таким образом, имеем гомотопические расслоения

$$T_\lambda \to \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to X(\mathcal{K},\lambda) \to BT_\lambda, \tag{6.1}$$

$$T^n \to X(\mathcal{K},\lambda) \to \mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \to BT^n. \tag{6.2}$$

Частные случаи этой конструкции:

- В случае $n = 0$, $\lambda = 0 : \mathbb{Z}^m \to 0$ имеем подгруппу $T_\lambda = \mathbb{T}^m \subset \mathbb{T}^m$ и пространство Дэвиса–Янушкевича в качестве частичного фактора: $X(\mathcal{K},0) := E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \mathrm{DJ}(\mathcal{K})$;
- В случае $n = m$, $\lambda = \mathrm{id} : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^m$ имеем подгруппу $T_\lambda = 0 \subset \mathbb{T}^m$ и момент–угол-комплекс в качестве частичного фактора: $X(\mathcal{K},\mathrm{id}) := E0 \times_0 \mathcal{Z}_\mathcal{K} \simeq \mathcal{Z}_\mathcal{K}$.

Сведём изучение частичных факторов к случаю, когда T_λ — связная подгруппа (то есть подтор) в $\mathbb{T}^m$.

Предложение 6.3. *Пусть $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ — гомоморфизм решеток ранга n. Следующие условия эквивалентны:*

1. *λ сюръективно;*
2. *λ имеет сечение;*
3. *подгруппа $T_\lambda := \operatorname{Ker}(\lambda_* : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n) \subset \mathbb{T}^m$ связна (то есть является тором).*

Доказательство. Пусть λ сюръективно. Выберем прообразы базисных векторов: $y_i \in \mathbb{Z}^m$, $\lambda(y_i) = e_i$, $i = 1,\dots,n$. Тогда λ имеет сечение $\rho : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$, $\rho(e_i) := y_i$.

Теперь пусть λ имеет сечение $\rho : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^m$. Тогда λ_* имеет сечение ρ_*. Это задаёт изоморфизм коммутативных топологических групп $\mathbb{T}^m \simeq \operatorname{Ker}(\lambda_*) \oplus \operatorname{Im}(\rho_*) = T_\lambda \times \mathbb{T}^n$. Так как $\mathbb{T}^m$ связна, T_λ тоже связна.

Наконец, пусть T_λ связна. Тогда $1 \to T_\lambda \to \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n \to 1$ — короткая точная последовательность торов. Она индуцирует короткую точную последовательность решёток $0 \to \operatorname{Ker}(\lambda) \to \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \to 0$; значит, λ сюръективно. □

Предложение 6.4. *Пусть $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ — гомоморфизм решёток ранга n. Разложим его в композицию сюръекции и инъекции $\mathbb{Z}^m \overset{\lambda^\circ}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}^n \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{Z}^n$. Тогда:*

1. *$T_{\lambda^\circ} \subset T_\lambda$ — связная компонента единицы;*
2. *$\pi_1(X(\mathcal{K},\lambda)) \simeq T_\lambda/T_\lambda^\circ$ — конечная абелева группа;*
3. *$X(\mathcal{K},\lambda^\circ)$ односвязно, а индуцированное отображение $X(\mathcal{K},\lambda^\circ) \to X(\mathcal{K},\lambda)$ — это универсальное накрытие для $X(\mathcal{K},\lambda)$.*

Доказательство. Пусть $T_\lambda^\circ \subset T_\lambda$ — связная компонента единицы. Вложения $T_\lambda^\circ \subset T_\lambda \subset \mathbb{T}^m$ индуцируют сюръективные отображения торов $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m/T_\lambda^\circ \to \mathbb{T}^m/T_\lambda$. Рассмотрим индуцированные отображения однопараметрических подгрупп $\mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$. Первое отображение сюръективно, так как $T_\lambda^\circ \subset \mathbb{T}^m$ — связная подгруппа; второе отображение инъективно, так как оно соответствует накрытию торов. Итак, мы получили разложение гомоморфизма λ в композицию сюръекции и инъекции. Такое разложение однозначно, поэтому оно совпадает с разложением $\lambda = i \circ \lambda^\circ$. Следовательно, $T_\lambda^\circ = T_{\lambda^\circ}$. Пункт (1) доказан.

Изоморфизм $\pi_1(X(\mathcal{K},\lambda)) \simeq \pi_0(T_\lambda) = T_\lambda/T_\lambda^\circ$ следует из точной последовательности гомотопических групп расслоения (6.1), так как $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ — 2-связное пространство [BP15, Proposition 4.3.5(a)]. Абелева группа $T_\lambda/T_\lambda^\circ$ дискретна и компактна (следовательно, конечна). Это доказывает пункт (2). Наконец, гомотопическое расслоение

$$T_\lambda/T_\lambda^\circ \to ET_\lambda \times_{T_\lambda^\circ} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \to ET_\lambda \times_{T_\lambda} \mathcal{Z}_\mathcal{K},$$

естественно отождествляется с накрытием $T_\lambda/T_\lambda^\circ \to X(\mathcal{K},\lambda^\circ) \to X(\mathcal{K},\lambda)$ из пункта (3). $\square$

Следовательно, с гомотопической точки зрения $\Omega X(\mathcal{K},\lambda) \simeq \Omega X(\mathcal{K},\lambda^\circ) \times (T_\lambda/T_\lambda^\circ)$ — произведение связного H-пространства на конечную абелеву группу. (Впрочем, это не обязательно изоморфизм H-пространств.)

Далее мы всегда считаем, что подгруппа $T_\lambda \subset \mathbb{T}^m$ связна. Следовательно, пространство $X(\mathcal{K},\lambda)$ односвязно, а гомоморфизм $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ сюръективен и имеет сечение ρ.

6.2. **Расширение алгебр Хопфа для частичных факторов.** Пусть $u_1,\dots,u_m$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^m$, $x_1,\dots,x_n$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Имеем расщепимую короткую точную последовательность свободных абелевых групп:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\lambda) \longrightarrow \mathbb{Z}\cdot\{u_1,\dots,u_m\} \underset{\rho}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}\cdot\{x_1,\dots,x_n\} \longrightarrow 0.$$

Обозначим $\lambda(u_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i$. Положим также

$$y_i := \rho(x_i) \in \mathbb{Z}^m, \quad \mathring{u}_j := u_j - \rho(\lambda(u_j)) = u_j - \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} y_i \in \mathrm{Ker}(\lambda).$$

Если $z_1,\dots,z_{m-n} \in \mathrm{Ker}(\lambda)$ — произвольный базис, то $\{u_j\}$ и $\{y_i\} \sqcup \{z_k\}$ — два базиса в одном и том же модуле $\mathbb{Z}^m \simeq \mathrm{Ker}(\lambda) \oplus \mathrm{Im}(\rho)$.

Предложение 6.5. *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на $[m]$ без призрачных вершин, $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ — сюръективный гомоморфизм с сечением ρ.*

1. *Имеем гомотопическое расслоение односвязных пространств $X(\mathcal{K},\lambda) \to \mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \xrightarrow{j} BT^n$, где j — композиция вложения $\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \hookrightarrow (\mathbb{C}P^\infty)^m = B\mathbb{T}^m$ и отображения $B(\lambda_*) : B\mathbb{T}^m \to BT^n$.*
2. *Отображение Ωj имеет гомотопическое сечение $s : T^n \to \Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K})$, задающее слабую гомотопическую эквивалентность $\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \simeq \Omega X(\mathcal{K},\lambda) \times T^n$.*
3. *Пусть $\mathbf{k}$ — такое коммутативное кольцо с единицей, что $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Тогда имеем расширение связных $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Хопфа*

   $$\mathbf{k} \to H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k}) \xrightarrow{\iota} H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \xrightarrow{p} \Lambda[x_1,\dots,x_n] \to \mathbf{k},$$

   где $\deg u_j := (-1,2)$, $p(u_j) := \lambda(u_j)$. Отображение p имеет $\mathbf{k}$-линейное сечение $\sigma : \Lambda[n] \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$, заданное формулой

   $$\sigma(x_I) := \widehat{y}_I := y_{i_1}\cdot\ldots\cdot y_{i_s}, \ I = \{i_1 < \dots < i_s\} \subset [n].$$

   Следовательно, формула $\Phi(a\otimes x_I) := \iota(a)\cdot\widehat{y}_I$ задаёт изоморфизм левых $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})$-модулей и правых $\Lambda[x_1,\dots,x_n]$-комодулей $\Phi : H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})\otimes\Lambda[x_1,\dots,x_n] \to H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$.

Доказательство. Имеем свободное диагональное действие $\mathbb{T}^m$ на $E\mathbb{T}^m \times \mathcal{Z}_\mathcal{K}$ и замкнутую подгруппу $T_\lambda \subset \mathbb{T}^m$. Получаем коммутативную диаграмму главных расслоений

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{T}^m \arrow[r] \arrow[d] & E\mathbb{T}^m \times \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d, equal] & B\mathbb{T}^m \arrow[d] \\
\mathbb{T}^m/T_\lambda \arrow[r] & E\mathbb{T}^m \times_{T_\lambda} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] & E\mathbb{T}^m \times_{\mathbb{T}^m} \mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] & B(\mathbb{T}^m/T_\lambda);
\end{tikzcd}$$

с точностью до гомотопии, она совпадает с искомой диаграммой

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_\mathcal{K} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & B\mathbb{T}^m \arrow[d, "(B\lambda)_*"] \\
X(\mathcal{K},\lambda) \arrow[r] & \mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \arrow[r, "j"] & BT^n.
\end{tikzcd}$$

Это доказывает пункт (1). Перейдём к пространствам петель; имеем расслоение

$$\begin{tikzcd}
\Omega X(\mathcal{K},\lambda) \arrow[r] & \Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K}) \arrow[r, "\Omega j"] \arrow[dr, "\Omega i"'] & T^n \\
& & \mathbb{T}^m. \arrow[u, "\lambda_*"']
\end{tikzcd}$$

По предложению 3.1, отображение Ωi имеет сечение. Отображение λ_* имеет сечение ρ_*, индуцированное сечением гомоморфизма λ. Их композиция — искомое сечение s отображения Ωj. Как и в предложении 3.7, получаем расщепимое расслоение H-пространств и расширение алгебр Хопфа за счёт общей теоремы B.3. $\square$

При $I = \{i_1 < \dots < i_s\} \subset [n]$ и $q \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$ мы будем обозначать

$$c(I,q) := [y_{i_1}, [\dots, [y_{i_s}, q]\dots]] \in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}).$$

Аналогично следствиям 3.9 и 3.10 доказывается следующее предложение.

Предложение 6.6. *Следующие элементы принадлежат подалгебре* $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k}) \subset H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k})$:

(1) $c(I,\mathring{u}_j)$ *для всех* $I \subset [n]$ *и* $j = 1,\dots,m$;

(2) $c(I,y_i)$ *при* $I \neq \varnothing$ *и* $i = 1,\dots,n$. $\square$

(При доказательстве первого пункта надо использовать, что $\mathring{u}_j \in \operatorname{Ker}(p : H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}) \to H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k}))$.)

6.3. **Резольвента во флаговом случае.** Зафиксируем флаговый комплекс $\mathcal{K}$ на $[m]$, сюръективный гомоморфизм $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ и его сечение ρ, кольцо коэффициентов $\mathbf{k}$ такое, что $H_*(\Omega X(\mathcal{K},\lambda);\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Для краткости будем писать X вместо $X(\mathcal{K},\lambda)$.

Определение 6.7. Для произвольных $I \subset [n]$, $j \in m$ введём элемент

$$\kappa(I,j) := c(I,\mathring{u}_j) + \sum_{\substack{i\in[n],\\ i\le\max(I)}} \lambda_{ij}c(I,y_i) \in H_*(\Omega X;\mathbf{k})$$

(он лежит в $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ по предложению 6.6.) При $I = \varnothing$ мы полагаем $\max(\varnothing) := -\infty$, поэтому $\kappa(\varnothing,j) := c(I,\mathring{u}_j)$.

