Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова

механико-математический факультет

Курсовая работа

Исследование свойств разветвленных накрытий

А.А.Айзенберг
402 группа

Научный руководитель:
чл.-корр. РАН, профессор В.М.Бухштабер

Москва
2008г

1 Основное определение

Будем рассматривать разветвленные накрытия в смысле следующего определения.

Определение 1. *Пусть X и Y хаусдорфовы топологические пространства. Тогда n-листное разветвленное накрытие - это пара непрерывных отображений $p: X \to Y$ и $h: Y \to Sym^n X$ таких, что*
1) $x \in hp(x)$ для любого $x \in X$
2) $Sym^n(p)(h(y)) = ny$ для любого $y \in Y$

Определение 2. *Накрытие $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n X$ назовем тривиальным, если и только если $\#p^{-1}(y) = 1$ для любой точки $y \in Y$.*

Лемма 1. *Если накрытие $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n X$ тривиально, то p - гомеоморфизм.*

Доказательство. Определим замкнутое множество $S = [x, \ldots, x], x \in X$ пространства $Sym^n X$. Из определения тривиального накрытия следует, что $h(y) = [x, \ldots, x] \in S$ для любой $y \in Y$, причем $x = p^{-1}(y)$. Пусть $l : S \to X$ определено по формуле $l([x, \ldots, x]) = x$. Отображение l непрерывно в топологии S, индуцированной с $Sym^n X$. Значит отображение $l \circ h : Y \to X$ непрерывно и $l \circ h \circ p = id_X$, $p \circ l \circ h = id_Y$. Значит, p гомеоморфизм. ■

Работа состоит из двух частей. В первой исследуются накрытия, в которых пространства базы и накрытия гомеоморфны и являются графами, либо двумерными многообразиями. Во второй части доказывается теорема об эквивалентном определении разветвленного накрытия для многообразий произвольной размерности.

2 Базовые утверждения

Утверждение 1. *Пусть $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n X$ - n-листное разветвленное накрытие. Тогда отображение p открыто.*

Доказательство. Пусть $U \subset X$ открытое подмножество. Тогда $U \times X^{n-1} \subset X^n$ - также открытое подмножество. Его образ при факторизации X^n действием S_n - это открытое подмножество $W \subset Sym^n X$. Т.к. отображение h непрерывно, то $V = h^{-1}(W) \subset Y$ также открыто.

Теперь убедимся, что $V = p(U)$. Пусть $V' = p(U)$ и $v = p(x) \in V'$. Тогда $hp(x)$ содержит x, т.е $hp(x) \in U \times X^{n-1}$. Значит, $v \in V$. Доказали, что $V' \subseteq V$.

В обратную сторону. Пусть $y \in V$. Тогда $h(y)$ содержит $x \in U$ по построению. Тогда $Sym^n p(h(y)) = ny$ содержит $p(x)$. Но это как раз и означает, что $y = p(x)$ для некоторой $x \in U$. Т.е. $V \subseteq V'$

Тем самым $V = V'$ открыто. ■

Утверждение 2. *Пусть $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n X$ - n-листное разветвленное накрытие. Тогда отображение p замкнуто.*

Доказательство. Дословно повторяет доказательство предыдущего утверждения с заменой во всех рассуждениях свойства открытости U на замкнутость. ■

Для произвольного разветвленного накрытия $p : X \to Y$ введем понятие особой точки.

Определение 3. *Точка $y \in Y$ называется особой или точкой ветвления, если в любой ее окрестности U найдется точка y', имеющая больше прообразов чем y, т.е. $\#p^{-1}(y') > \#p^{-1}(y)$.*

Множество особых точек накрытия обозначим Z.

Утверждение 3. *Множество Z обладает следующими свойствами:*

1)Z замкнуто;

2)Z нигде не плотно;

3)У любой точки $y \in Y \setminus Z$ существует окрестность U такая, что ограничение p на U есть регулярное конечнолистное накрытие.

