Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова

механико-математический
факультет

Курсовая работа

Исследование свойств вычисляющих отображений

Айзенберг Антон
302 группа

Научный руководитель:
Бухштабер В. М.

2007г

1 Постановка задачи.

Пусть X, X_1 и X_2 — компактные хаусдорфовы пространства, Y — конечный CW–комплекс. Рассмотрим пространство X^Y отображений Y в X с компактно-открытой топологией, а также пространство X_*^Y отображений Y в X, сохраняющих отмеченные точки.

Далее рассмотрим пространство $C(X)$ непрерывных комплекснозначных функций на X, в силу компактности X на этом пространстве задана норма $\|f\| = \sup|f(x)|$ (это пространство будет банаховым). Рассмотрим пространство $C(X)^*$ непрерывных $\mathbb{C}$–линейных функционалов на $C(X)$. Зададим на нем топологию с помощью системы полунорм: $\|F\|_f = |F(f)|$.

Переход к пространству непрерывных функций — контравариантный функтор $\mathcal{A}_1$ из **CHTop** в **Ban**. Переход к двойственному — контравариантный функтор $\mathcal{A}_2$, поэтому имеем ковариантный функтор $\mathcal{B} = \mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1$ из **CHTop** в **LTop**, который каждому компактному хаусдорфову пространству X ставит в соответствие пространство линейных непрерывных функционалов на непрерывных функциях на X. Каждому отображению $\xi : X_1 \to X_2$ ставится в соответствие $\xi_* : C(X_1)^* \to C(X_2)^*$ по правилу: $\xi_*(F)(f) = F(f \circ \xi)$, где $F \in C(X_1)^*$, $f \in C(X_2)$.

Переход к пространству отображений Y в X — ковариантный функтор $\mathcal{C}$ из **CHTop** в **Top**. Если $\xi : X_1 \to X_2$, то $\xi' = \mathcal{C}(\xi) : X_1^Y \to X_2^Y$ действует по правилу: $\xi'(p) = p \circ \xi$.

Полагаем Y фиксированным. Тогда рассмотрим для всех X отображения $\alpha_X : X^Y \to C(X)^*$. Такое семейство отображений называется функториальным, если $\forall \xi : X_1 \to X_2$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X_1^Y & \xrightarrow{\xi'} & X_2^Y \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{X_2}} \\ C(X_1)^* & \xrightarrow{\xi_*} & C(X_2)^* \end{array}$$

(т.е. задано естественное преобразование функторов $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$)

Аналогичное определение функториальных отображений дается для пунктированных пространств и пунктированных отображений.

Задача: исследование свойств функториальных отображений $\alpha_X : X^Y \to C(X)^*$.

2 Примеры.

Пример 1: $Y = pt$. Тогда $X^Y = X$, и возьмем $\alpha_X : X \to C(X)^*$, $x \mapsto ev_x$ — функционал вычисления в точке x. Эти отображения функториальны.

► $\forall x \in X_1$ и $\forall f \in C(X_2)^*$: $(\xi_* \circ ev_x)(f) = ev_x(f \circ \xi) = f(\xi(x)) = f(\xi'(x))$. Это и означает коммутативность диаграммы. ◄

Пример 2: $Y = n$. Тогда $X^Y = X^n$, отображение $\alpha_X : X^n \to C(X)^*$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto ev_{x_1} + ... + ev_{x_n}$.

▶ Аналогично. ◀

Пример 3: Пусть на Y задана комплексная мера μ со свойствами:

1) конечная;
2) счетно-аддитивная;
3) борелевская;
4) радоновская;

В дальнейшем под словом мера будет подразумеваться мера, обладающая этими свойствами.

Тогда задано отображение множеств: $ev_\mu : X^Y \to C(X)^*$ по правилу: $p \mapsto [f \mapsto \int\limits_Y f(p(y))d\mu]$, где $p \in X^Y$, а $f \in C(X)$. Такие отображения называются вычисляющими (индекс X у них не указан, т.к. обычно понятно, откуда и куда они бьют).

Утверждение 1. *Это отображение непрерывно.*

▶ Обозначим $M = \|\mu\| = |\mu|(Y)$. Надо показать, что прообраз любого открытого множества $A \subset C(X)^*$ открыт в компактно-открытой топологии на X^Y. Это достаточно доказывать для множеств из предбазы топологии в $C(X)^*$. Зададимся произвольной окрестностью функционала $F_0 = ev_\mu(p_0)$ из предбазы $U_f = \{F \in C(X)^* : |F(f) - F_0(f)| < \varepsilon\}$. Надо показать, что у p_0 есть окрестность в компактно-открытой топологии X^Y, которая отображается в U_f.

Возьмем в $\mathbb{C}$ у каждой точки x окрестность W_x радиуса $\varepsilon/2M$. Тогда $f^{-1}(W_x)$ — открытое покрытие X. Выберем конечное подпокрытие V_i. Возьмем его прообраз $A_i = p_0^{-1}(V_i)$.