Предложение 6.8. *Левый* $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$*-модуль* $\mathbf{k}$ *имеет свободную резольвенту* $(H_*(\Omega X;\mathbf{k})\otimes\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\widehat{d})$, *где* $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$*-линейный дифференциал задается формулой*

(6.3)

$$\widehat{d}(1\otimes x_I\otimes\chi_\alpha) = \sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\left(\sum_{i\in[n]}(-1)^{|I|}\lambda_{ij}\cdot 1\otimes(x_I\wedge x_i) + \sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\kappa(A,j)\otimes x_B\right)\otimes\chi_{\alpha-e_j} =$$

$$= \sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\left(\sum_{i\in[n]\setminus I}(-1)^{|I|}\lambda_{ij}\cdot 1\otimes(x_I\wedge x_i) + (-1)^{|I|}\kappa(I,j)\otimes 1 + \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ B\neq\varnothing}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\kappa(A,j)\otimes x_B\right)\otimes\chi_{\alpha-e_j},$$

и $\deg x_i = (0,-1,2)$, $\deg \chi_j = (1,-1,2)$. *Как мультиградуированный* $\mathbf{k}$*-модуль,* Tor*-функтор* $\mathrm{Tor}_*^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ *изоморфен гомологиям комплекса* $(\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$*, где*

$$\overline{d}(x_I\otimes\chi_\alpha) := \sum_{j\in\mathrm{supp}(\alpha)}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{|I|}\lambda_{ij}(x_I\wedge x_i)\otimes\chi_{\alpha-e_j}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Мы рассуждаем как в предложении 4.1. По предложению C.2, имеем тождества:

$$\widehat{y}_I\cdot y_i = 1\cdot\begin{cases}(-1)^{|I_{>i}|}\widehat{y}_{I\sqcup i}, & i\notin I;\\ 0, & i\in I;\end{cases} + \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,y_i)\cdot\widehat{y}_B =$$

$$= \Phi\left(1\otimes(x_I\wedge x_i)+\sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ \max(A)>i}}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,y_i)\otimes x_B\right)\in H_*(\Omega\mathrm{DJ}(\mathcal{K});\mathbf{k}),$$

$$\widehat{y}_I\cdot\mathring{u}_j = \sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,\mathring{u}_j)\cdot\widehat{y}_B = \Phi\left(\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c(A,\mathring{u}_j)\otimes x_B\right).$$

(Здесь $c(A,y_i), c(A,\mathring{u}_j)\in H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ по предложению 6.6, а формула для Φ приведена в предложении 6.5.) Так как $u_j = \mathring{u}_j+\sum_{i=1}^n\lambda_{ij}y_i$, получаем:

(6.5)
$$\widehat{y}_I\cdot u_j = \Phi\left(1\otimes(x_I\wedge\sum_{i=1}^n\lambda_{ij}x_i)+\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}c\Big(A,\mathring{u}_j+\sum_{\substack{i\in[n]:\\ \max(A)>i}}\lambda_{ij}y_i\Big)\otimes t_B\right)=$$

$$=\Phi\left(1\otimes(x_I\wedge\lambda(u_i))+\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|B|}\kappa(A,j)\otimes x_B\right).$$

Обозначим $\Phi_0 := \Phi\otimes\mathrm{id}_{\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle}$. Тогда

$$\Phi_0(\widehat{d}(1\otimes x_I\otimes\chi_\alpha)) = d(\Phi_0(1\otimes x_I\otimes\chi_\alpha)) = d(\widehat{y}_I\otimes\chi_\alpha) = (-1)^{|I|}\sum_{j\in\mathrm{supp}(\alpha)}\widehat{y}_I\cdot u_j\otimes\chi_{\alpha-e_j} =$$

$$=\Phi\left((-1)^{|I|}\cdot 1\otimes(x_I\wedge\lambda(u_i))+\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\kappa(A,j)\otimes x_B\right)\otimes\chi_{\alpha-e_j},$$

что и требовалось доказать. Применив функтор $\mathbf{k}\otimes_{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(-)$, получаем дифференциал $\overline{d}$ (вторая сумма из дифференциала $\widehat{d}$ переходит в ноль, так как $\kappa(A,j)$ имеет положительную степень при всех $A\subset[n]$). □

6.4. **Описание циклов в бар-конструкции.**

Предложение 6.9. *Имеем морфизм резольвент* $\varphi_\bullet : (H_*(\Omega X;\mathbf{k})\otimes\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\widehat{d})\to(\mathrm{B}(H_*(\Omega X;\mathbf{k}),d_{\mathrm{B}})$ *левого* $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$*-модуля* $\mathbf{k}$*, заданный формулой*

$$\varphi_n(1\otimes x_I\otimes\chi_\alpha) = (-1)^{|I|}\sum_{\substack{\alpha=e_{j_1}+\dots+e_{j_n},\\ I=I_1\sqcup\dots\sqcup I_n}}(-1)^{\sum_{1\le q_1<q_2\le n}\theta(I_{q_1},I_{q_2})}\Big[\kappa(I_1,j_1)\Big|\dots\Big|\kappa(I_n,j_n)\Big]. \tag{6.6}$$

Доказательство. Как и в теореме 4.8, применим следствие 2.2 для $\overline{\varphi}_0=\varepsilon:\Lambda[n]\to\mathbf{k}$. Теперь осталось доказать, что $\varphi_{n+1}(x_I\otimes\chi_\alpha) = s(\varphi_n(\widehat{d}(x_I\otimes\chi_\alpha)))$ при $|\alpha|=n+1$, $n\ge 0$. Из формулы (6.4) и $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$-линейности имеем

$$\varphi_n(\widehat{d}(x_I\otimes\chi_\alpha))) = \sum_{j\in\mathrm{supp}(\alpha)}\sum_{i\notin I}(-1)^{|I|}\lambda_{ij}\varphi_n(1\otimes(x_I\wedge x_i)\otimes\chi_{\alpha-e_j})+$$

$$+\sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}(-1)^{|I|}\kappa(I,j)\varphi_n(1\otimes\chi_{\alpha-e_j})+\sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\sum_{\substack{I=A\sqcup B,\\ |B|\neq\varnothing}}(-1)^{\theta(A,B)+|A|}\kappa(A,j)\varphi_n(x_B\otimes\chi_{\alpha-e_j}).$$

Первая сумма под действием s переходит в ноль по определению s; все слагаемые второй суммы равны нулю по определению φ_n. Подставив формулу для φ_n в последнюю сумму, получаем

$$s(\varphi_n(\widehat{d}(x_I\otimes\chi_\alpha)))=\sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\sum_{\substack{I=A\sqcup B,\\ |B|\neq\varnothing}}\sum_{\substack{\alpha-e_j=e_{j_1}+\dots+e_{j_n},\\ B=I_1\sqcup\dots\sqcup I_n}}(-1)^\zeta\Big[\kappa(A,j)\Big|\kappa(I_1,j_1)\Big|\dots\Big|\kappa(I_n,j_n)\Big],$$

где $\zeta=\theta(A,B)+|A|+\sum_{1\le q_1<q_2\le n}\theta(I_{q_1},I_{q_2})$. После переобозначения $j=j_0$, $A=A_0$ и элементарных преобразований получаем в точности формулу для $\varphi_{n+1}(x_I\otimes\chi_\alpha)$. $\square$

Следствие 6.10. *При квази-изоморфизме цепных комплексов* $\overline{\varphi}_\bullet:(\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})\to(\overline{\mathrm{B}}(H_*(\Omega X;\mathbf{k}),d_{\overline{\mathrm{B}}})$ *каждой 1-цепи* $x_I\otimes\chi_j\in\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle$ *соответствует элемент*

$$(-1)^{|I|}\Big[\kappa(I,j)\Big]\in\overline{\mathrm{B}}_1(H_*(\Omega X;\mathbf{k})),$$

каждой 2-цепи $x_I\otimes\chi_{j_1,j_2}$ *при* $j_1\neq j_2$ *— элемент*

$$(-1)^{|I|}\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)}\Big[\kappa(A,j_1)\Big|\kappa(B,j_2)\Big]+(-1)^{\theta(B,A)}\Big[\kappa(B,j_2)\Big|\kappa(A,j_1)\Big];$$

каждой 2-цепи $x_I\otimes\chi_{jj}$ *— элемент*

$$(-1)^{|I|}\sum_{I=A\sqcup B}(-1)^{\theta(A,B)}\Big[\kappa(A,j)\Big|\kappa(B,j)\Big].\quad\square$$

Отметим, что формула упрощается при $I=\varnothing:$ имеем

$$\varphi_n(1\otimes\chi_\alpha)=\sum_{\alpha=ej_1+\dots+e_{j_n}}\Big[\mathring{u}_{j_1}\Big|\dots\Big|\mathring{u}_{j_n}\Big]\in\overline{\mathrm{B}}_n(H_*(\Omega X;\mathbf{k})).\tag{6.7}$$

В отличие от случая момент–угол-комплексов, для частичных факторов гомологии комплекса $(\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$ в общем случае неизвестны. Тем не менее, мы можем описать гомологии, лежащие в *диагональных* градуировках. В некоторых случаях (например, для квазиторических многообразий) все гомологии сосредоточены на диагонали, поэтому за счёт теоремы A.6 мы можем получить копредставление алгебры $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ целиком.

6.5. **Связь с гомологиями частичных факторов.** Докажем аналог (неградуированного) аддитивного изоморфизма $\operatorname{Tor}^{H_*(\Omega\mathcal{Z}_\mathcal{K})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\simeq H_*(\mathcal{Z}_\mathcal{K};\mathbf{k})$. Напомним, что $\operatorname{Tor}^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})\cong H(\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,\overline{d})$, где дифференциал $\overline{d}$ задан формулой (6.4).

Предложение 6.11. *Имеем изоморфизм* $\mathbf{k}$*-модулей*

$$(\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],\overline{d}_{dual})\simeq\operatorname{Tor}_{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}),$$

где $t_i:=\sum_{j=1}^m\lambda_{ij}v_j\in\mathbf{k}[\mathcal{K}]$. *Более точно,*

$$H_{q,-s,2s}(\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],\overline{d}_{dual})\simeq\operatorname{Tor}^{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}_{q-s,2s}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k}).$$

(Здесь мы отождествляем $(\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)^*$ *с* $\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ *по формуле* $(x_I\otimes\chi_\alpha)^*=x_I\otimes v^\alpha$*).*

Доказательство. Так как

$$\overline{d}(x_I\otimes\chi_\alpha)=(-1)^{|I|}\sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\sum_{i\notin I}(-1)^{|I_{>i}|}\lambda_{ij}x_{I\sqcup i}\otimes\chi_{\alpha-e_j}=\sum_{j\in\operatorname{supp}(\alpha)}\sum_{i\notin I}(-1)^{|I_{<i}|}\lambda_{ij}x_{I\sqcup i}\otimes\chi_{\alpha-e_j}\in\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle,$$

имеем

$$\overline{d}_{dual}(x_I\otimes v^\alpha)=\sum_{j=1}^m\sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|}\lambda_{ij}x_{I\setminus i}\otimes v_jv^\alpha=(-1)^{|I|+1}\sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|}x_{I\setminus i}\otimes t_i\cdot v^\alpha.$$

Теперь вычислим функтор $\operatorname{Tor}^{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}],\mathbf{k})$ с помощью резольвенты Кошуля [BP15, Construction A.2.4]. Получаем, что функтор $\operatorname{Tor}^{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}(\mathbf{k},\mathbf{k}[\mathcal{K}])$ изоморфен гомологиям комплекса

$$(\Lambda[x_1,\dots,x_n]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}],d_{Kos}),\quad d_{Kos}(x_i)=t_i,\ d_{Kos}(1\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}])=0.$$

Так как дифференциал удовлетворяет правилу Лейбница, имеем

$$d_{Kos}(x_I \otimes v^\alpha) = \sum_{i\in I}(-1)^{|I_{<i}|} x_{I\setminus i} \otimes v_i v^\alpha.$$

Итак, дифференциалы $\overline{d}_{dual}$ и d_{Kos} совпадают, поэтому $H_*(\Lambda[n]\otimes\mathbf{k}[\mathcal{K}], \overline{d}_{dual}) \cong \mathrm{Tor}^{\mathbf{k}[n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})$. Элемент $x_I \otimes v^\alpha$ имеет степень $(-|\alpha|, |I| + |\alpha|, 2|I| + 2|\alpha|)$ в первом комплексе и степень $(|I|, 2(|I| + |\alpha|))$ во втором. (В отличие от [BP15], мы используем гомологическую нумерацию для функторов $\mathrm{Tor}_j^A(M, N) : j \geq 0$). $\square$

Следствие 6.12. *Пусть* $\mathbf{k}$ *— поле. Тогда векторные пространства* $\mathrm{Tor}_q^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-s,2s}$ *и* $\mathrm{Tor}_{q-s}^{\mathbf{k}[t_1,\dots,t_n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k})_{2s}$ *двойственны.* $\square$