Доказательство. 1)Докажем, что $Y \backslash Z$ открыто. Действительно, пусть $y \in Y$. Далее, обозначим $x_i, i = 1, \ldots, m$ прообразы y. Пусть W_i - непересекающиеся окрестности x_i в X. Согласно предыдущему утверждению, $p(W_i)$ - открыты. Рассмотрим $U_1 = \bigcap p(W_i) \subset Y$. Любая точка из U_1 имеет хотя бы m прообразов. С другой стороны точка y неособая. Значит у нее есть окрестность U_2, в которой каждая точка имеет прообразов не больше n. Значит, в окрестности $U = U_1 \cap U_2$ у каждой точки ровно m прообразов. Отсюда сразу же следует, что в U нет особых точек, т.е. любая точка y лежит в $Y \backslash Z$ вместе со своей окрестностью. Первое утверждение доказано.

2)Допустим противное. Пусть Z содержит множество B, открытое в топологии Y. Тогда для точки $y_1 \in B$ существует точка $y_2 \in B$, имеющая больше прообразов чем y_1. Точка y_2 также особая, поэтому для нее в B тоже тоже найдется точка, с большим числом прообразов. Продолжая подобные рассуждения, получим, что у точек в B может быть сколь угодно много прообразов. Что, очевидно, противоречит определению разветвленного накрытия.

3)Обозначим y произвольную неособую точку. Далее, $x_1, \ldots, x_m$ - ее прообразы при отображении p, а $U_1, \ldots, U_m$ - непересекающиеся окрестности этих точек. Множества $p(U_i)$ - открыты, введем новые множества $V = \bigcap p(U_i) \subset X$ и $W_i = p^{-1}(V) \cap U_i$. Это новые окрестности y и x_i соответственно. Без ограничения общности, можно считать, что $V \subset Y \backslash Z$ Докажем, что $p : U_i \to V$ гомеоморфизмы.

Во-первых, p непрерывно.

Во-вторых, p сюръективно согласно конструкции V и W_i.

В-третьих, p инъективно. Действительно, если бы p имел хотя бы два прообраза в каком-то из W_i, то всего у p было бы более чем m прообразов. Но это противоречит пункту 1, где было доказано, что у точек из $Y \backslash Z$ ровно m прообразов.

И наконец, p открыто.

Отсюда, очевидно, следует, что ограничение p на W_i это гомеоморфизм. Значит, над $Y \backslash Z$ накрытие p является регулярным с числом листов, не превосходящим n ■

Определение 4. *Назовем точку $x \in X$ особой, если не существует окрестности $U \ni x$, такой что $p : U \to p(U)$ является гомеоморфизмом. Множество особых точек X обозначим Σ.*

Если точка $x \in X$ особая, то в любой достаточно малой окрестности $W \ni x$ существуют точки x_1 и x_2, такие что $p(x_1) = p(x_2)$. Если бы это было не так, то отображение $p : U \to p(U)$ было бы непрерывным, сюръективным, инъективным и открытым для некоторой окрестности $U \ni x$, следовательно, было бы гомеоморфизмом.

Утверждение 4. $p(\Sigma) = Z$

Доказательство. 1)Пусть $x \in \Sigma$. Рассмотрим $y = p(x)$ и $\{x = x_1, x_2, \ldots, x_m\} = p^{-1}(y)$. Возьмем U_i - непересекающиеся сколь угодно малые окрестности x_i, такие что $p(U_i) = V \subset Y$. Согласно сказанному выше существуют точки x_1' и x_1'', такие что $p(x_1') = p(x_1'') = y' \in V$. Значит, $p^{-1}(y')$ состоит из более чем k точек. Следовательно, y особая точка базы.