Теперь ищем покрытие $\{B_i\} : \bigcup B_i = Y$, обладающее свойством: $\sum |\mu|(B_i) < 2M$. Введем множества

$$C_k = \bigcup_{(i_1,\dots,i_k)\subseteq(1,\dots,n)} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$$

$1 \leqslant k \leqslant n$ Тогда верны следующие очевидные утверждения:

1)$\sum |\mu|(A_i) = \sum |\mu(C_k)|$.

2)$C_k \supseteq C_{k+1} \Rightarrow |\mu|(C_{k+1}) \leqslant |\mu|(C_k)$.

3)$|\mu|(C_2) \leqslant \sum_{i\neq j} |\mu|(A_i \cap A_j)$

Следовательно:

$$\sum_{k=2}^{n} |\mu|(C_k) \leqslant n^3 \cdot \max_{i,j} |\mu|(A_i \cap A_j)$$

Положим $\delta = M/n^3$ Пусть для каких-то $\alpha, \beta : |\mu|(A_\alpha) \cap A_\beta) > \delta$. Воспользовавшись радоновостью меры, возьмем $K_{\alpha\beta} \subset A_\alpha \cap A_\beta : |\mu|(A_\alpha \cap A_\beta)\backslash K_{\alpha\beta}) < \delta$. Переопределим $A_\alpha = A_\alpha \backslash K_{\alpha\beta}$. Тогда вновь получается покрытие, кроме того для него число $|\mu|(A_i \cap A_j)$ не увеличилось для всех i, j, а для $i = \alpha, j = \beta$ стало меньше δ.

Проделав такую замену покрытия для всех (α, β), получим покрытие $\{B_i\}$, для которого: $\sum |\mu|(B_i) = \sum |\mu|(C_k) = |\mu|(C_1) + \sum_{k=2}^{n} |\mu|(C_k) \leqslant M + n^3 \cdot \max_{i,j} |\mu|(A_i \cap A_j) \leqslant M + n^3 \cdot \delta = 2M$.

Теперь найдем замкнутое конечное покрытие $\{Z_m\}$, подчиненное покрытию $\{B_i\}$. Оно существует в силу регулярности Y [1]. Обозначим K_i — объединение всех элементов этого покрытия, подчиненных B_i. Тогда K_i - замкнуты, следовательно компактны.

Наконец, рассмотрим открытое множество $U \subset X^Y; U = \{p \in X^Y : p(K_i) \subseteq V_i\}$. Докажем, что $ev_\mu(U) \subset U_f$.

Пусть $p \in U$. Тогда:

$$\left| \int\limits_Y f(p(y))d\mu - \int\limits_Y f(p_0(y))d\mu \right| = \left| \int\limits_Y (f(p(y)) - f(p_0(y)))d\mu \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Y |f(p(y)) - f(p_0(y))|\, d|\mu| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} |f(p(y)) - f(p_0(y))|\, d|\mu| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \mu(K_i) \right) \cdot \sup_{i; y_1, y_2 \in K_i} |f(p(y_1)) - f(p_0(y_2))| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right) = \varepsilon$$

Т.е. $ev_\mu(p) \in U_f$. ◀

Примеры 1 и 2 являются частными случаями примера 3. Если $Y = pt$ и $\mu(Y) = 1$, то $ev_\mu : p \mapsto F$, где $F(f) = \int\limits_Y f(p(y))d\mu = f(p(pt))$, т.е. F это в точности вычисление в точке $p(pt)$, как в примере 1.

Аналогично проверяется, что для $Y = n$ и меры $\mu(A) = \sharp A$, $A \subseteq Y$ получится отображение из примера 2.

Теперь покажем, что эти примеры охватывают все случаи.

Утверждение 2. *Любое функториальное семейство отображений $\alpha_X : X^Y \to C(X)^*$ задается с помощью некоторой меры на Y.*

▶ Рассмотрим $id_Y : Y \to Y$, $id_Y \in Y^Y$ применим к нему α_Y: $F_Y = \alpha_Y(id_Y) \in C(Y)^*$. Тогда любое отображение $p \in X^Y$ задает $p' : Y^Y \to X^Y$ и $p_* : C(Y)^* \to C(X)^*$. Заметим, что $p'(id_Y) = p$, имеем цепочку равенств: $\alpha_X(p) = \alpha_X(p'(id_Y)) = p_*(\alpha_Y(id_Y)) = p_*(F_Y)$. Это значит, что F_Y однозначно задает образ любого элемента $p \in X^Y$ при α_X.

Осталось понять, как может выглядеть F_Y. Ответ: $\forall F \in C(Y)^*$ существует мера μ на Y такая что: $F(f) = \int\limits_Y f(y)d\mu$ для всех $f \in C(Y)$. В случае вещественных мер — это теорема Рисса–Александрова [2]. В случае когда $F \in C(Y)^*$ ограничим функционал F на множество вещественнозначных функций. Тогда $F = F_{Re} + iF_{Im}$, где F_{Re} и F_{Im} — вещественные функционалы. Тогда существуют вещественные меры μ_{Re} и μ_{Im} такие что: $F_{Re}(f) = \int\limits_Y f(y)d\mu_{Re}$; $F_{Im}(f) = \int\limits_Y f(y)d\mu_{Im}$. Тогда $(F_{Re} + iF_{Im})(f) = \int\limits_Y f(y)d(\mu_{Re} + i\mu_{Im})$ для любой вещественнозначной функции f. Поскольку функционалы, стоящие в левой и правой частях равенства — комплексно–линейные, их значения совпадают на всех функциях из $C(Y)$. Значит они равны и F задается интегрированием по некоторой мере.