6.6. **Диагональная часть образующих и соотношений.** Заметим, что цепной комплекс $(\Lambda[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle, \overline{d})$ сосредоточен в градуировках $(q, -s, 2s)$, $0 \leq q \leq s$. Опишем модули $\mathrm{Tor}_s^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-s,2s}$. Дифференциал $\overline{d}$ бьёт в $(\Lambda[n] \otimes \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{s,-s,2s}$ из нулевого модуля $(\Lambda[n] \otimes \mathbf{k}\langle\mathcal{K}\rangle)_{s+1,-s,2s}$, поэтому имеем

$$\mathrm{Tor}_s^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-s,2s} = \mathrm{Ker}\left(\overline{d} : \bigoplus_{\substack{\mathrm{supp}(\alpha)\in\mathcal{K},\\ |\alpha|=s}} \mathbf{k}\cdot\chi_\alpha \to \bigoplus_{\substack{\mathrm{supp}(\beta)\in\mathcal{K},\\ |\beta|=s-1}} \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{k}\cdot x_i \otimes \chi_\beta\right), \tag{6.8}$$

$$\overline{d}(\chi_\alpha) = \sum_{j\in\mathrm{supp}(\alpha)} \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} x_i \otimes \chi_{\alpha - e_j}.$$

Предложение 6.13. *Если* $\mathbf{k}$ *— поле, то "диагональный"* $\mathbf{k}$*-модуль* $\bigoplus_{s\geq 0} \mathrm{Tor}_s^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-s,2s}$ *и градуированный* $\mathbf{k}$*-модуль* $M := \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j = 0,\ i = 1, \dots, n)$ *двойственны.*

Доказательство. Отображение, аддитивно двойственное к $\overline{d}$, имеет вид

$$\overline{d}_{dual} : \bigoplus_{|\beta|=s-1} \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{k}\cdot x_i \otimes v^\beta \to \bigoplus_{|\alpha|=s} \mathbf{k}\cdot v^\alpha, \quad x_i \otimes v^\beta \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j \cdot v^\alpha.$$

Взяв прямую сумму по всем $s \geq 0$, получаем $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$-линейное отображение

$$\overline{d}_{dual} : \bigoplus_{i=1}^n (\mathbf{k}\cdot x_i) \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}] \to \mathbf{k}[\mathcal{K}], \quad x_i \mapsto \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j.$$

Таким образом, $\mathrm{Coker}(\overline{d}_{dual}) \cong M$. Осталось воспользоваться тем, что векторные пространства $\mathrm{Ker}(\overline{d})$ и $\mathrm{Coker}(\overline{d}_{dual})$ двойственны. $\square$

7. Случай квазиторических многообразий

В качестве частичных факторов момент–угол-комплексов реализуются все *квазиторические многообразия* — семейство многообразий с действием тора половинной размерности, играющее важнейшую роль в торической топологии. Подробное изложение теории квазиторических многообразий см. в [BP15, Ch. 7].

Определение 7.1. *Стандартное* действие n-мерного тора $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| = 1\}$ — это действие на $\mathbb{C}^n$ покоординатным умножением, $(z_1, \dots, z_n)\cdot(w_1, \dots, w_n) := (z_1 w_1, \dots, z_n w_n)$.

Непрерывное действие $\mathbb{T}^n$ на гладком $2n$-мерном многообразии M^{2n} *локально стандартно*, если у каждой точки $x \in M$ есть $\mathbb{T}^n$-инвариантная окрестность, эквивариантно диффеоморфная инвариантному подмножеству в $\mathbb{C}^n$.

Если $\mathbb{T}^n \curvearrowright M^{2n}$ — локально стандартное действие, на пространстве орбит M/T естественным образом возникает структура многообразия с углами (это следует из диффеоморфизма $\mathbb{C}^n/\mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n_{\geq 0}$).

Определение 7.2. Гладкое многообразие M^{2n} с локально стандартным действием $\mathbb{T}^n$ — *квазиторическое* многообразие над n-мерным простым выпуклым многогранником P, если $M^{2n}/\mathbb{T}^n$ диффеоморфно P как многообразие с углами.

Пусть $\mathcal{K}_P = \partial P^*$ — граница двойственного симплициального многогранника P^*; таким образом, $|\mathcal{K}_P| \cong S^{n-1}$ — политопальная триангуляция сферы.

Теорема 7.3 ([BP15, Proposition 7.3.11, Proposition 7.3.13]). (1) *Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ — политопальная триангуляция $(n-1)$-мерной сферы, а сюръективный гомоморфизм решеток $\lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ удовлетворяет следующему условию невырожденности: для каждой $(n-1)$-мерной грани $\{i_1, \dots, i_n\} \in \mathcal{K}$ элементы $\lambda(e_{i_1}), \dots, \lambda(e_{i_n})$ образуют базис решётки $\mathbb{Z}^n$. Тогда действие T_λ на $\mathcal{Z}_\mathcal{K}$ свободно, а частичный фактор $\mathcal{Z}_\mathcal{K}/T_\lambda$ является квазиторическим многообразием над P относительно остаточного действия $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^m/T_\lambda$.*

(2) *Любое квазиторическое многообразие $\mathbb{T}^n$-эквивариантно гомеоморфно квазиторическому многообразию вида, описанного в пункте (1).*

Так как для свободных действий имеем гомотопическую эквивалентность $\mathcal{Z}_\mathcal{K}/T_\lambda \simeq ET_\lambda \times_{T_\lambda} \mathcal{Z}_\mathcal{K} = X(\mathcal{K}, \lambda)$, мы получаем: с точки зрения теории гомотопий, всякое квазиторическое многообразие имеет вид $X(\mathcal{K}, \lambda)$.

Теперь воспользуемся специфическими свойствами когомологий квазиторических многообразий, которые следуют из *коэн-маколеевости* комплекса $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$ (см. [BP15, §3.3]) и условий невырожденности гомоморфизма λ.

Предложение 7.4 ([BP15, Lemma 7.3.27]). *Пусть $\mathbf{k}$ — поле или $\mathbb{Z}$, и пусть данные $(\mathcal{K}, \lambda)$ задают квазиторическое многообразие. Рассмотрим элементы*

$$t_i := \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} v_j \in \mathbf{k}[\mathcal{K}], \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ — свободный модуль над своей подалгеброй $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$. □

Предложение 7.5. *Пусть $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей, и пусть данные $(\mathcal{K}, \lambda)$ задают квазиторическое многообразие над многогранником P. Тогда $\mathbf{k}[\mathcal{K}]/(t_1, \dots, t_n)$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль. Для каждого $s \geq 0$, градуированная компонента степени $2s$ имеет ранг $h_s(P)$, где $h_i(P)$ —* h-числа *многогранника P.*

Доказательство. В случае $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$ это следует из изоморфизма колец $\mathbb{Z}[\mathcal{K}]/(t_1, \dots, t_n) \cong H^*(X(\mathcal{K}, \lambda); \mathbb{Z})$ [BP15, Theorem 7.3.28] и аддитивного описания кольца $H^*(X; \mathbb{Z})$ [BP15, Proposition 7.3.26]. Общий случай получается применением теоремы об универсальных коэффициентах. □

Предложение 7.6. *Пусть $\mathbf{k}$ — поле или $\mathbb{Z}$, $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс. Пусть данные $(\mathcal{K}, \lambda)$ задают квазиторическое многообразие. Тогда $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-градуированный $\mathbf{k}$-модуль $\operatorname{Tor}^{H_*(\Omega X; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ сосредоточен в градуировках вида $(s, -s, 2s)$, $s \geq 0$.*

Доказательство. Так как $\mathbf{k}[\mathcal{K}]$ — свободный $\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]$-модуль, имеем $\operatorname{Tor}_j^{\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) = 0$ при $j \neq 0$. По предложению 6.11, это означает, что гомологии комплекса $(\Lambda[n] \otimes \mathbf{k}[\mathcal{K}], \overline{d}_{dual})$ сосредоточены в размерностях вида $(s, -s, 2s)$ и равны

$$\operatorname{Tor}_0^{\mathbf{k}[t_1, \dots, t_n]}(\mathbf{k}[\mathcal{K}], \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(t_1, \dots, t_n).$$

По предыдущему предложению, это свободный $\mathbf{k}$-модуль. Значит, по теореме об универсальных коэффициентах, гомологии дуального комплекса $(\Lambda[n] \otimes \mathbf{k}\langle \mathcal{K} \rangle, \overline{d})$ сосредоточены в тех же размерностях. □

Следствие 7.7. *Пусть $\mathbf{k}$ — поле, $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс. Пусть данные $(\mathcal{K}, \lambda)$ задают квазиторическое многообразие. Тогда $\mathbf{k}$-модули $\operatorname{Tor}^{H_*(\Omega X; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ и $H^*(X; \mathbf{k}) \cong \mathbf{k}[\mathcal{K}]/(t_1, \dots, t_n)$ двойственны. Имеем $\dim_\mathbf{k} \operatorname{Tor}_s^{H_*(\Omega X; \mathbf{k})}(\mathbf{k}, \mathbf{k})_{-s, 2s} = h_s(P)$ при всех $s \geq 0$; остальные градуированные компоненты* Tor-*функтора равны нулю.*

Доказательство. Это прямое следствие предложений 6.13 и 7.6. □

Доказательство теоремы 1.2. По следствию 7.7 и теореме A.6, алгебра $H_*(\Omega X(\mathcal{K}, \lambda); \mathbf{k})$ порождена $h_1(P) = m - n$ образующими степени $(-1, 2)$ по модулю $h_2(P)$ соотношений степени

$(-2,4)$. Осталось описать образующие явно. По формуле (6.8) имеем

$$\mathrm{Tor}_1^{H_*(\Omega X;\mathbf{k})}(\mathbf{k},\mathbf{k})_{-1,2} = \mathrm{Ker}\left(\overline{d} = \lambda : \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbf{k}\cdot\chi_j \to \bigoplus_{i=1}^{n}\mathbf{k}\cdot x_i\right) \cong \mathrm{Ker}(\lambda)$$

— свободный $\mathbf{k}$-модуль ранга $m-n$, порождённый циклами $z_1,\dots,z_{m-n}$. По формуле (6.7), они соответствуют циклам $[z_1],\dots,[z_{m-n}]$ в бар-конструкции, которые, по теореме A.6, задают мультипликативные образующие алгебры $z_1,\dots,z_{m-n}\in H_*(\Omega X;\mathbf{k})$ степени $(-1,2)$. □

Приложение A. Копредставления связных градуированных алгебр

В этом разделе мы доказываем теоремы A.1 и A.10, обобщающие результаты Уолла [Wal60], и теорему A.6. Мы используем обозначения из раздела 2, часть из них напоминается ниже.

A.1. **Соглашения.** Подразумевается, что $\mathbf{k}$ — произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Все тензорные произведения рассматриваются над $\mathbf{k}$.

Мы рассматриваем G-градуированные $\mathbf{k}$-алгебры, где G — коммутативный моноид, снабженный гомоморфизмом $G\to\mathbb{Z}$. За счет этого гомоморфизма на алгебре также возникает $\mathbb{Z}$-градуировка. Такая алгебра A *связна*, если она связна относительно $\mathbb{Z}$-градуировки, то есть $A_{<0}=0$ и $A_0=\mathbf{k}\cdot 1$. Тогда стандартная аугментация $\varepsilon : A\to A_0\cong\mathbf{k}$ превращает $\mathbf{k}$ в левый и правый A-модуль.

Каждый комплекс G-градуированных модулей рассматривается как $\mathbb{Z}\times G$-градуированный модуль с дифференциалом степени $(-1,0)$. Следовательно, A-линейный дифференциал удовлетворяет следующему варианту правила Лейбница:

$$d(a\cdot x) = (-1)^{\deg(a)}a\cdot d(x) = -\overline{a}\cdot d(x),$$

where $\overline{a} := (-1)^{1+\deg(a)}a$.

Копредставлением связной $\mathbf{k}$-алгебры A называется всякий изоморфизм вида

$$A\simeq T(x_1,\dots,x_N)/(r_1=\dots=r_M=0),$$

где $T(x_1,\dots,x_N)$ — тензорная алгебра, а $(r_1=\dots=r_M=0)\subset T(x_1,\dots,x_N)$ — двусторонний идеал, порожденный множеством $\{r_1,\dots,r_M\}$. Подразумевается, что образующие и соотношения однородны и имеют положительную степень, поэтому лежат в $\mathrm{Ker}\,\varepsilon$. Заметим, что A не обязана быть свободным $\mathbf{k}$-модулем, а M,N могут быть бесконечными кардиналами любой мощности.

A.2. **Точная последовательность копредставления.** Пусть $T(x_1,\dots,x_N)$ — тензорная алгебра, порожденная однородными элементами положительных степеней. Тогда каждый элемент $w\in T(x_1,\dots,x_N)$ однозначно представляется в виде суммы

$$w=\varepsilon(w)+\sum_{i=1}^{N} w_i\cdot x_i,\quad w_i\in T(x_1,\dots,x_N).$$

В следующем предложении мы неявно используем такое разложение. Например, подразумевается, что $r_j=\varepsilon(r_j)+\sum_{i=1}^N r_{ji}\cdot x_i$. Так как $r_j\in\mathrm{Ker}\,\varepsilon$, первое слагаемое на самом деле равно нулю.