2)Пусть $y \in Y$ особая точка базы. Допустим, у нее m прообразов. От противного: предположим, что существуют окрестности $U_i \ni x_i, i = 1, \ldots, m$, в каждой из которых p является гомеоморфизмом на образ. Тогда у точки y есть открытая окрестность $\bigcap p(U_i)$, прообраз каждой точки которой состоит также из m точек, а это противоречит тому, что y - особая точка базы. ■

3 Одномерный случай

Пусть X - конечный связный одномерный CW-комплекс, т.е. связный граф.

Утверждение 5. *Нетривиальное разветвленное накрытие $X \to X$ существует, тогда и только тогда, когда X - это окружность или отрезок. Все накрытия окружности над окружностью являются регулярными.*

Определение 5. *Пусть x - произвольная точка графа. Рассмотрим некоторую ее достаточно малую связную окрестность и посчитаем число точек границы этой окрестности. Эту величину назовем типом точки x.*

Заметим, что если x лежит внутри ребра графа, то ее тип равен 2. Если точка x - вершина, то ее тип равен степени вершины.

Определение 6. *Назовем звездой St топологическое пространство гомеоморфное букету полузамкнутых интервалов с отмеченными концами. Отмеченную точку букета a назовем центром звезды. Исходные интервалы назовем лучами звезды.*

Связная окрестность точки графа гомеоморфна звезде. Тип точки равен числу лучей звезды.

Лемма 2. *Пусть отображение $p : [0, 1) \to St$ из полузамкнутого интервала в звезду открыто на $(0, 1)$ и $p(0) = a$. Тогда p отображает интервал гомеоморфно на один из лучей звезды.*

Доказательство. Допустим, что путь p проходит по нескольким лучам звезды. Тогда существуют $\alpha, \beta \in [0, 1)$, такие что $[\alpha, \beta]$ отображается на один из лучей и $p(\alpha) = p(\beta) = a$. Тогда на отрезке $[\alpha, \beta]$ отображение p является функцией их отрезка в отрезок, принимающая на концах равные значения. Значит она имеет точку максимума внутри $[\alpha, \beta]$. Т.е. открытое множество (α, β) не переходит в открытое.

Тем самым доказано, что образ полузамкнутого интервала лежит в одном луче звезды. Значит отображение p есть открытое отображение интервала в интервал, следовательно оно монотонно, а значит является гомеоморфизмом на образ. ■

Лемма 3. *Пусть $p : X \to Y$ открытое отображение графов. Тогда для любой точки $y \in Y$ типа n любой ее прообраз имеет тип не меньше n.*

Доказательство. Рассмотрим связную окрестность U точки $x \in X$. Без ограничения общности, считаем, что $y = p(x)$ - вершина графа Y Также можно считать, что U не содержит других точек графа X, а $p(U)$ не содержит вершин графа Y, кроме y. Если U имеет k лучей, то каждый из них отображается открыто на один из лучей $p(U)$. Значит, по лемме 2, лучи звезды $p(U)$ состоят из образов лучей U. Значит, лучей $p(U)$ меньше, чем лучей U. Что и требовалось доказать. ■

Доказательство. (утверждения 5) Заметим, что в любом связном графе точек типа 0 нет вообще, а точек всех типов, кроме типа 2, конечное число. Выпишем все типы точек, которые есть в $Y \cong X$. Выписанное множество, очевидно, конечно, т.к. множество вершин графа конечно. Рассмотрим n_0, наибольший тип, который встречается в графе. M_0 множество точек типа n_0. Пусть $n_0 > 2$. Тогда M_0 - конечно. По лемме, прообраз любой точки из M_0 есть какое-то количество точек из X, каждая из которых имеет тип не меньше n_0. Но точек типа большего n_0 в графе нет (из условия выбора n_0). Значит, по принципу Дирихле, над каждой точкой индекса n_0 висит только одна точка индекса n_0, иначе у какой-то точки будет пустой прообраз.