Получили: $id_Y \mapsto F_Y$, $F_Y(f) = \int\limits_Y f(y)d\mu$. По функториальности: $p \mapsto F_p$, где $p \in X^Y$, $F_p \in C(X)^*$, $F_p(f) = \int\limits_Y f(p(y))d\mu$. Это и требовалось доказать. ◄

3 Вложимость.

Утверждение 3. *Для любого Y существует мера μ_0 на Y такая, что ev_{μ_0} - вложение для всех X.*

► Доказываем для компактных сепарабельных Y, т.е. считаем, что на Y есть счетное всюду плотное множество точек $Y_0 = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Зададим веса этих точек: $q_n = \mu_0(y_n) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Числа q_n обладают следующими свойствами:

1) $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_n = 1$

2) A и B - подмножества $\mathbb{N}$. Тогда $(A = B) \Leftrightarrow \sum_{n\in A} q_n = \sum_{n\in B} q_n$.

3) Любой элемент канторовского множества $K \subset I$ представляется в виде $\sum_{n\in A} q_n$ для некоторого $A \subseteq \mathbb{N}$.

Основное свойство - второе. Любая мера, обладающая этим свойством даст вложение. Док-во: пусть суммы равны, а множества различны. Без потери общности: $A \bigcap B = \emptyset$ (иначе можно выкинуть совпадающие слагаемые из сумм в левой и правой частях). Возьмем наименьший элемент k в $A \bigcup B \neq \emptyset$. Можем считать, что он лежит в A. Тогда: $\sum_{n\in B} q_n \leqslant \sum_{n>k} q_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} < \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k = q_k \leqslant \sum_{n\in A} q_n$.

Докажем, что ev_{μ_0} вложение. Рассмотрим $p_1, p_2 \in X^Y$ т.ч. $\int\limits_Y f(p_1(y))d\mu_0 = \int\limits_Y f(p_2(y))d\mu_0$ для всех $f \in C(X)$. Пусть $x \in X$. Рассмотрим множество $\mathcal{U} = \{U\}$ всех окрестностей x и функции $f_U \in C(X)$ со свойством $f_U(x) = 1$, $f_U(\overline{U}) = 0$, $0 \leqslant f_U(x) \leqslant 1$. Такие функции существуют по лемме Урысона. Возьмем $\inf_{U\in\mathcal{U}} \int\limits_Y f_U(p_1(y))d\mu_0 = \inf_{U\in\mathcal{U}} \int\limits_Y f_U(p_2(y))d\mu_0$. Покажем, что $\inf_{U\in\mathcal{U}} \int\limits_Y f_U(p_1(y))d\mu_0 = \mu_0(p_1^{-1}(x))$.

Действительно, $\int\limits_Y f_U(p_1(y))d\mu_0 \leqslant \mu_0(p_1^{-1}(x)) + \mu_0(p_1^{-1}(U \backslash x)$. Но $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} p_1^{-1}(U \backslash x) = \emptyset$, следовательно, в силу непрерывности меры $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists U \in \mathcal{U} : \mu_0(p_1^{-1}\,(U \setminus x) < \varepsilon$.

Применяя аналогичное рассуждение к p_2, получим следующее тождество:

$$\mu_0(p_1^{-1}(x)) = \mu_0(p_2^{-1}(x))$$

Но по определению меры μ_0:

$\mu_0(p_1^{-1}(x)) = \sum_{i\in A_1} q_i$, где $A_1 = \{i \in \mathbb{N} : y_i \in p_1^{-1}(x)\}$

$\mu_0(p_2^{-1}(x)) = \sum_{i\in A_2} q_i$, где $A_2 = \{i \in \mathbb{N} : y_i \in p_2^{-1}(x)\}$

Значит, согласно доказанному выше: $A_1 = A_2$, т.е. p_1 и p_2 принимают одинаковые значения на Y_0. Т.к. Y_0 всюду плотно, а p_1 и p_2 — непрерывны, то $p_1 = p_2$. ◀

Утверждение 4. *Если в X и в Y вкладывается отрезок, то $ev_\mu : X^Y \to C(X)^*$ не является гомеоморфизмом на образ.*

▶ Пусть $p \in X^Y$, $F_p = ev_\mu(p) \in C(X)^*$. Тогда достаточно найти последовательность $F_{p_i} \to F_p$ такую, что $p_i \nrightarrow p$.

Определим $\phi_i : I \to I$, $\phi_i(t) = t, t \in I\backslash[\frac{1}{2}-\frac{1}{i}, \frac{1}{2}+\frac{1}{i}]$, $\phi_i(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $\phi_i(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}) = 1$, $\phi_i(\frac{1}{2}+\frac{1}{2i}) = 0$, в остальных точках доопределим по линейности.

Возьмем $I \subseteq Y$ и вещественную функцию h, разделяющую концы I: $h(Y) \subseteq I$, $h(r_0) = 0, h(r_1) = 1$. Обозначим $U_i = \phi^{-1}\left((\frac{1}{2}-\frac{1}{i}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{i})\right)$, $Z_i = Y\backslash U_i$. Имеем $U_{i+1} \subset U_i$, $\bigcap U_i = \emptyset$.