Предложение A.1. *Пусть $A=T(x_1,\dots,x_N)/(r_1=\dots=r_M=0)$ — копредставление связной $\mathbf{k}$-алгебры*

$$\pi : T(x_1,\dots,x_N)\twoheadrightarrow A$$

— соответствующая проекция. Тогда следующая последовательность градуированных левых A-модулей точна:

$$A\cdot\{R_1,\dots,R_M\}\xrightarrow{d_2} A\cdot\{X_1,\dots,X_N\}\xrightarrow{d_1} A\xrightarrow{\varepsilon}\mathbf{k}\to 0,$$

$$d_2(R_j) := -\sum_{i=1}^{N}\pi(\overline{r_{ji}})\cdot X_i,\quad d_1(X_i) := x_i.$$

Доказательство. Сначала проверим, что это цепной комплекс. Действительно: $\varepsilon(d_1(X_i)) = \varepsilon(x_i) = 0$, и

$$d_1(d_2(R_j)) = \sum_{i=1}^{N} \pi(r_{ji}) \cdot d_1(X_i) = \sum_{i=1}^{N} \pi(r_{ji}) x_i = \pi \left(\sum_{i=1}^{N} r_{ji} x_i \right) = \pi(r_j) = 0 \in A$$

($r_j \in \operatorname{Ker} \varepsilon$, поэтому $r_j = \sum_i r_{ji} x_i$). Проверим точность в члене A. Пусть $y \in \operatorname{Ker} \varepsilon \subset A$. Имеем $y = \pi(w)$ для некоторого элемента $w \in T(x_1, \dots, x_N)$ положительной степени, поэтому

$$y = \pi \left(\sum_{i=1}^{N} w_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{N} \pi(w_i) x_i = d_1 \left(- \sum_{i=1}^{N} \pi(\overline{w}_i) \cdot X_i \right) \in \operatorname{Im} d_1.$$

Наконец, проверим точность в члене $A \cdot \{X_1, \dots, X_N\}$. Пусть $\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot X_i \in \operatorname{Ker} d_1$, так что $\sum_{i=1}^{N} \overline{a}_i x_i = 0$. Имеем $a_i = \pi(v_i)$ для некоторых $v_i \in T(x_1, \dots, x_N)$. Тогда элемент $w := \sum_{i=1}^{N} \overline{v}_i x_i \in T(x_1, \dots, x_N)$ принадлежит $\operatorname{Ker} \pi$. Это ядро — двусторонний идеал, порожденный элементами r_j. Поэтому $w = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} u_{j,\alpha} r_j w_{j,\alpha}$ Для некоторых $u_{j,\alpha}, w_{j,\alpha} \in T(x_1, \dots, x_N)$. Перепишем эту сумму:

$$w = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} u_{j,\alpha} r_j \varepsilon(w_{j,\alpha}) + \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \sum_{i=1}^{N} u_{j,\alpha} r_j w_{j,\alpha,i} x_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \left(\varepsilon(w_{j,\alpha}) u_{j,\alpha} r_{ji} + u_{j,\alpha} r_j w_{j,\alpha,i} \right) x_i.$$

С другой стороны, $w = \sum_{i=1}^{N} \overline{v}_i x_i$. Такое разложение однозначно, поэтому имеем

$$\overline{v}_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \varepsilon(w_{j,\alpha}) u_{j,\alpha} r_{ji} + u_{j,\alpha} r_j w_{j,\alpha,i}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Применив π к обеим частям равенства, получаем $\overline{a}_i = \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \varepsilon(w_{j,\alpha}) \pi(u_{j,\alpha}) \pi(r_{ji})$, since $\pi(v_i) = a_i$ and $\pi(r_j) = 0$. Наконец,

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \cdot X_i = - \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \varepsilon(w_{j,\alpha}) \pi(\overline{u}_{j,\alpha}) \pi(\overline{r}_{ji}) \cdot X_i = d_2 \left(- \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha} \varepsilon(w_{j,\alpha}) \pi(u_{j,\alpha}) \cdot R_j \right) \in \operatorname{Im} d_2. \quad \square$$

Замечание A.2. Предложение A.1 остается верным для копредставлений произвольных *аугментированных* алгебр таких, что $\varepsilon(x_i) = \varepsilon(r_j) = 0$. Соответствующая точная последовательность названа “резольвентой Кошуля” в [AD15, §2].

Следствие A.3. *Пусть* $A = T(x_1, \dots, x_N)/(r_1 = \dots = r_M = 0)$ *— копредставление связной градуированной* $\mathbf{k}$*-алгебры. Тогда* $\mathbf{k}$*-модуль* $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ *аддитивно порожден образами циклов* $[x_1], \dots, [x_N] \in \overline{\mathrm{B}}_1(A)$.

Доказательство. Продолжим точную последовательность из предложения A.1 до свободной резольвенты

$$\dots \to A \cdot \{X_1, \dots, X_N\} \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \to 0, \quad d_1(X_i) = x_i$$

левого A-модуля $\mathbf{k}$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A \cdot \{X_1, \dots, X_N\} \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "{X_i \mapsto [x_i]}"] & A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "{a \mapsto a[]}"] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \mathrm{B}_1(A) \arrow[r, "d_{\mathrm{B},1}"] & \mathrm{B}_0(A) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbf{k} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Она коммутативна, так как $d_1(a \otimes X_i) = -\overline{a} x_i$ и $d_{\mathrm{B},1}(a[x_i]) = -\overline{a} x_i[]$. Поэтому её можно продолжить до отображения резольвент (например, с помощью леммы 2.1). Применив функтор $\mathbf{k} \otimes_A (-)$, мы получаем отображение цепных комплексов

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{k} \cdot \{X_1, \dots, X_N\} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "{X_i \mapsto [x_i]}"] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, "{a \mapsto a[]}"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \overline{\mathrm{B}}_1(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},1}"] & \overline{\mathrm{B}}_0(A) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Гомологии каждого из этих комплексов равны $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$, а индуцированное отображение в гомологиях — изоморфизм. Элементы X_i первого комплекса — циклы, образы которых порождают $\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. □

Следствие A.4. *Пусть $A = T(x_1,\dots,x_N)$ — тензорная алгебра над кольцом $\mathbf{k}$, причем $x_1,\dots,x_N$ — однородные элементы положительных степеней. Тогда $\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, базис которого представлен циклами $[x_1],\dots,[x_N] \in \overline{\mathrm{B}}_1(A)$. Кроме того, $\mathrm{Tor}_i^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) = 0$ при $i > 1$.*

Доказательство. По предложению A.1, последовательность

$$0 \to A\cdot\{X_1,\dots,X_N\} \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \to 0, \quad d_1(X_i) = x_i,$$

точна. Как и в доказательстве следствия A.3, имеем отображение цепных комплексов

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{k}\cdot\{X_1,\dots,X_N\} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "X_i\mapsto[x_i]"] & \mathbf{k} \arrow[r] \arrow[d, "a\mapsto a[]"] & 0 \\
\dots \arrow[r] & \overline{\mathrm{B}}_1(A) \arrow[r, "d_{\overline{\mathrm{B}},1}"] & \overline{\mathrm{B}}_0(A) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Гомологии каждого из комплексов равны $\mathrm{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$, а индуцированное отображение в гомологиях — тождественное. □

A.3. **Копредставление, соответствующее циклам.** Следующая лемма доказана Лемэром [Lem74, Corollaire 1.2.3] в случае, когда кольцо коэффициентов является полем.

Лемма A.5.
Пусть $f : A \to C$ — морфизм связных $\mathbf{k}$-алгебр, где $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей

(1) *Пусть отображение $f_{*,1} : \mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})$ is сюръективно. Тогда $f : A \to C$ сюръективно.*
(2) *Пусть $f_{*,1} : \mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})$ биективно, а отображение $f_{*,2} : \mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) \to \mathrm{Tor}_2^C(\mathbf{k},\mathbf{k})$ сюръективно. Then $f : A \to C$ — изоморфизм.*

Докажем индукцией по n, что отображения $f_n : A_n \to C_n$ сюръективны (соответственно, биективны). База индукции — биекция $A_0 \cong \mathbf{k} \cong C_0$. Будем вычислять модули $\mathrm{Tor}_*^\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k})$, $\Gamma = A, B$, как гомологии бар-конструкции $\overline{\mathrm{B}}(\Gamma)$, то есть цепного комплекса

$$\dots \to \overline{\mathrm{B}}_3(A) \xrightarrow{d_3} \overline{\mathrm{B}}_2(A) \xrightarrow{d_2} \overline{\mathrm{B}}_1(A) \xrightarrow{0} \mathbf{k} \to 0,$$
$$\overline{\mathrm{B}}_k(A) = I(A)^{\otimes k}, \quad d_2(x\otimes y) = \overline{x}y, \quad d_3(x\otimes y\otimes z) = \overline{x}y\otimes z + \overline{x}\otimes\overline{y}z.$$

Обозначим $f_\# : \overline{\mathrm{B}}(A) \to \overline{\mathrm{B}}(C)$.

Доказательство утверждения (1). Пусть $f : A_i \to C_i$ сюръективно при всех $i < n$. Рассмотрим следующее отображение точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{B}}_2(A)_n \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "f_{\#,2}"] & \overline{\mathrm{B}}_1(A)_n \cong A_n \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \arrow[r] \arrow[d, "f_{*,1}"] & 0 \arrow[d, equal] \\
\overline{\mathrm{B}}_2(C)_n \arrow[r, "d_2"] & \overline{\mathrm{B}}_1(C)_n \cong C_n \arrow[r] & \mathrm{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Отображени $f_{\#,2}$ сюръективно, так как это прямая сумма отображений $f\otimes f : A_i\otimes A_j \to C_i\otimes C_j$ при $i,j < n$, и f сюръективно в этих размерностях по предположению индукции. Отображение $f_{*,1}$ сюръективно по условию, а $0 \to 0$ инъективно. Поэтому $f : A_n \to C_n$ сюръективно по "первой части 5-леммы" [Rot09, Proposition 2.72(i)]. □

Доказательство утверждения (2). Пусть $f : A_i \to C_i$ биективно при $i < n$. Рассмотрим отображение точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{B}}_3(A)_n \arrow[r, "d_3"] \arrow[d, "f_{\#,3}"] & \mathrm{Ker}\, d_2 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \arrow[r] \arrow[d, "f_{*,2}"] & 0 \arrow[d, equal] \\
\overline{\mathrm{B}}_3(C)_n \arrow[r, "d_3"] & \mathrm{Ker}\, d_2 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2^C(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Отображение $f_{\#,3}$ сюръективно как прямая сумма отображений $f\otimes f\otimes f : A_i\otimes A_j\otimes A_k\to C_i\otimes C_j\otimes C_k$ при $i,j,k<n$, так как f сюръективно в этих размерностях. Отображение $f_{*,2}$ сюръективно по условию, а $0\to 0$ инъективно. Поэтому φ сюръективно по “первой половине 5-леммы”. Теперь рассмотрим следующее отображение точных последовательностей:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} d_{\overline{\mathrm{B}},2} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varphi"] & \overline{\mathrm{B}}_2(A)_n \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, hook, "f_{\#,2}"] & \overline{\mathrm{B}}_1(A)_n \cong A_n \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \arrow[d, hook, "f_{*,1}"] \\
\operatorname{Ker} d_{\overline{\mathrm{B}},2} \arrow[r] & \overline{\mathrm{B}}_2(C)_n \arrow[r, "d_2"] & \overline{\mathrm{B}}_1(C)_n \cong C_n \arrow[r] & \operatorname{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})_n.
\end{tikzcd}$$

Мы доказали, что φ сюръективно. Отображение $f_{\#,2}$ инъективно по предположению индукции (даже биективно, так как это прямая сумма отображений $f\otimes f : A_i\otimes A_j\to C_i\otimes C_j$, $i,j<n$). Наконец, отображение $f_{*,1}$ инъективно по условию. Поэтому $f : A_n\to C_n$ инъективно по “второй половине 5-леммы” [Rot09, Proposition 2.72(ii)]. По (1), это отображение также биективно. □

Следующая теорема позволяет построить копредставление $\mathbf{k}$-алгебры A, если структура $\mathbf{k}$-модулей $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ и $\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ известна. Мы продолжаем рассматривать эти модули как гомологии бар-конструкции $(\overline{\mathrm{B}}(A), d_{\overline{\mathrm{B}}})$. В доказательстве мы не используем обозначение $[x|y|z]$ для элементов бар-конструкции, и вместо этого пишем $x\otimes y\otimes z$. Таким образом, $[c]$ всегда означает класс в $\operatorname{Tor}^\Gamma(\mathbf{k},\mathbf{k})$, заданный циклом $c\in\overline{\mathrm{B}}(\Gamma)$.