Прообраз любой точки наибольшего типа, при условии, что он больше 2, есть ровно одна точка того же типа. Тем самым, все точки наибольшего типа мы "использовали". Аналогичными рассуждениями можно разобраться с точками наибольшего из оставшихся типов (когда тип n_0 исключен).

Итог: над каждой точкой типа, большего 2, висит только одна точка того же типа. Следовательно, все точки типа >2 использованы в накрытии вершин. Значит, точки второго типа также накрываются только точками второго типа.

Уже сейчас видно, что если X не содержит висячих вершин, то накрытие является регулярным, т.к. прообраз окрестности любой точки - это k копий этой окрестности. Если же X при этом содержит точки типа 3 или больше, то это накрытие будет однолистным, т.к. у такой точки только один прообраз. Значит, если висячая вершина отсутствует, то единственным графом, допускающим нетривиальное накрытие над собой, будет окружность.

Пусть теперь найдется точка a с хотя бы двумя прообразами α_1 и α_2 (если накрытие нетривиальное, то такая точка существует). И пусть в графе есть точка b типа, большего 2. Рассмотрим путь p в базе, соединяющий a и b и не проходящий через висячие вершины, если они есть. Построим два его поднятия: q_1 и q_2, такие что $q_1(0) = \alpha_1$, $q_2(0) = \alpha_2$. Тогда $q_1(1) = q_2(1)$, т.к. оба конца совпадают с прообразом $p^{-1}(b)$, который, как было доказано, единственный.

Теперь можно найти наименьшее такое $t \in I$, что $q_1(t) = q_2(t)$. Обозначим число с таким свойством t_0. Наконец, рассмотрим точку $x_0 = p(t_0) \in X$.

Запишем ее свойства. Во-первых, эта вершина не висячая, потому что путь p не проходил через висячие вершины. Во-вторых, ее прообраз, точка $y_0 = q_1(t_0) = q_2(t_0)$ имеет тип, больший, чем тип x_0. Докажем этот факт.

Пусть граница окрестности x_0 состоит из k точек. Над каждой висит хотя бы одна точка накрытия, как и ранее. А через одну из точек, скажем c, проходит путь $p([0, t_0])$. Значит над c висят две точки накрытия, что следует из минимальности выбора t_0. Значит тип y_0 строго больше типа x_0.

Из указанных двух фактов получаем противоречие.

Доказано: если граф нетривиально накрывает себя, то он не имеет точек третьего и более типов. А отсюда следует, что граф - либо окружность, либо отрезок.

Про регулярность накрытия окружности над окружностью упоминалось выше. ■

Замечание. Простейший пример нетривиального накрытия отрезка над отрезком - складывание пополам. Задается уравнением:

$$p(t) = \begin{cases} 2t, & \text{если } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2t, & \text{если } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Складывать, конечно, можно и на большее количество частей. По сути, подобными складываниями исчерпываются все примеры накрытий отрезка над отрезком.

4 Общий случай

Здесь мы рассматриваем разветвленные накрытия между топологическими многообразиями без края одинаковой размерности.

Уже было показано, что разветвленное накрытие является открытым и одновременно замкнутым отображением топологических пространств. Оказывается, и, наоборот, открыто-замкнутое конечнократное отображение многообразий без края одинаковой размерности является разветвленным накрытием.

Вначале приведем пример, показывающий, что для топологических пространств, не являющихся многообразиями, утверждение не верно.

Базой отображения будет окружность $Y = \{e^{2\pi it} \in \mathbb{C}\}$. Пространством отображения - две окружности, соединенные отрезком $X = \{e^{2\pi it}\} \cup \{e^{2\pi it}(t+1)\} \cup \{2e^{2\pi it}\}$, $t \in [0;1]$. Отображение $p : X \to Y$ взятие аргумента, $p = arg$. Нетрудно убедиться, что оно не будет разветвленным накрытием, хоть и открыто-замкнуто.