Пусть $i : I \to X$ —вложение отрезка, существующее по условию. Определим $p_i = i \circ \phi_i \circ h$, $p = i \circ h$ $(p_i, p \in X^Y)$.

1)Докажем, что $F_{p_i} \to F_p$.

Зададимся произвольной $f \in C(X)$. $M = \|f\|$. Тогда:

$$\left|\int\limits_Y f(p_i(y))d\mu - \int\limits_Y f(p(y))d\mu\right| = \left|\int\limits_{Z_i} (f(p_i(y)) - f(p(y))d\mu + \int\limits_{U_i} (f(p_i(y)) - f(p(y)))d\mu\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{U_i} (f(p_i(y)) - f(p(y)))d\mu\right| \leqslant \int\limits_{U_i} |f(p_i(y)) - f(p(y))|d|\mu| \leqslant M \cdot |\mu|(U_i)$$

В силу непрерывности меры $|\mu|(U_i) \to 0$. Значит: $F_{p_i} \to F_p$, что и требовалось.

2)Докажем, что $p_i \nrightarrow p$

Найдем окрестность p в X^Y, в которую не попадут p_i, начиная с некоторого номера. Положим $V \subset X$ — открытое множество, отделяющее $i(\frac{1}{2})$ от $i(1) \cup i(0)$. Тогда $i^{-1}(V)$ — окрестность $\frac{1}{2}$ — содержит замкнутый отрезок $I_\delta = [\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}+\delta]$. Обозначим $K = h^{-1}(I_\delta)$ — компакт в Y. Искомая окрестность: $U = \{q \in X^Y : q(K) \subseteq V\}$.

Действительно, $\forall i > \frac{1}{\delta} : p_i(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}) = i(1)$ не лежит в V. ◀

4 Замкнутость образа

Для каких-то мер на Y образ ev_μ замкнут, для каких-то нет.

Пример 1: Если мера сосредоточена в конечном множестве точек, то образ замкнут. Действительно, отображение $ev_\mu : X^Y \to C(X)^*$ пропускается через X^n. Это пространство — компакт, так что его образ тоже компактен. Замкнутость образа следует из хаусдорфовости $C(X)^*$.

Пример 2: Пусть $Y = X = I$, а мера на Y имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения. Тогда образ ev_μ не замкнут.

► Ищем последовательность $F_{p_i} = ev_\mu(p_i)$, сходящуюся к функционалу не из образа. Рассмотрим последовательность отображений: $\phi_n : I \to I$, $\phi_n(y) = \frac{y}{2}$ при$y \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$; $\phi_n(y) = \frac{y+1}{2}$ при $y \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$, в остальных точках по линейности. Тогда, аналогично утверждению 4: $F_{\phi_i} \to F_\phi$, где $F_\phi(f) = \int\limits_Y (f(\phi(y))d\mu$, $\phi(y) = \frac{y}{2}, y \in [0, \frac{1}{2})$; $\phi(y) = \frac{y+1}{2}, y \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Если бы этот функционал задавался непрерывной функцией $\psi \in I^I$, $F_\psi = F_\phi$, то $\mu(\phi^{-1}(A) = \mu(\psi^{-1}(A)$, для любого борелевского A. В частности

$\mu(\psi^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \mu(\phi^{-1}([0, \frac{1}{4})) \neq 0$

$\mu(\psi^{-1}([0, \frac{1}{2})) = \mu(\phi^{-1}((\frac{3}{4}, 0]) \neq 0$

Значит, ψ принимает значения из $[0, \frac{1}{4})$ и $(\frac{3}{4}, 0]$, следовательно она принимает значения и из $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Но тогда

$0 \neq \mu(\psi^{-1}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = \mu(\phi^{-1}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})) = 0$. Противоречие. ◄

Этот пример можно обобщить. Пусть есть последовательность τ_n элементов X^Y, стремящаяся "по мере"к разрывному отображению $\tau : Y \to X$, значения которого лежат в двух непересекающихся замкнутых множествах A_0, A_1. Под сходимостью "по мере"подразумевается следующее: $|\mu|(B_n) \to 0$, где $B_n = \{y \in Y : \tau_n(y) \neq \tau(y)\}$. Ясно, что такая сходимость влечет сходимость соответствующих функционалов. Пусть, кроме того мера μ обладает свойством: $|\mu(U)| > 0$, для всех открытых $U \neq \emptyset$. Тогда те же рассуждения, что и в предыдущем примере доказывают незамкнутость образа.

Утверждение 5. *Для всех X и Y, в которые вкладывается отрезок, такую последовательность ϕ_n можно найти.*

► Возьмем $h : Y \to I$ и $i : I \to X$ как в утверждении 4, а $\phi, \phi_n : I \to I$, как в примере 2. Положим $\tau_n = i \circ \phi_n \circ h$, $\tau = i \circ \phi \circ h$. Тогда, легко видеть, что τ_n и τ — искомые. ◄

Пусть теперь мера $|\mu|(U) = 0$ для некоторого открытого непустого U. Тогда существует максимальное открытое множество U_m, такое что: $|\mu|(W) = 0 \Leftrightarrow W \subseteq U_m$. Введем новое пространство $Y' = Y \backslash U_m$. На Y' естественным образом индуцируется мера: $\mu'(A) = \mu(A)$, причем μ'-мера любого открытого непустого множества уже не 0.