Теорема A.6. *Пусть A — связная алгебра над коммутативным кольцом $\mathbf{k}$ с единицей.*

(1) *Предположим, что для некоторых однородных $a_1,\dots,a_N\in A_{>0}$ верно: $\mathbf{k}$-модуль $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ (аддитивно) порожден классами $[a_1],\dots,[a_N]\in\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Тогда алгебра A (мультипликативно) порождается элементами $a_1,\dots,a_N$.*

(2) *Пусть $\mathbf{k}$-модуль $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ аддитивно порожден N элементами $[a_1],\dots,[a_N]$ по модулю R соотношений*

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ri}[a_i] = 0\in\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k}),\quad r=1,\dots,R,\ \lambda_{ri}\in\mathbf{k}.$$

Предположим, что однородные многочлены $P_{j,\alpha},Q_{j,\alpha},K_{r,\beta},L_{r,\beta}\in T(x_1,\dots,x_N)$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{ri}\cdot a_i = d_{\overline{\mathrm{B}},2}\left(\sum_\beta K_{r,\beta}(a_1,\dots,a_N)\otimes L_{r,\beta}(a_1,\dots,a_N)\right)\in I(A),\quad r=1,\dots,R,$$

а циклы в бар-конструкции

$$\sum_\alpha P_{j,\alpha}(a_j,\dots,a_N)\otimes Q_{j,\alpha}(a_1,\dots,a_N)\in I(A)\otimes I(A),\quad j=1,\dots,M,$$

порождают $\mathbf{k}$-модуль $\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Тогда алгебра A имеет копредставление

$$A\cong T(x_1,\dots,x_N)/\left(\sum_{i=1}^N\lambda_{ri}x_i=\sum_\beta \overline{K}_{r,\beta}\cdot L_{r,\beta},\ r=1,\dots,R;\ \sum_\alpha \overline{P}_{j,\alpha}\cdot Q_{j,\alpha}=0,\ j=1,\dots,M\right).$$

(Здесь N,M,R могут быть бесконечными кардиналами любой мощности.)

Доказательство утверждения (1). Рассмотрим отображение $f : T(x_1,\dots,x_N)\to A$, $x_i\mapsto a_i$, of connected algebras. Классы $[a_1],\dots,[a_N]$ порождают $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ и являются образами классов $[x_1],\dots,[x_N]$ при отображении $f_{*,1} : \operatorname{Tor}_1^{T(x_1,\dots,x_N)}(\mathbf{k},\mathbf{k})\to\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Поэтому $f_{*,1}$ сюръективно. По пункту (1) леммы A.5, f сюръективно. □

Доказательство утверждения (2). Рассмотрим алгебру

$$C:=T(x_1,\dots,x_N)/\left(\sum_{i=1}^N\lambda_{ri}x_i=\sum_\beta \overline{K}_{r,\beta}\cdot L_{r,\beta},\ r=1,\dots,R;\ \sum_\alpha \overline{P}_{j,\alpha}\cdot Q_{j,\alpha}=0,\ j=1,\dots,M\right).$$

Следующие тождества в A выполнены по условию:

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ri}\cdot a_i=\sum_{\beta}\overline{K}_{r,\beta}(a_1,\dots,a_N)\cdot L_{r,\beta}(a_1,\dots,a_N),\quad 0=\sum_{\alpha}\overline{P}_{j,\alpha}(a_1,\dots,a_N)\cdot Q_{j,\alpha}(a_1,\dots,a_N).$$

Поэтому отображение $f:C\to A$, $x_i\mapsto a_i$, корректно определено. Индуцированное отображение $f_{*,1}:\mathrm{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})\to\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ сюръективно, так как элементы $[a_i]=f_{*,1}([x_i])$ порождают $\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$.

Докажем, что $f_{*,1}$ инъективно. Пусть $\xi\in\mathrm{Tor}_1^C(\mathbf{k},\mathbf{k})$ и $f_{*,1}(\xi)=0$. По следствию A.3, имеем $\xi=\sum_{i=1}^N\mu_i\cdot[x_i]$ для некоторых $\mu_i\in\mathbf{k}$. Тогда $0=f_*(\xi)=\sum_i\mu_i[a_i]\in\mathrm{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Все линейные соотношения между $[a_1],\dots,[a_N]$ следуют из соотношений $\sum_i\lambda_{ri}[a_i]=0$, поэтому $\mu_i=\sum_{r=1}^R c_r\lambda_{ri}$ для некоторых $c_r\in\mathbf{k}$. Следовательно, элемент ξ представлен циклом

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{R}c_r\lambda_{ri}\cdot x_i=\sum_{r=1}^{R}c_r\sum_{\beta}\overline{K}_{r,\beta}\cdot L_{r,\beta}=d_{\overline{\mathrm{B}},2}\left(\sum_{r=1}^{R}c_r\sum_{\beta}K_{r,\beta}\otimes L_{r,\beta}\right)\in\overline{\mathrm{B}}_1(C).$$

Итак, $\xi=0$. Мы доказали, что $f_{*,1}$ биективно.

Элементы $\sum_\alpha P_{i,\alpha}\otimes Q_{i,\alpha}\in I(C)\otimes I(C)$ — это циклы в $\overline{\mathrm{B}}_2(C)$, образы которых порождают $\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Поэтому $f_{*,2}:\mathrm{Tor}_2^C(\mathbf{k},\mathbf{k})\to\mathrm{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ сюръективны. Условия пункта (2) леммы A.5 выполнены, поэтому f биективно. $\square$

A.4. **Оценки на число однородных образующих и соотношений.** Пусть A — связная $\mathbf{k}$-алгебра. Предложение A.1 дает нижнюю оценку на число образующих и соотношений в однородных копредставлениях A, а теорема A.6 — верхнюю оценку. Эти оценки совпадают, если $\mathbf{k}$ — область главных идеалов, а все градуированные компоненты конечно порождены. Введём обозначения.

Определение A.7. Пусть M — конечно порожденный модуль над областью главных идеалов $\mathbf{k}$. По структурной теореме для таких модулей имеем

$$M\simeq\mathbf{k}/(d_1)\oplus\dots\oplus\mathbf{k}/(d_r),\tag{A.1}$$

где $d_1,\dots,d_r\in\mathbf{k}$ необратимы, и $d_i\mid d_{i+1}$ для всех $i=1,\dots,r-1$. Число r определено однозначно, а каждый из элементов d_i — однозначно с точностью до умножения на обратимый элемент. Поэтому числа

$$\mathrm{gen}\,M:=r,\quad \mathrm{rel}\,M:=\max\{s:\ d_s\neq 0\}$$

корректно определены. Имеем короткую точную последовательность $\mathbf{k}^{\mathrm{rel}\,M}\to\mathbf{k}^{\mathrm{gen}\,M}\to M\to 0$.

Лемма A.8. *Пусть $\mathbf{k}$ — область главных идеалов, и имеем короткую точную последовательность $\mathbf{k}^A\xrightarrow{f}\mathbf{k}^B\to M\to 0$ для некоторых $A,B<\infty$. Тогда $A\geq\mathrm{rel}\,M$ и $B\geq\mathrm{gen}\,M$.*

Доказательство. Можно считать, что отображение f приведено к нормальной форме Смита, то есть задано диагональной матрицей с элементами $d_1',\dots,d_s'$ на диагонали, причем $d_1'\mid d_2'\mid\dots\mid d_s'$. Уберем все нулевые столбцы из матрицы: это не изменит коядро и не увеличит A. Если элемент d_i' обратим, уберем i-ую строку и i-ый столбец: это не изменит коядро и уменьшит числа A,B на 1. Так мы получим диагональную матрицу $B'\times A'$, не имеющую нулевых столбцов и обратимых элементов на диагонали. Тогда коядро имеет вид в точности (A.1), причем $B'=r=\mathrm{gen}\,M$ и $A'=s=\mathrm{rel}\,M$. $\square$

Лемма A.9. *Пусть $\mathbf{k}$ — область главных идеалов, $0\to\mathbf{k}^a\to\mathbf{k}^b\xrightarrow{f}\mathbf{k}^c\to 0$ — точная последовательность $\mathbf{k}$-модулей для некоторых $a,b,c<\infty$. Тогда $b=a+c$.*

Доказательство. Можно считать, что f приведено к нормальной форме Смита. Тогда f представлено диагональной матрицей $c\times b$. Так как f сюръективно, все строки матрицы ненулевые, а диагональные элементы необратимы. Поэтому $\mathrm{Ker}\,f\simeq\mathbf{k}^{b-c}$. Имеем $\mathbf{k}^d\not\simeq\mathbf{k}^{d'}$ при $d\neq d'$, поэтому $a=b-c$. $\square$

Напомним, что мы рассматриваем G-градуированные алгебры, связные относительно $\mathbb{Z}$-градуировки (заданной гомоморфизмом моноидов $G\to\mathbb{Z}$).

Теорема A.10. *Пусть A — связная ассоциативная алгебра с единицей над областью главных идеалов $\mathbf{k}$. Предположим, что $\mathbf{k}$-модули $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ и $\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ конечно порождены для всех $n \in G$. Тогда*

(1) *A допускает однородное копредставление, содержащее (для каждого n) ровно $\operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ образующих и $\operatorname{gen}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n + \operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ соотношений степени n.*

(2) *Если A допускает однородное копредставление, содержащее N_n образующих и M_n соотношений степени n, то*

$$N_n \geq \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n, \quad M_n \geq \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n + \operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n. \tag{A.2}$$

Доказательство утверждения (1). Для каждого n выберем набор из $\operatorname{gen}(\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n)$ аддитивных порождающих для $\mathbf{k}$-модуля $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$, набор из $\operatorname{rel}(\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n)$ определяющих соотношений между ними, и набор из $\operatorname{gen}(\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n)$ порождающих для $\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$. Эти элементы представляются циклами и границами в бар-конструкции. Применив теорему A.6 к ним, мы получим копредставление требуемого размера. □

Доказательство утверждения (2). Применим предложение A.1 и продолжим точную последовательность до свободной резольвенты левого A-модуля $\mathbf{k}$. Она имеет вид

$$\cdots \to A \otimes \mathbf{k}^M \to A \otimes \mathbf{k}^N \to A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k} \to 0.$$

Применив функтор $\mathbf{k} \otimes_A (-)$, мы получим цепной комплекс градуированных $\mathbf{k}$-модулей

$$\cdots \to \mathbf{k}^M \xrightarrow{\partial} \mathbf{k}^N \xrightarrow{0} \mathbf{k} \to 0,$$

гомологии которого равны $\operatorname{Tor}^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$. Поэтому для некоторого $\partial_n : \mathbf{k}^{M_n} \to \mathbf{k}^{N_n}$ имеем

$$\operatorname{Coker}\partial_n \simeq \operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n, \quad \operatorname{Ker}\partial_n \twoheadrightarrow \operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n.$$

В частности, модуль $\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ порождается N_n элементами, поэтому $N_n \geq \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$.

Если M_n бесконечно, то оба неравенства (A.2) выполнены, так как правые части неравенств конечны. Если же M_n конечно, то N_n также конечно (так как $\operatorname{Coker}\partial_n$ конечно порождено). Поэтому $\operatorname{Ker}\partial_n \subset \mathbf{k}^{M_n}$, $\operatorname{Im}\partial_n \subset \mathbf{k}^{N_n}$ — подмодули конечно порожденных свободных модулей, поэтому эти модули свободны: $\operatorname{Ker}\partial_n \simeq \mathbf{k}^P$, $\operatorname{Im}\partial_n \simeq \mathbf{k}^Q$. Получаем точные последовательности

$$\mathbf{k}^P \to \mathbf{k}^{N_n} \to \operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \to 0, \quad \mathbf{k}^Q \to \operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n \to 0, \quad 0 \to \mathbf{k}^P \to \mathbf{k}^{M_n} \to \mathbf{k}^Q \to 0.$$

Тогда $N_n \geq \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$, $P \geq \operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$, $Q \geq \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ по лемме A.8 и $P + Q = M_n$ по лемме A.9. Это доказывает неравенства (A.2). □

Как следствие получаем известный результат Уолла [Wal60, §7]:

Следствие A.11. *Пусть A — связная ассоциативная алгебра над полем $\mathbf{k}$. Тогда*

(1) *A допускает однородное копредставление, которое содержит (для каждого n) ровно $\dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ образующих и $\dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ соотношений степени n.*

(2) *Если A допускает однородное копредставление, которое содержит ровно N_n образующих и M_n соотношений степени n, то $N_n \geq \dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$ и $M_n \geq \dim_{\mathbf{k}}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k})_n$.* □

Мы также получаем критерий свободности.