Видно, что препятствием к построению отображения $h : Y \to Sym^n(X)$ является невозможность корректно определить кратности прообразов особых точек.

Далее $p : X \to Y$ - открытое конечнократное отображение многообразий без края. Назовем точку $x \in X$ особой, если она не является точкой локального гомеоморфизма. Образы особых точек назовем особыми значениями.

Теорема 1 ([3]). *Конечнократное открыто-замкнутое отображение связного многообразия имеет ограниченную кратность. Множество точек максимальной кратности открыто и всюду плотно.*

Теорема 2 ([3]). *Пусть $p : X \to Y$ открыто-замкнутое конечнократное отображение многообразий без края размерности n. Тогда множество точек $\Sigma \subset X$, не являющихся точками локального гомеоморфизма имеет размерность не более $n-2$.*

Лемма 4 ([4], lm. 2.1). *Пусть p - открытое отображение локально-компактного пространства X на локально-компактное Y, такое что прообраз любой точки Y дискретен. Тогда для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ выполнено равенство $dim(A) = dim(p(A))$.*

Таким образом, множество особых значений отображения имеет коразмерность не меньше 2. Приведем также одну известную лемму.

Лемма 5 ([2], стр.74, теор.4). *Пусть U - шар размерности k, $Z \subset U$ замкнутое подмножество размерности не больше $k-2$. Тогда $U \setminus Z$ линейно связно.*

Лемма 6. *Пусть $p : A \to B$ открыто-замкнутое отображение хаусдорфовых топологических пространств, такое что все точки A являются точками локального гомеоморфизма p, и $\#p^{-1}(b) = n$ для любого $b \in B$. Тогда отображение p является n-листным регулярным накрытием.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $b \in B$, $\{a_1, \dots, a_n\} = p^{-1}(b)$. Выберем непересекающиеся окрестности $U_i \ni a_i$, на каждой из которых p является гомеоморфизмом. Тогда p будет гомеоморфизмом каждого из подмножеств $U_k \cap p^{-1}(\bigcap p(U_i))$ на $\bigcap p(U_i)$.

Отображение обратного образа $B \to 2^A$ непрерывно ([1]). Значит существует такая окрестность $V \subset \bigcap p(U_i)$, что $p^{-1}(V) \subset \bigsqcup_k (U_k \cap p^{-1}(\bigcap_i p(U_i)))$. Тогда $p^{-1}(V) = \bigsqcup (p^{-1}(V) \cap U_i)$, и на каждом множестве $p^{-1}(V) \cap U_i$ отображение p является гомеоморфизмом на V. ■

Определение 7. *Назовем разветвленное накрытие $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n(X)$ полурегулярным, если над множеством $Y \setminus Z$ оно является регулярным n-листным накрытием.*

Теорема 3. *Открыто-замкнутое конечнократное отображение многообразий без края является полурегулярным разветвленным накрытием.*

Доказательство. Положим число n равным максимальной кратности прообразов точек $y \in Y$. Отображение $p : X \to Y$ уже есть. Требуется построить непрерывное отображение $h : Y \to Sym^n(X)$, чтобы оно удовлетворяло свойствам 1, 2 разветвленного накрытия, т.е. $h(y)$ должен содержать хотя бы по одному разу каждый прообраз $p^{-1}(y)$.

Вначале зададим h на множестве неособых значений $U = Y \setminus Z$. Над U отображение p является регулярным накрытием по лемме 6. Положим $h(y) = [x_1, \ldots, x_n]$, где $\{x_1, \ldots, x_n\} = p^{-1}(y)$. Образ такого отображения лежит в $Sym^n(X)$ для всех неособых значений, поэтому оно задано корректно. Непрерывность отображения следует из того факта, что регулярное n-листное накрытие является разветвленным накрытием.