Существует также естественное отображение ограничения $r : X^Y \to X^{Y'}$, индуцированное вложением $Y' \hookrightarrow Y$. Имеем равенство: $ev_{\mu'} \circ r = ev_\mu$. Следовательно, L — образ μ лежит в L' — образе μ'.

Пусть Y' содержит отрезок, тогда утверждение 5 можно применить к пространству Y'. Отображение $\tau'_n : Y' \to X$, можно продолжить до отображения $\tau_n : Y \to X$. Такое продолжение существует, т.к. τ_n пропускается через отрезок. Эти отображения по-прежнему стремятся "по мере"к τ. Последовательность соответствующих функционалов будет стремится к функционалу, не лежащему в образе. Получено

Утверждение 6. *Если мера μ сосредоточена на множестве, содержащем отрезок, то образ ev_μ не замкнут.*

5 Стягиваемость по образу

Пусть задано отображение $\alpha : Y \times A \to Y$. Введем отображение $\alpha' : X^Y \times A \to X^Y$, по правилу $\alpha'(p,a)(y) = p(\alpha(a,y))$, где $p \in X^Y$, $a \in A$, $y \in Y$.

Утверждение 7. *Это отображение непрерывно.*

► По отображению $\alpha : Y \times A \to Y$ канонически строится непрерывное отображение $\alpha^* : X^Y \to X^{Y\times A}$. Также есть непрерывное отображение $\theta : X^{Y\times A} \to (X^Y)^A$. Построим по ним новое отображение $\eta = (\theta \circ \alpha^*) \times id_A : X^Y \times A \to (X^Y)^A \times A$. Кроме того, существует естественное непрерывное отображение вычисления $\zeta : (X^Y)^A \times A \to X^Y$. Нетрудно убедиться, что $\zeta \circ \eta = \alpha'$. Значит, α' непрерывно. ◄

Утверждение 8. *Пусть $Y = S^1 \subset \mathbb{C}$, и $\mu(1) = 0$. Тогда отображение $ev_\mu : X^Y_* = \Omega X \to C(X)^*$ стягивается по образу в точку.*

► Зададим семейство отображений $l : S^1 \times [0,1) \to S^1$ следующим образом.

$l_t(e^{2\pi is}) = l(e^{2\pi is}, t) = e^{2\pi is}$ при $s < t$;

$l_t(e^{2\pi is}) = l(e^{2\pi is}, t) = e^{\frac{1-s}{1-t}\cdot t}$ иначе.

Эти формулы задают непрерывное отображение полуоткрытого интервала $[0,1)$ в ΩS^1.

Пусть теперь $p \in \Omega X$ — произвольная петля, $F_p = ev_\mu(p)$ — соответствующий функционал. Обозначим $H = ev_\mu(\Omega X) \subset C(X)^*$ — образ вычисляющего отображения. Задача состоит в том, чтобы построить отображение $\chi : \Omega X \times I \to H$, такое что $\chi\big|_{\Omega X \times \{1\}} = ev_\mu$; $\chi\big|_{\Omega X \times \{0\}} = const$.

Определим $\chi(p,t) = ev_\mu(p \circ l_t)$ при $t \in [0,1)$. При $t = 1$ отображение совпадает с ev_μ. Такое отображение будет непрерывным во всех точках (p,t) где $t \in [0,1)$ по лемме.

Осталось показать непрерывность при $t = 1$. Возьмем открытую окрестность точки F_p в $C(X)^*$. Как обычно, ограничимся рассмотрением окрестностей из предбазы топологии: $U_f = \{F \in C(X)^* : |F(f) - F_p(f)| < \varepsilon\}$. Требуется найти окрестность V точки $(p,1) \in \Omega X \times I$, которая попадает в U_f. Вследствие непрерывности ev_μ существует окрестность $U \subset \Omega X$, такая что для всех $p_1 \in U$ выполнено: $|F_{p_1}(f) - F_p(f)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Обозначим $M = \max|f|$ и положим $\delta' = \frac{\varepsilon}{4M}$. Теперь найдем такое δ, что $|\mu|(e^{2\pi i(1-\delta,1]}) < \delta'$. Очевидно, что такое δ существует, т.к. $|\mu|(1) = 0$, а $|\mu|(e^{2\pi i(1-\delta,1)}) \to 0$ при $\delta \to 0$ в силу непрерывности меры. Возьмем $V = U \times (1-\delta, 1]$. Докажем, что $\chi(V) \subset U_f$.