Следствие A.12 ([Nei10, Proposition 8.5.4])**.** *Пусть A — связная ассоциативная алгебра над кольцом главных идеалов $\mathbf{k}$. Следующие условия эквивалентны.*

(a) *A — свободная алгебра (тензорная алгебра на однородных образующих).*

(b) *$\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, и $\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) = 0$.*

Доказательство. По следствию A.4, из (a) следует (b). Наоборот, пусть (b) выполнено. Имеем $\operatorname{rel}\operatorname{Tor}_1^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \operatorname{gen}\operatorname{Tor}_2^A(\mathbf{k},\mathbf{k}) = 0$. По пункту (1) теоремы A.10, алгебра A допускает копредставление, в котором нет соотношений. Значит, A свободна. □

Приложение B. Гомологии петель и расширения алгебр Хопфа

Рассмотрим гомотопическое расслоение $F \to E \xrightarrow{p} B$ односвязных пространств такое, что отображение $\Omega p : \Omega E \to \Omega B$ имеет гомотопическое сечение (то есть существуют непрерывное отображение $\sigma : \Omega B \to \Omega E$, сохраняющее отмеченные точки, и гомотопия $\Omega p \circ \sigma \sim \mathrm{id}_{\Omega B}$). Хорошо известно, что тогда пространства ΩE и $\Omega F \times \Omega B$ гомотопически эквивалентны ([EH60, Theorem 5.2], см. также [BBS24, Proposition A.2]). Если гомологии этих пространств петель — свободный $\mathbf{k}$-модуль, мы получаем расширение алгебр Хопфа $\mathbf{k} \to H_*(\Omega F; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega E; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega B; \mathbf{k}) \to \mathbf{k}$. В теореме B.3 мы приводим полное доказательство этого фольклорного результата. Мы рассматриваем обычные пространства петель вместо петель Мура, поэтому изоморфизм H-пространств $\Omega(X \times Y) \cong \Omega X \times \Omega Y$ строго сохраняет умножение.

Имеем естественный изоморфизм

$$\alpha : \pi_n(A \times B) \xrightarrow{\cong} \pi_n(A) \oplus \pi_n(B), \quad [f] \mapsto [\mathrm{pr}_A \circ f] \oplus [\mathrm{pr}_B \circ f]$$

для произвольных A, B и $n \geq 1$. Обозначим вложение отмеченной точки через $\varepsilon : * \to Y$, отображение в точку — через $\eta : Y \to *$.

Лемма B.1. *Пусть X — односвязное пространство, $\mu : \Omega X \times \Omega X \to \Omega X$ — композиция петель. Следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(\Omega X \times \Omega X) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & \pi_n(\Omega X) \\
\pi_n(\Omega X) \oplus \pi_n(\Omega X) \arrow[ur, "(x,y)\mapsto x+y"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть элементы $x, y \in \pi_n(\Omega X)$ представлены отображениями $f, g : S^n \to \Omega X$. Рассмотрим элемент $z = [f \times \eta] + [\eta \times g] \in \pi_n(\Omega X \times \Omega X)$.

Отображение $\mu \circ (f \times \eta)$ совпадает с композицией $S^n \xrightarrow{f} \Omega X \xrightarrow{\mathrm{id} \times \eta} \Omega X \times \Omega X \xrightarrow{\mu} \Omega X$. Композиция последних двух отображений гомотопна тождественному отображению, поэтому $\mu \circ (f \times \eta) \sim f$. Переходя к гомотопическим группам, получаем $\mu_*([f \times \eta]) = x$. Аналогично, $\mu_*([\varepsilon \times g]) = y$, поэтому $\mu_*(z) = x + y$. С другой стороны, $\alpha([f \times \eta]) = [\mathrm{pr}_1 \circ (f \times \eta)] \oplus [\mathrm{pr}_2 \circ (f \times \eta)] = [f] \oplus [\eta\varepsilon] = x \oplus 0$. Аналогично, $\alpha([\eta \times g]) = 0 \oplus y$, hence $\alpha(z) = x \oplus y$. Получаем $\mu_*(\alpha^{-1}(x \oplus y)) = \mu_*(z) = x + y$, так что диаграмма коммутативна. □

В следующей лемме мы говорим “диаграмма коммутативна”, если она коммутативна с точностью до гомотопии.

Лемма B.2. *Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — расслоение односвязных пространств, $\sigma : \Omega B \to \Omega E$ — гомотопическое сечение для Ωp. Рассмотрим композицию*

$$f : \Omega F \times \Omega B \xrightarrow{\Omega i \times \sigma} \Omega E \times \Omega E \xrightarrow{\mu} \Omega E.$$

Тогда

(1) *f — слабая гомотопическая эквивалентность;*
(2) *f согласовано с вложением и проекцией, то есть следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
& \Omega E \arrow[dr, "\Omega p"] & \\
\Omega F \times * \arrow[ur, "\Omega i"] \arrow[r, "\mathrm{id}\times\eta"'] & \Omega F \times \Omega B \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\varepsilon\times\mathrm{id}"'] & * \times \Omega B;
\end{tikzcd}$$

(3) *f согласовано с левым действием ΩF, то есть следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
\Omega F \times \Omega F \times \Omega B \arrow[r, "\Omega i\times f"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"] & \Omega E \times \Omega E \arrow[d, "\mu"] \\
\Omega F \times \Omega B \arrow[r, "f"] & \Omega E.
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Имеем точную последовательность

$$\cdots \to \pi_n(\Omega F) \xrightarrow{(\Omega i)_*} \pi_n(\Omega E) \xrightarrow{(\Omega p)_*} \pi_n(\Omega B) \to \ldots,$$

причем отображение $(\Omega p)_*$ имеет сечение σ_*. Для всех $n \geq 1$ получаем изоморфизм групп

$$\varphi : \pi_n(\Omega F) \oplus \pi_n(\Omega B) \xrightarrow{\simeq} \pi_n(\Omega E), \quad \varphi(x, y) = (\Omega i)_*(x) + \sigma_*(y).$$

(Мы пользуемся тем, что группа $\pi_1(\Omega X)$ абелева.) Из леммы B.1 и естественности изоморфизма $\alpha : \pi_n(\Omega F \times \Omega B) \to \pi_n(\Omega F) \oplus \pi_n(\Omega B)$ получаем

$$\varphi \circ \alpha = (\mu \circ (\Omega i \times \sigma))_* = f_* : \pi_n(\Omega F \times \Omega B) \to \pi_n(\Omega E).$$

Значит f_* — изоморфизм для всех n, так что f — слабая гомотопическая эквивалентность. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega E \arrow[r, "\Omega p"] & \Omega B \\
\Omega E \times * \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\times\eta"] & \Omega E \times \Omega E \arrow[u, "\mu"'] \arrow[r, "\Omega p\times\Omega p"] & \Omega B \times \Omega B \arrow[u, "\mu"'] \\
\Omega F \times * \arrow[u, "\Omega i\times\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\times\eta"] & \Omega F \times \Omega B \arrow[u, "\Omega i\times\sigma"] \arrow[r, "\varepsilon\times\mathrm{id}"] & * \times \Omega B \arrow[u, "\eta\times\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Треугольник коммутативен, как как η — гомотопическая единица в ΩE. Правый верхний квадрат коммутативен, так как Ωp — отображение H-пространств. Нижний левый квадрат коммутативен, так как $\eta_{\Omega E} = \sigma \circ \eta_{\Omega B} : * \to \Omega E$. Наконец, коммутативность правого нижнего квадрата равносильна существованию гомотопий $\Omega p \circ \Omega i \sim \eta \circ \varepsilon$ и $\Omega p \circ \sigma \sim \mathrm{id}$. Первая гомотопия существует, так как композиция $p \circ i$ гомотопически тривиальна; вторая гомотопия существует, так как σ — гомотопическое сечение для Ωp. Поэтому вся диаграмма коммутативна. Правая сторона диаграммы гомотопна отображению $\mathrm{id} : \Omega B \to \Omega B$, так как η — гомотопическая единица в ΩB. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega E \arrow[r, "\Omega p"] & \Omega B \\
\Omega F \times * \arrow[ur, "\Omega i\times\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}\times\eta"] & \Omega F \times \Omega B \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\varepsilon\times\mathrm{id}"] & * \times \Omega B, \arrow[u, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

эквивалентную диаграмме (2). Наконец, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Omega F \times \Omega F \times \Omega B \arrow[r, "\Omega i\times\Omega i\times\sigma"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"] & \Omega E \times \Omega E \times \Omega E \arrow[r, "\mathrm{id}\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times\mathrm{id}"] & \Omega E \times \Omega E \arrow[d, "\mu"] \\
\Omega F \times \Omega B \arrow[r, "\Omega i\times\sigma"] & \Omega E \times \Omega E \arrow[r, "\mu"] & \Omega E.
\end{tikzcd}$$

Левый квадрат коммутативен, так как $\Omega i : \Omega F \to \Omega E$ — отображение H-пространств; правый квадрат коммутативен, так как μ гомотопически ассоциативна. Верхняя сторона диаграммы равна $\Omega i \times (\mu \circ (\Omega i \times \sigma)) = \Omega i \times f$, а нижняя сторона равна f. Значит, это в точности диаграмма (3). □

В доказательстве следующей теоремы используется отображение Кюннета $\kappa : H_*(X; \mathbf{k}) \otimes H_*(Y; \mathbf{k}) \to H_*(X \times Y; \mathbf{k})$. Оно естественно и ассоциативно. Отображение Кюннета — изоморфизм, если $H_*(Y; \mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль.

Если X односвязно, и $H_*(\Omega X; \mathbf{k})$ — свободный $\mathbf{k}$-модуль, этот модуль является связной $\mathbf{k}$-алгеброй Хопфа относительно стандартного cup-коумножения (см. параграф 2.4) и умножения Понтрягина

$$m : H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \xrightarrow{\kappa} H_*(\Omega X \times \Omega X; \mathbf{k}) \xrightarrow{\mu_*} H_*(\Omega X; \mathbf{k}),$$

Отображения единицы и коединицы $\mathbf{k} \xrightarrow{\eta} H_*(\Omega X; \mathbf{k}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k}$ Индуцированы отображениями H-пространств $* \xrightarrow{\eta} \Omega X \xrightarrow{\varepsilon} *$.

Теорема B.3. *Пусть $\mathbf{k}$ — коммутативное кольцо с единицей. Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — гомотопическое расслоение односвязных пространств такое, что $H_*(\Omega B;\mathbf{k})$ и $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$ — свободные $\mathbf{k}$-модули, а отображение Ωp имеет гомотопическое сечение $\sigma : \Omega B \to \Omega E$. Рассмотрим композицию*

$$\Phi : H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega B;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega i)_*\otimes\sigma_*} H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \otimes H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \xrightarrow{m} H_*(\Omega E;\mathbf{k}).$$

Тогда

(1) Φ — *изоморфизм* $\mathbf{k}$*-модулей;*
(2) $(\Omega i)_* = \Phi \circ (\mathrm{id}_{H_*(\Omega F;\mathbf{k})} \otimes \eta_{H_*(\Omega B;\mathbf{k})})$;
(3) $(\Omega p)_* \circ \Phi = \varepsilon_{H_*(\Omega F;\mathbf{k})} \otimes \mathrm{id}_{H_*(\Omega B;\mathbf{k})}$;
(4) Φ — *морфизм левых $H_*(\Omega F;\mathbf{k})$-модулей и правых $H_*(\Omega B;\mathbf{k})$-комодулей, где структура (ко)модуля на $H_*(\Omega E;\mathbf{k})$ индуцирована отображениями $(\Omega i)_*$ и $(\Omega p)_*$.*

Таким образом, $\mathbf{k} \to H_*(\Omega F;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega i)_*} H_*(\Omega E;\mathbf{k}) \xrightarrow{(\Omega p)_*} H_*(\Omega B;\mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ *— расширение связных алгебр Хопфа над* $\mathbf{k}$.