Остается правильно достроить отображение на множестве особых значений Z. Пусть $y \in Z$ особая точка. Тогда y имеет l прообразов $x_1, \ldots, x_l$. Выберем, как и ранее у точки y связную окрестность D, полный прообраз которой состоит из l непересекающихся окрестностей $W_i \ni x_i$. Возьмем неособое значение $a \in D$ и для каждого $i = 1, \ldots, l$ посчитаем число прообразов a, попавших в W_i. Найденное число обозначим за k_i. Тогда $\sum k_i = n$.

Покажем теперь, что k_i не зависят от выбора точки a. Пусть b - другое неособое значение из D. Точки a и b можно соединить инъективным путем p в области D, не проходящим через особые значения, т.к. последние имеют коразмерность 2. Путь p проходит по неособым точкам, значит индуцированное накрытие над ним будет регулярным, т.е. конечным объединением путей в X. Количество путей, попавших в W_i равно k_i как для левого конца пути, так и для правого. Отсюда следует, что k_i определены корректно.

Доопределим теперь h на Z по формуле:

$$h(y) = x = [\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{x_l, \ldots, x_l}_{k_l}]$$

Покажем, что отображение, определенное таким способом, непрерывно.

Зададимся открытой окрестностью $W \ni x$. Без ограничения общности, $W = [U_1, \ldots, U_n]$, U_i - окрестности соответствующих x_i. Более того, можно считать, что

$$U_1 = \cdots = U_{k_1} = V_1; \qquad U_{k_1+1} = \cdots = U_{k_1+k_2} = V_2; \qquad \ldots$$
$$\ldots \qquad U_{k_1+\cdots+k_{l-1}+1} = \cdots = U_{k_1+\cdots+k_l} = V_l$$

причем V_i между собой не пересекаются. Такие множества $W \subset Sym^n X$ обозначим $W_{V_1,k_1;\ldots;V_l,k_l}$ Тогда $A = \bigcap f(V_i)$ - открытое множество Y. Покажем, что $h(A) \subset W$. Для точек из $A \cap U$ проверка напрямую: p-прообраз точки из A содержит ровно k_i точек в каждом U_i, значит $[x_1, \ldots, x_n] \in W$.

Докажем, что точка $y \in A \cap Z$ лежит в $h^{-1}(W)$. Для этого посчитаем кратности вхождения $\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m$ p-прообразов y в $h(y)$. Согласно определению h, рассмотрим окрестность $\widetilde{D} \subset A$ точки y, у которой $p^{-1}(\widetilde{D}) = \bigsqcup \widetilde{W}_i$ есть несвязное объединение окрестностей $\widetilde{x}_i$. Ясно, что каждая из этих окрестностей целиком лежит в каком-нибудь V_j.

Далее, кратность точки $\widetilde{x}_i$ можно измерить, посчитав количество прообразов неособого значения, лежащих в $\widetilde{W}_i$. Просуммируем теперь кратности всех $\widetilde{x}_i$, попавших в V_j. Это будет число прообразов неособого значения, лежащих в V_j, т.е. k_j. Тем самым:

$$h(y) = [\underbrace{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_{l_1}, \widetilde{x}_{l_1}}_{k_1}, \ldots, \underbrace{\widetilde{x}_{m-l_n+1}, \widetilde{x}_{m-l_n+1}, \ldots, \widetilde{x}_m, \widetilde{x}_m}_{k_l}] \in$$

$$\in [\underbrace{V_1, \ldots, V_1}_{k_1}, \ldots, \underbrace{V_l, \ldots, V_l}_{k_l}] = W_{V_1,k_1;\ldots;V_l,k_l}$$

Что и требовалось доказать. ■

Замечание. Пусть $x \in \Sigma \subset X$ особая точка полурегулярного накрытия $p : X \to Y$, $h : Y \to Sym^n X$. Определим порядок ветвления точки x как кратность вхождения x в $hp(x)$.

5 Двумерный случай.