Пусть $(p_1, t) \in V$. Тогда:

$$|\chi(p_1,t)(f) - F_p(f)| \leqslant |\chi(p_1,t)(f) - F_{p_1}(f)| + |F_{p_1}(f) - F_p(f)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_{S^1} f(p_1(l_t(y)))d\mu - \int\limits_{S^1} f(p_1(y))d\mu \right| + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S^1} |f(p_1(l_t(y))) - f(p_1(y))|d|\mu| + \frac{\varepsilon}{4} = \int\limits_{e^{2\pi i(t,1]}} |f(p_1(l_t(y))) - f(p_1(y))|d|\mu| + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant$$

$$\leqslant |\mu|(e^{2\pi i(t,1]}) \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Что доказывает непрерывность. ◀

Чтобы обобщить этот факт потребуется

Утверждение 9. *Для любого симплициального комплекса (Y, y_0) с отмеченной вершиной и любой меры на нем, существует замкнутое подмножество $Z \subset Y$ такое, что:*

1) y_0 не лежит в Z

2) $|\mu|(Z) = 0$

3) Дополнение к Z стягиваемо по себе.

▶ Без потери общности считаем, что μ - вещественная неотрицательная мера, $|\mu| = \mu$.

Считаем, что комплекс Y вложен в $\mathbb{R}^N$, поэтому имеет смысл выражение "линейно-вложенный симплекс".

Используем факт: Для любого континуального семейства борелевских непересекающихся подмножеств Y, лишь счетное число имеет ненулевую меру.

Множество Z будем строить по индукции.

База индукции: Пусть Y^1 — 1-мерный остов Y, т.е. некоторый граф. Выберем в нем максимальное дерево D. Внутри каждого ребра Y^1, не попавшего в D, выберем точку меры 0 (она существует в силу замечания). Объединение этих точек обозначим Z_1. Тогда $Y^1 \backslash Z_1$ — стягиваемо. Действительно, каждое ребро, из которого выкинули точку, ретрагируется на свои вершины. Оставшееся множество — дерево, значит стягиваемо.

Шаг индукции: Построено Z_k: $\mu(Z_k) = 0$, $Y^k \backslash Z_k$ — стягиваемо. Кроме того считаем, что пересечение Z_k с каждым симплексом Y_k — симплициальный комплекс коразмерности 1, линейно вложенный в этот симплекс. Строим Z_{k+1} — такое замкнутое множество, что $\mu(Z_{k+1}) = 0$, а $Y^{k+1} \backslash Z_{k+1}$ ретрагируется на $Y^k \backslash Z_k$, пересечение Z_{k+1} с каждым симплексом Y_{k+1} — снова симплициальный комплекс коразмерности 1, линейно вложенный в этот симплекс.

Возьмем произвольный симплекс Δ размерности $k+1$. Обозначим его барицентр — F. Пусть $M_k = \partial\Delta \cap Z_k$ — вложенный комплекс размерности $k-1$, существующий по предположению индукции. Введем обозначение: σ_i — симплексы этого комплекса, $\sigma_i' = \sigma_i * F$. Зададимся вектором $\overline{\nu}$, не лежащем в плоскостях σ_i', но лежащем в Δ. Рассмотрим континуальное множество точек $F_t = F + t\overline{\nu}$, $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Для каждой точки F_t построим $M_k * F_t$ — джойн двух комплексов. Симплексы этого комплекса, содержащие σ_i и F_t, обозначим σ_i^t. Тогда для любого фиксированного i: $\sigma_i^t \backslash \sigma_i$ не пересекаются для разных значений $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Значит для любого i существует не более чем счетное множество точек t, для которых $\mu(\sigma_i^t \backslash \sigma_i) > 0$. Следовательно, существует хотя бы одна точка $t_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, для которой $M_{k+1} = M_k * F_{t_0}$ — вложенный комплекс меры 0, коразмерности 1.

Осталось доказать, что $Y^{k+1} \backslash Z_{k+1}$ ретрагируется на $Y^k \backslash Z_k$. Для этого достаточно показать, что $\Delta \backslash M_{k+1}$ ретрагируется на $\partial\Delta \backslash M_k$ для всех симплексов Δ размерности $k+1$.

Ретракция строится просто. Пусть $A \in \partial\Delta \backslash M_k$. Тогда $r([A, F_{t_0}))$ отображается в A. Нетрудно проверить, что $i \circ r$ и $id : \Delta \backslash M_{k+1} \to \Delta \backslash M_{k+1}$ гомотопны. ◄

Утверждение 10. *Если Y симплициальный комплекс с отмеченной вершиной, то $ev_\mu : X_*^Y \to C(X)^*$ стягиваемо по образу для любой меры на Y.*

► Идея доказательства та же, что и в случае $Y = S^1$. Строится семейство отображений $l : Y \times [0,1) \to Y$ со свойством: $l_0 = const$, $\forall\varepsilon$ $\exists\delta : \forall t \in (1-\delta, 1)$: $|\mu|(x : l_t(x) \neq x) < \varepsilon$. Когда такое отображение будет построено, доказательство дословно повторит доказательство утв.8.

Доказательство разобьем на два шага:

1)Построим отображения $l_n : Y \to Y$, сохраняющие точки из $U_{\frac{\varrho}{n}}$ и гомотопные постоянному отображению в отмеченную точку.