Доказательство. Будем писать $H_*(\Omega X)$ вместо $H_*(\Omega X;\mathbf{k})$. Заметим, что σ непрерывно, а Ωi, Ωp — отображения H-пространств. Поэтому σ_* — отображение коалгебр, а $(\Omega i)_*$, $(\Omega p)_*$ — отображения алгебр Хопфа. Следующая диаграмма коммутативна за счет естественности отображения Кюннета:

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "(\Omega i)_*\otimes\sigma_*"] \arrow[d, "\kappa"', "\simeq"] & H_*(\Omega E)\otimes H_*(\Omega E) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\kappa"'] & H_*(\Omega E) \arrow[d, equal] \\
H_*(\Omega F\times\Omega B) \arrow[r, "(\Omega i\times\sigma)_*"] & H_*(\Omega E\times\Omega E) \arrow[r, "\mu_*"] & H_*(\Omega E).
\end{tikzcd}$$

Верхняя сторона диаграммы равна Φ, нижняя сторона равна f_*. Значит, отображение Φ совпадает с композицией $H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \xrightarrow{\kappa} H_*(\Omega F\times\Omega B) \xrightarrow{f_*} H_*(\Omega E)$. Левое отображение биективно по условию, правое биективно по пункту (1) леммы B.2. Значит, Φ — изоморфизм. Пункт (1) доказан. Далее, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & H_*(\Omega E) \arrow[dr, bend left, "(\Omega p)_*"] & \\
H_*(\Omega F\times *) \arrow[ur, bend left, "(\Omega i)_*"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\times\eta)_*"'] & H_*(\Omega F\times\Omega B) \arrow[u, "f_*"] \arrow[r, "(\varepsilon\times\mathrm{id})_*"'] & H_*(*\times\Omega B) \\
H_*(\Omega F)\otimes\mathbf{k} \arrow[u, "\kappa", "\simeq"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta"] & H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[u, "\kappa"] \arrow[r, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] & \mathbf{k}\otimes H_*(\Omega B). \arrow[u, "\kappa", "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Верхняя половина диаграммы коммутативна по пункту (2) леммы B.2, нижняя — из естественности κ. Так как $f_*\circ\kappa = \Phi$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & H_*(\Omega E) \arrow[dr, bend left, "(\Omega p)_*"] & \\
H_*(\Omega F) \arrow[ur, bend left, "(\Omega i)_*"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta"] & H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"] & H_*(\Omega B),
\end{tikzcd}$$

которая доказывает пункты (2) и (3). Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\kappa"] \arrow[d, "\kappa\otimes\mathrm{id}"] & H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega F\times\Omega B) \arrow[r, "(\Omega i)_*\otimes f_*"] \arrow[d, "\kappa"] & H_*(\Omega E)\otimes H_*(\Omega E) \arrow[d, "\kappa"] \\
H_*(\Omega F\times\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\kappa\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu_*\otimes\mathrm{id}"] & H_*(\Omega F\times\Omega F\times\Omega B) \arrow[r, "(\Omega i\times f)_*"] \arrow[d, "(\mu\times\mathrm{id})_*"] & H_*(\Omega E\times\Omega E) \arrow[d, "\mu_*"] \\
H_*(\Omega F)\otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\kappa"] & H_*(\Omega F\times\Omega B) \arrow[r, "f_*"] & H_*(\Omega E).
\end{tikzcd}$$

Нижний правый квадрат комутативен по пункту (3) леммы B.2(3), остальные квадраты коммутативны из естественности κ. Так как $\mu_* \circ \kappa = m : H_*(\Omega X) \otimes H_*(\Omega X) \to H_*(\Omega X)$, граница диаграммы имеет вид

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "(\Omega i)_* \otimes \Phi"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{id}"] & H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \arrow[d, "m"] \\
H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\Phi"] & H_*(\Omega E).
\end{tikzcd}$$

Значит, Φ — отображение левых $H_*(\Omega F)$-модулей. Проверим, что Φ — отображение правых $H_*(\Omega B)$-комодулей. Разложим Φ в композицию

$$H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \sigma_*} H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega E) \xrightarrow{(\Omega i)_* \otimes \mathrm{id}} H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \xrightarrow{\mu} H_*(\Omega E).$$

Первый элемент этой последовательности — свободный правый $H_*(\Omega B)$-комодуль, остальные — свободные правые $H_*(\Omega E)$-комодули, на которых структура правого $H_*(\Omega B)$-комодуля возникает за счет отображения коалгебр $(\Omega p)_* : H_*(\Omega E) \to H_*(\Omega B)$. Среднее отображение индуцировано отображением $(\Omega i)_*$ и поэтому является морфизмом $H_*(\Omega E)$-комодулей (следовательно, и морфизмом $H_*(\Omega B)$-комодулей). Правое отображение также является морфизмом: $H_*(\Omega E)$ — алгебра Хопфа, поэтому диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & H_*(\Omega E) \arrow[d, "\Delta"] \\
H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] & H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Осталось показать, что $\mathrm{id} \otimes \sigma_*$ — морфизм $H_*(\Omega B)$-комодулей. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \sigma_*"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega E) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] \\
H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B) \otimes H_*(\Omega B) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \sigma_* \otimes \sigma_*"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \sigma_* \otimes \mathrm{id}"'] & H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega E) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes (\Omega p)_*"] \\
 & H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega E) \otimes H_*(\Omega B).
\end{tikzcd}$$

Квадрат коммутативен, так как σ_* — отображение коалгебр. Треугольник коммутативен, так как $(\Omega p)_* \circ \sigma_* = \mathrm{id}$. Левая сторона диаграммы — это отображение правого кодействия коалгебры $H_*(\Omega B)$ на $H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega B)$, а правая сторона диаграммы — отображение правого кодействия на $H_*(\Omega F) \otimes H_*(\Omega E)$. Итак, $\mathrm{id} \otimes \sigma_*$ — морфизм $H_*(\Omega B)$-комодулей. Пункт (4) доказан.

Так как утверждения (1)-(4) верны, отображения алгебр Хопфа $(\Omega i)_* : H_*(\Omega F) \to H_*(\Omega E)$ и $(\Omega p)_* : H_*(\Omega E) \to H_*(\Omega B)$ образуют расширение алгебр Хопфа по предложению 2.4. $\square$

Напомним, что элемент $x \in A$ алгебры Хопфа *примитивен*, если $\Delta x = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Множество примитивных элементов образует подалгебру Ли $PA \subset A$. Всякое отображение алгебр Хопфа $f : A \to A'$ индуцирует отображение алгебр Ли $Pf := f|_{PA} : PA \to PA'$.

Следствие B.4. *Пусть выполнены условия теоремы B.3, и $x \in H_*(\Omega E; \mathbf{k})$ — примитивный элемент такой, что $(\Omega p)_*(x) = 0$. Тогда $x = (\Omega i)_*(y)$ для некоторого $y \in H_*(\Omega F; \mathbf{k})$.*

Доказательство. Так как $\mathbf{k} \to H_*(\Omega F; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega E; \mathbf{k}) \to H_*(\Omega B; \mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ — расширение алгебр Хопфа, последовательность $PH_*(\Omega F; \mathbf{k}) \to PH_*(\Omega E; \mathbf{k}) \to PH_*(\Omega B; \mathbf{k}) \to 0$ точна (см. [MM65, Proposition 4.10]; это также легко вывести из определений). Имеем $x \in \mathrm{Ker}(PH_*(\Omega E; \mathbf{k}) \to PH_*(\Omega B; \mathbf{k})) = \mathrm{Im}(PH_*(\Omega F; \mathbf{k}) \to PH_*(\Omega E; \mathbf{k}))$. $\square$

Приложение C. Коммутаторные тождества

Зафиксируем элементы $u_1, \ldots, u_m$ степени 1 в градуированной ассоциативной алгебре Γ. Для подмножества $I = \{i_1 < \cdots < i_k\} \subset [m]$ обозначим

$$\widehat{u}_I := u_{i_1} \cdot \ldots \cdot u_{i_k}, \quad c(I,x) := [u_{i_1}, [u_{i_2}, [\ldots [u_{i_k}, x] \ldots]]], \; x \in \Gamma.$$

Мы пишем $A < B$, если $A, B \subset [m]$ и $\max(A) < \min(B)$. Тогда при $A < B$ имеем $\widehat{u}_{A \sqcup B} = \widehat{u}_A \cdot \widehat{u}_B$ и $c(A \sqcup B, x) = c(A, c(B,x))$. Также $\widehat{u}_\varnothing = 1$, $c(\varnothing, x) = x$.

Определим кошулев знак $\theta(A,B) := |\{(a,b) \in A \times B : \; a > b\}|$. В градуированно-коммутативной алгебре мы бы имели $\widehat{u}_A \cdot \widehat{u}_B = (-1)^{\theta(A,B)} \widehat{u}_{A \sqcup B}$ при $A \cap B = \varnothing$. Свойства кошулева знака:

(1) $\theta(A,B) \equiv |A| \cdot |B| + \theta(B,A) \mod 2$;
(2) Если $A_1 \sqcup B_1 < A_2 \sqcup B_2$, то

$$\theta(A_1 \sqcup A_2, B_1 \sqcup B_2) \equiv \theta(A_1, B_1) + \theta(A_2, B_2) + |A_2| \cdot |B_1|.$$

При $I \subset [m]$, $j \in [m]$ мы пишем $I_{<j} = \{i \in I : \; i < j\}$, $I_{>j} = \{i \in I : \; i > j\}$. Мы также используем i как сокращенное обозначение для $\{i\}$.

C.1. **Перегруппировка мономов.** Следующие формулы позволяют выразить любой моном от $u_1, \ldots, u_m$ как линейную комбинацию элементов вида $c_1 \cdot \ldots \cdot c_s \cdot \widehat{u}_B$, $c_i = c(A_i, u_{j_i})$, $A_i \neq \varnothing$.

Лемма C.1. *Пусть $x \in \Gamma$ — однородный элемент, $I \subset [m]$. Тогда*

$$\widehat{u}_I \cdot x = \sum_{I = A \sqcup B} (-1)^{\theta(A,B) + \deg(x) \cdot |B|} c(A,x) \widehat{u}_B. \tag{C.1}$$

Доказательство. Обозначим $d := \deg(x)$. Индукция по $|I|$. База $I = \varnothing$ очевидна. Шаг индукции: пусть $i = \min(I)$, $I' = I \setminus i$. Тогда правая часть тождества равна

$$\sum_{I' = A \sqcup B} (-1)^{\theta(i \sqcup A, B) + d \cdot |B|} c(i \sqcup A, x) \widehat{u}_B + \sum_{I' = A \sqcup B} (-1)^{\theta(A, i \sqcup B) + d \cdot |i \sqcup B|} c(A,x) \widehat{u}_{i \sqcup B}$$
$$= \sum_{I' = A \sqcup B} (-1)^{\theta(A,B) + d \cdot |B|} \Big([u_i, c(A,x)] + (-1)^{|A| + d} c(A,x) u_i \Big) \cdot \widehat{u}_B$$
$$= \sum_{I' = A \sqcup B} (-1)^{\theta(A,B) + d \cdot |B|} \, u_i c(A,x) \cdot \widehat{u}_B.$$

По предположению индукции, эта сумма равна $u_i \cdot \widehat{u}_{I'} x = \widehat{u}_I \cdot x$. □

Предложение C.2. *Пусть $I \subset [m]$, $j \in [m]$. Тогда*

$$\widehat{u}_I \cdot u_j = \sum_{\substack{I = A \sqcup B: \\ \max(A) > j}} (-1)^{\theta(A,B) + |B|} c(A, u_j) \widehat{u}_B + (-1)^{|I_{>j}|} \cdot \begin{cases} \widehat{u}_{I \sqcup j}, & j \notin I; \\ \widehat{u}_{I_{<j}} \cdot u_j^2 \cdot \widehat{u}_{I_{>j}}, & j \in I. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $P = I_{\le j}$, $Q = I_{>j}$. Тогда $P < Q$, поэтому

$$\widehat{u}_I = \widehat{u}_P \widehat{u}_Q, \quad r := \widehat{u}_P \, u_j \, \widehat{u}_Q = \begin{cases} \widehat{u}_{I \sqcup \{j\}}, & j \notin I; \\ \widehat{u}_{I_{<j}} \cdot u_j^2 \cdot \widehat{u}_{I_{>j}}, & j \in I. \end{cases}$$

Применим формулу (C.1) к $\widehat{u}_Q \cdot u_j$, и рассмотрим отдельно слагаемое с $A_2 = \varnothing$:

$$\widehat{u}_I \cdot u_j = \widehat{u}_P \, \widehat{u}_Q \, u_j = \sum_{Q = A_2 \sqcup B_2} (-1)^{\theta(A_2, B_2) + |B_2|} \, \widehat{u}_P \, c(A_2, u_j) \, \widehat{u}_{B_2}$$
$$= (-1)^{|Q|} \widehat{u}_P \, u_j \, \widehat{u}_Q + \sum_{\substack{Q = A_2 \sqcup B_2: \\ A_2 \neq \varnothing}} (-1)^{\theta(A_2, B_2) + |B_2|} \, \widehat{u}_P \, c(A_2, u_j) \, \widehat{u}_{B_2}.$$