Обозначим $K_d = Y \backslash U_d$. Тогда, по условию l_n задано на $\overline{U}_{\frac{\varrho}{n}}$. На $K_{\frac{\varrho}{n}}$ можно выбрать клеточную структуру, в которой $\partial K_{\frac{\varrho}{n}}$ — подкомплекс. Кроме того, $Y \backslash Z$ стягиваемо. Значит можно непрерывно продолжить l_n на $K_{\frac{\varrho}{n}}$. Образ полученного отображения лежит в стягиваемом пространстве, значит само отображение стягиваемо.

2)Построим гомотопии l_n и l_{n+1} в классе отображений, сохраняющих точки из $K_{\frac{\varrho}{n}}$.

Требуется указать гомотопии l_{n+t}, такие что $l_{n+0} = l_n$, $l_{n+1} = l_{n+1}$, $l_{n+t}(y) = y$, для всех $y \in K_{\frac{\varrho}{n}}$. Иными словами надо продолжить некоторое отображение замкнутого подмножества $Y \times \{0\} \cup K_{\frac{\varrho}{n}} \times I \cup Y \times \{1\} \subset Y \times I$ в стягиваемое пространство до отображения всего пространства $Y \times I$. Такое продолжение всегда можно построить, выбрав подходящую клеточную структуру в $Y \times I$.

„Склеив“ все эти гомотопии, получим отображение $l : Y \times \mathbb{R}_+ \to Y$, со свойством $l_0 = const$ и для любого ε существует число N, такое что $\forall t > N$: $|\mu|(y : l_t(y) \neq y) \leqslant |\mu|(K_{\frac{\varrho}{N}}) < \varepsilon$. Его и требовалось найти. ◄

6 Случай $Y = \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай некомпактного $Y = \mathbb{N}$ с конечной мерой $\mu(\{i\}) = \mu_i$, $\sum |\mu_i| < \infty$. Тогда отображение ev_μ будет по-прежнему непрерывным.

► Точки $X^{\mathbb{N}}$ — это последовательности элементов X: $p = \{x_i\} = (x_1, x_2, \dots)$. Нетрудно убедиться, что $ev_\mu(p) = \sum \mu_i \cdot ev_{x_i}$.

Как и раньше зададимся окрестностью $U_f = \{F \in C(X)^* : |F(f) - F_p(f)| < \varepsilon\}$ точки F_p из предбазы. Пусть $M = \max f$, а число N таково, что $\sum_{i>N} |\mu_i| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Положим $W_i = f^{-1}((f(x_i) - \varepsilon/4N\|\mu\|, f(x_i) + \varepsilon/4N\|\mu\|))$. Тогда множество $U = \{p \in X^{\mathbb{N}} : p(i) \in W_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$, попадает в U_f. Действительно, если $p' \in U$, то:

$$\left|\sum \mu_i \cdot f(x_i) - \sum \mu_i \cdot f(x_i')\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{i>N} \mu_i \cdot f(x_i) - \sum_{i>N} \mu_i \cdot f(x_i')\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} \mu_i \cdot f(x_i) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \cdot f(x_i')\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2N \cdot \frac{\varepsilon}{4N} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon$$

Что доказывает непрерывность отображения. ◀

Утверждение 11. *Если отображение $ev_\mu : X^{\mathbb{N}} \to C(X)^*$ является вложением, то оно — гомеоморфизм на образ.*

▶ Т.к. X компакт, то $X^{\mathbb{N}}$ — тоже компакт, поскольку компактно-открытая топология на нем совпадает с топологией тихоновского произведения. Но любая непрерывная биекция компактов является гомеоморфизмом. Значит, образ ev_μ гомеоморфен $X^{\mathbb{N}}$. ◀

Рассмотрим теперь не все элементы $X^{\mathbb{N}}$, а только те отображения $\mathbb{N} \to X$, образ которых — конечное множество. Обозначим подмножество таких отображений $X_f^{\mathbb{N}}$. Пусть ev'_μ — ограничение ev_μ на это подмножество.

Утверждение 12. *Если отображение ev'_μ является вложением, то оно — гомеоморфизм на образ.*

▶ Достаточно доказать, что инъективность ev'_μ влечет инъективность ev_μ. Пусть все различные подсуммы ряда $\sum \mu_i$ различны. Тогда ev_μ — инъективно (доказательство аналогично утв.3). Если же существуют $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \cup B = \emptyset$, такие что $\sum_{i\in A} \mu_i = \sum_{i\in B} \mu_i$. Тогда рассмотрим $p_1, p_2 \in X_f^{\mathbb{N}}$: $p_1(i) = x_1$ если $i \in A$, $p_2(i) = x_1$ если $i \in B$, в остальных случаях p_1 и p_2 равны x_2. Здесь x_1 и x_2 — различные точки X. Тогда соответствующие функционалы равны: $F_{p_1} = \mu(A)ev_{x_1} + (\mu(\mathbb{N}) - \mu(A))ev_{x_2} = F_{p_2}$. Значит верна цепочка утверждений: ev'_μ инъективно $\Rightarrow$ меры различных подмножеств $\mathbb{N}$ различны $\Rightarrow$ ev_μ — инъективно $\Rightarrow$ ev_μ — гомеоморфизм на образ $\Rightarrow$ ev'_μ — гомеоморфизм на образ. ◀

7 Дополнительно.