Применяя ([C.1](#)) к $\widehat{u}_P \cdot c(A_2, u_j)$, получаем требуемое тождество:

$$\widehat{u}_I \cdot u_j = (-1)^{|Q|} r + \sum_{P=A_1\sqcup B_1} \sum_{\substack{Q=A_2\sqcup B_2:\\ A_2\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A_1,B_1)+(|A_2|+1)\cdot|B_1|+\theta(A_2,B_2)+|B_2|} c(A_1, c(A_2,u_j))\widehat{u}_{B_1}\widehat{u}_{B_2}$$

$$= (-1)^{|Q|} r + \sum_{\substack{P\sqcup Q=A\sqcup B:\\ A_{>j}\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} c(A,u_j)\widehat{u}_B. \quad \square$$

C.2. **Тождества с вложенными коммутаторами.**

Лемма C.3. *Для каждого $I\subset[m]$ и однородных элементов $x,y\in\Gamma$ имеем*

$$\text{(C.2)}\quad c(I,[x,y]) = \sum_{I=A\sqcup B} (-1)^{\theta(A,B)+\deg(x)\cdot|B|}\,[c(A,x),c(B,y)]$$

$$= [c(I,x),y] + (-1)^{\deg(x)\cdot|I|}[x,c(I,y)] + \sum_{\substack{I=A\sqcup B,\\ A,B\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+\deg(x)\cdot|B|}\,[c(A,x),c(B,y)]\,.$$

Доказательство. Второе тождество следует из $\theta(\varnothing,I)=\theta(I,\varnothing)=0$ и $c(\varnothing,x)=x$. Докажем первое тождество индукцией по $|I|$. База $I=\varnothing$ очевидна. Шаг индукции: обозначим $i=\min(I)$, $I'=I\setminus i$, $d=\deg(x)$. По предположению индукции,

$$c(I,[x,y]) = [u_i, c(I',[x,y])] = \sum_{I'=A'\sqcup B'} (-1)^{\theta(A',B')+d\cdot|B'|}[u_i,[c(A',x),c(B',y)]]$$

$$= \sum_{I'=A'\sqcup B'} (-1)^{\theta(A',B')+d\cdot|B'|}[[u_i,c(A',x)],c(B',y)] + \sum_{I'=A'\sqcup B'} (-1)^{\theta(A',B')+d\cdot|B'|+d+|A'|}[c(A',x),[u_i,c(B',y)]]$$

$$= \sum_{I'=A'\sqcup B'} (-1)^{\theta(i\sqcup A',B')+d\cdot|B'|}[c(i\sqcup A',x),c(B',y)] + \sum_{I'=A'\sqcup B'} (-1)^{\theta(A',i\sqcup B')+d\cdot|i\sqcup B'|}[c(A',x),c(i\sqcup B',y)]$$

$$= \sum_{I=A\sqcup B} (-1)^{\theta(A,B)+d\cdot|B|}[c(A,x),c(B,y)]. \quad \square$$

Следствие C.4. *Пусть $I\subset[m]$, $I=I''\sqcup I'$, $I''<I'$. Пусть $x,y\in\Gamma$ — однородные элементы, $\mathcal{A}\subset 2^{I'}\times 2^{I'}$ — семейство пар подмножеств. Тогда*

$$\text{(C.3)}\quad \sum_{\substack{I'=A'\sqcup B':\\ (A',B')\in\mathcal{A}}} (-1)^{\theta(A',B')+|B'|}\, c(I'',[c(A',x),c(B',y)]) = \sum_{\substack{I=A\sqcup B:\\ (A\cap I',B\cap I')\in\mathcal{A}}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|}\,[c(A,x),c(B,y)].$$

Доказательство. Следует из ([C.2](#)) и тождеств $c(A'',c(A',x))=c(A''\sqcup A',x)$, $\theta(A''\sqcup A',B''\sqcup B')=\theta(A'',B'')+\theta(A',B')+|A'|\cdot|B''|$, выполненных при $A'',B''<A',B'$. $\square$

Предложение C.5. *Пусть $J\subset[m]$ и $i,j\in J$ таковы, что $i<j$ и $J_{>j}\neq\varnothing$. Тогда*

$$\text{(C.4)}\quad c(J\setminus ij,[u_i,u_j]) = (-1)^{|J_{>j}|}c(J\setminus i,u_i) - (-1)^{|J_{>i}|}c(J\setminus j,u_j)$$

$$+ \sum_{\substack{J\setminus ij=A\sqcup B:\\ A_{>i},B_{>j}\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|}[c(A,u_i),c(B,u_j)].$$

Доказательство. Обозначим $P=J_{<j}$, $Q=J_{>i}\cap J_{<j}$, $R=J_{>j}$. Тогда $P<i<Q<j<R$ и $R\neq\varnothing$. Левая часть доказываемого тождества равна $x:=c(P\sqcup Q,c(R,[u_i,u_j]))$. Обозначим также $y:=c(P\sqcup Q,[c(R,u_i),u_j]])$, $z:=c(P\sqcup Q,[u_i,c(R,u_j)])$. Тогда

$$x = y + (-1)^{|R|}z + \sum_{\substack{R=A'\sqcup B':\\ A',B'\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A',B')+|B'|}c(P\sqcup Q,[c(A',u_i),c(B',u_j)])$$

$$\underset{(\text{C.3})}{=} y + (-1)^{|R|}z + \sum_{\substack{J\setminus ij=A\sqcup B:\\ A_{>j},B_{>j}\neq\varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|}[c(A,u_i),c(B,u_j)],$$

$$y = (-1)^{|R|}c(P\sqcup Q,[u_j,c(R,u_i)]) = (-1)^{|R|}c(J\setminus i,u_i),$$

$$z = c(P, c(Q, [u_i, c(R, u_j)])) \underset{(\text{C.2})}{=} c(P, [c(Q, u_i), c(R, u_j)]) + (-1)^{|Q|} \underbrace{c(P, [u_i, c(Q \sqcup R, u_j)])}_{=c(J \setminus j, u_j)}$$

$$+ \sum_{\substack{Q=A_2 \sqcup B_2: \\ A_2, B_2 \neq \varnothing}} (-1)^{\theta(A_2,B_2)+|B_2|} c(P, [c(A_2, u_i), c(B_2 \sqcup R, u_j)])$$

$$\underset{(\text{C.3})}{=} (-1)^{|R|} \sum_{\substack{J \setminus ij = A \sqcup B: \\ B \cap Q = \varnothing, \\ A_{>j} = \varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} [c(A, u_i), c(B, u_j)]$$

$$+ (-1)^{|Q|} c(J \setminus j, u_j) + (-1)^{|R|} \sum_{\substack{J \setminus ij = A \sqcup B: \\ B \cap Q \neq \varnothing, Q; \\ A_{>j} = \varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} [c(A, u_i), c(B, u_j)].$$

Поэтому

$$x = (-1)^{|R|} c(J \setminus i, u_i) + (-1)^{|Q|+|R|} c(J \setminus j, u_j)$$
$$+ \sum_{\substack{J \setminus ij = A \sqcup B: \\ A_{>i} \neq \varnothing, \\ A_{>j} = \varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} [c(A, u_i), c(B, u_j)] + \sum_{\substack{J \setminus ij = A \sqcup B: \\ A_{>j}, B_{>j} \neq \varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} [c(A, u_i), c(B, u_j)].$$

В первой сумме условие $B_{>j} \neq \varnothing$ всегда выполнено, так как $R = A_{>j} \sqcup B_{>j}$, $A_{>j} = \varnothing$ и $R \neq \varnothing$. Во второй сумме всегда выполнено условие $A_{>i} \neq \varnothing$. Поэтому суммы можно объединить в одну сумму

$$\sum_{\substack{J \setminus ij = A \sqcup B: \\ A_{>i}, B_{>j} \neq \varnothing}} (-1)^{\theta(A,B)+|B|} [c(A, u_i), c(B, u_j)].$$

Используя $|R| = |J_{>j}|$ и $|Q + |R| = |J_{>i}| - 1$, получаем искомое тождество (C.4). □

Список литературы

[AD95] N. Andruskiewitsch and J. Devoto. St. Petersburg Math. J., 7:1 (1995), 17-52. 5

[AD15] D. Anick and W. Dicks. A mnemonic for the graded-case Golod-Shafarevich inequality. Preprint (2015), arXiv:1508.03231 24

[Avr98] L. L. Avramov. *Infinite free resolutions.* In: Six Lectures on Commutative Algebra, J. Elias et al., eds. Progress in Mathematics, Birkhauser, Basel, 1998 7

[BBC19] A. Bahri, M. Bendersky, and F. R. Cohen. *Polyhedral products and features of their homotopy theory.* In: Handbook of Homotopy theory, H. Miller, ed. Chapman and Hall/CRC, 2019.

[Bau81] H.-J. Baues. The double bar and cobar constructions. Compos. Math. 43 (1981) no. 3, 331-341. 7

[BBS24] S. Basu, A. Bhowmick and S. Samanta. On the James brace product: generalization, relation to H-splitting of loop space fibrations & the J-homomorphism. Preprint (2024). arXiv:2401.16206 29

[Bro63] W. Browder. On differential Hopf algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 107(1) (1963), 153-176. 7

[BM23] G. Brumfiel and J. Morgan. Explicit acyclic models and (co)chain operations. Preprint (2023). arXiv:2310.03729 4

[BG12] V. Buchstaber and J. Grbić. Hopf algebras and homology of loop suspension spaces. In: *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics,* 75-92. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 234, Adv. Math. Sci., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014. 7

[BP15] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Toric topology* (Am. Math. Soc., Providence, RI, 2015), Math. Surv. Monogr. 204. 1, 6, 9, 10, 17, 20, 21, 22

[Cai24] Li Cai. On the graph products of simplicial groups and connected Hopf algebras. J. of Algebra, 647 (2024), 99-143.

[DJ91] Michael W. Davis and T. Januszkiewicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions. Duke Math. J. 62 (1991), 417-451. 1

[EH60] B. Eckmann, P. J. Hilton. Operators and cooperators in homotopy theory. Math. Ann. 141 (1960), 1-21. 29

[Fra21'] M. Franz. Homotopy Gerstenhaber formality of Davis-Januszkiewicz spaces. Homology Homotopy Appl. 23 (2021), 325-347. 2, 6, 7

[FHT92] Y. Felix, S. Halperin, and J.-C. Thomas. Adams' cobar equivalence. Trans. Amer. Math. Soc. 329(2) (1992), 531-549. 6

[Frö75] R. Fröberg. Determination of a class of Poincaré series. Math. Scand. 37(1), 1975, 29-39. 6

[GIPS21] J. Grbić, M. Ilyasova, T. Panov and G. Simmons. One-relator groups and algebras related to polyhedral products. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 152(1) (2021), 128-147. 15

[GPTW16] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault and J. Wu. The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes. Trans. of the Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663-6682. 2, 7, 8, 13

[Hal92] S. Halperin. Universal enveloping algebras and loop space homology. J. Pure Appl. Algebra 83 (1992), no. 3, 237-282. 7

[Lem74] J.-M. Lemaire. Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets. Lecture Notes in Mathematics, 422, 1974, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 25

[Mac95] S. MacLane. *Homology.* Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1995. 6

[MM65] J. Milnor and J. Moore. On the structure of Hopf algebras. Ann. Math. 81 (1965), 211-264. 5, 32

[Nei10] J. Neisendorfer. *Algebraic methods in unstable homotopy theory.* Cambridge Univ. Press, 2010. 28

[Nei16] J. A. Neisendorfer. What is loop multiplication anyhow? J. Homotopy Relat. Struct. 12 (2017), 659-690. 7

[NR05] D. Notbohm and N. Ray. On Davis-Januszkiewicz homotopy types I: formality and rationalisation. Algebr. Geom. Topol. 5 (2005), 31-51. 6

[PR08] T. Panov and N. Ray. Categorical aspects of toric topology. In: Toric Topology, M. Harada et al., eds. Contemp. Math., vol. 460. Amer. Math. S6oc., Providence, RI, 2008, pp. 293–322. 6

[Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer-Verlag, New York, 2009. 25, 26

[Ver16] Ya. A. Verevkin. Pontryagin algebras of some moment-angle-complexes. Dal'nevost. Math. Zh., 16:1 (2016), 9-23. 15

[Vyl22] F. Vylegzhanin. Pontryagin algebras and the LS-category of moment-angle complexes in the flag case. Proc. Steklov Inst. Math., 317 (2022), 55-77. 2, 3, 6, 8, 9

[Wal60] C. T. C. Wall. Generators and relations for the Steenrod algebra. Ann. of Math. 72 (1960), no. 3, 429-444. 23, 28