Пусть (X, x_0) — пунктированное пространство. Тогда имеется последовательность вложений:

$X = Sym^1(X) \to Sym^2(X) \to \dots \to Sym^n(X) \to \dots$

$A_n : Sym^n \to Sym^{n+1}$ действует по правилу $A_n([x_1, \dots, x_n]) = [x_1, \dots, x_n, x_0]$. Объединение всех $Sym^n(X)$, снабженное топологией прямого предела, обозначим $Sym^\infty(X)$. Пусть $i_{n,X}$ — каноническое вложение $Sym^n(X) \hookrightarrow Sym^\infty X$, а $p_{n,X} : X_n \to Sym^n(X)$ — каноническая проекция. Пусть $f : X_1 \to X_2$. Обозначим $Sym^n(f) : Sym^n(X_1) \to Sym^n(X_2)$ и $Sym^\infty(f) : Sym^\infty(X_1) \to Sym^\infty(X_2)$ — индуцированные отображения симметрических пространств.

Рассмотрим функториальные отображения $Sym^\infty(X) \to C(X)^*$.

Утверждение 13. *Не существует функториального вложения* $Sym^\infty(X) \hookrightarrow C(X)^*$.

► Допустим противное. Пусть $\alpha_X : Sym^\infty(X) \hookrightarrow C(X)^*$ — вложение для всех X. Т.к. для любого отображения $f : X_1 \to X_2$ выполнено: $Sym^n(f) \circ p_{n,X_1} = p_{n,X_2} \circ f^n$ и $Sym^\infty(f) \circ i_{n,X_1} = i_{n,X_2} \circ Sym^n(f)$, то $\alpha_X \circ i_{n,X} \circ p_{n,X} = G_X : X^n \to C(X)^*$ — функториальное отображение. Значит можно применить утв.2 при $Y = n$. Тогда $G_X((x_1, \dots, x_n)) = \lambda_1 ev_{x_1} + \dots + \lambda_n ev_{x_n}$. Это отображение пропускается через $Sym^n(X)$, следовательно $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \neq 0$. Таким образом элемент $x = (x_1, \dots, x_n, x_0, x_0, \dots)$ пространства $Sym^\infty(X)$ переходит под действием α_X в функционал $\lambda(ev_{x_1} + \dots + ev_{x_n})$. Но применяя те же рассуждения для $n+1$, получим, что x переходит в $\nu(ev_{x_1} + \dots + ev_{x_n} + ev_{x_0})$. Эти функционалы различны. ◄

Однако $Sym^\infty(X)$ можно линеаризовать по другому. Обозначим $\widetilde{C}(X)$ — пространство непрерывных функций на X равных нулю в точке x_0. Тогда переход к пространству $\widetilde{C}(X)$ — контравариантный функтор на категории пунктированных компактных пространств и пунктированных отображений. Пусть $\widetilde{C}(X)^*$ — пространство непрерывных линейных функционалов на $\widetilde{C}(X)$, снабженное топологией, аналогичной топологии $C(X)^*$. Переход к $\widetilde{C}(X)^*$ — ковариантный функтор.

Утверждение 14. *Пространство* $Sym^\infty(X)$ *функториально вкладывается в* $\widetilde{C}(X)^*$.

► Возьмем отображение $T : Sym^\infty(X) \to \widetilde{C}(X)^*$, $T([x_1, \dots, x_n, \dots]) = \sum_{i=0}^\infty ev_{x_i}$. Это отображение корректно определено, т.к. любая точка $x \in Sym^\infty(X)$ по определению лежит в $Sym^n(X)$ для некоторого n. Значит, лишь конечное число координат x не совпадают с x_0. Тогда для любой функции $f \in \widetilde{C}(X)$: $\left(\sum_{i=0}^\infty ev_{x_i}\right)(f) = \sum_{x_i \neq x_0} f(x_i)$ — определенная конечная сумма. Кроме того $T(Sym^\infty(X))$ инвариантен относительно конечных перестановок x_i.

Докажем инъективность T. Пусть $G(x) = G(y)$. Точки x и y лежат в $Sym^n(X) \subset Sym^\infty(X)$. Но ограничение T на $Sym^n(X)$ инъективно, значит $x = y$.

Осталось доказать непрерывность T. Пусть U — открытое подмножество $\widetilde{C}(X)^*$. Рассмотрим ограничение T_n отображения T на $Sym^n(X) \subset Sym^\infty(X)$. Тогда $T_n^{-1}(U) = T^{-1}(U) \cap Sym^n(X)$. Т.к. T_n — непрерывное, то $T^{-1}(U) \cap Sym^n(X)$ — открытое множество. Значит $T^{-1}(U)$ открыто, по определению топологии в $Sym^\infty(X)$. Т.е. T непрерывно. ◄

Пространства $Sym^\infty(X)$ представляют интерес в связи с теоремой Тома-Дольда.

Теорема 7.1. *Гомологии пространства X и гомотопические группы $Sym^\infty(X)$ связаны соотношением: $H_i(X, \mathbb{Z}) = \pi_i(Sym^\infty(X))$ для всех пунктированных связных CW-комплексов.*

Список литературы

[1] Дж. Келли. Общая топология.

[2] В. И. Богачев. Основы теории меры.