Докажем, что при накрытии замкнутого двумерного многообразия двумерным многоообразием множество особых точек - дискретно. Для этого понадобится

Лемма 7. *Пусть отображение $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто. Тогда образ замкнутой несамопересекающейся кривой γ не гомеоморфен отрезку.*

Доказательство. Предположим противное: $p(\gamma) \cong I$. Согласно ([1], стр 527, теор 1) существует гомеоморфизм g плоскости, переводящий топологически вложенный отрезок $p(\gamma)$ в стандартный отрезок $[0, 1] \in \mathbb{R}^2$. Отображение $g \circ p$ открыто, как композиция открытого отображения и гомеоморфизма. Значит, без ограничения общности можно считать, что образ $p(\gamma)$ является стандартно вложенным отрезком.

Пусть D область, ограниченная кривой γ. Тогда $p(D)$ - открытое множество. Построим в $p(D)$ точку, которая не имеет окрестности в $p(D)$.

Для этого рассмотрим произвольную последовательность точек $p(x_n) \in p(D)$, на которых достигается супремум расстояния до $[-1; 1]$. Тогда последовательность их прообразов x_n имеет сходящуюся в $\overline{D}$ подпоследовательность. Обозначим предел подпоследовательности за x. Тогда $x \notin \partial D$. Действительно, если $x \in \partial D$, то $p(x) \in [-1; 1]$, значит супремум расстояний до отрезка достигается на самом отрезке. Тогда $p(D) \subset [-1; 1]$, а значит не может быть открытым. Итак, $x \in D$, а на $p(x)$ достигается максимум расстояний до отрезка. Отсюда видно, что $p(x)$ не имеет окрестности, лежащей в $p(D)$. ■

Лемма 8. *Пусть отображение $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ открыто. Пусть также, $\gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$ - топологически вложенная окружность и $\gamma_2 = p(\gamma_1)$ также вложенная окружность. Тогда внутренняя область γ_1 отображается на внутреннюю область γ_2.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что γ_2 является стандартно вложенной окружностью $e^{2\pi it} \subset \mathbb{C}$. Обозначим внутреннюю область γ_1 за U. Допустим, что $p(U) \cap \{z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1\} \neq \emptyset$. Тогда как и в предыдущей лемме рассмотрим точку $p(y) \in p(Z)$, лежащую вне открытого единичного круга и наиболее удаленную от него. Тогда для некоторой окрестности $U \ni y$, множество $p(U)$ не является открытым, что противоречит условию.

Тем самым показано, что $p(U) \subset D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. Докажем сюръективность отображения $p : U \to D$. Для этого достаточно показать сюръективность $p : \overline{U} \to \overline{D}$. Обозначим $V = p(\overline{U})$. Допустим, что существует точка $a \in D \setminus V$. Тогда существует точка $b \in \partial V \cap D$. Поскольку $b \in V$, существует $c \in \overline{U}$, т.ч. $p(c) = b$, а так как $p(c) \notin \gamma_2$, то $c \notin \gamma_1$, следовательно $c \in U$. Рассмотрим окрестность $W \ni c$, лежащую в U. Тогда $p(U)$ открытая окрестность b в D. Но в то же время существуют сколь угодно близкие к b точки, не лежащие в V, а следовательно, не лежащие в $p(U)$. Полученное противоречие доказывает, что $p(U) = D$. ■

Лемма 9. *Пусть $p : X \to Y$ разветвленное накрытие, а $x \in X$ - особая точка. Тогда для любой окрестности $U \ni x$ существует меньшая окрестность $W \subset U$, удовлетворяющая следующим условиям:*
1) $p(W)$ связно
2) $W \cap \{p^{-1}p(x)\} = x$
3) W является объединением компонент связности $p^{-1}p(W)$

Доказательство. Пусть $\{x = x_1, x_2, \ldots, x_m\} = p^{-1}p(x)$. Обозначим за U_i непересекающиеся окрестности x_i, такие что $U_1 \subset U$. Пусть V - связная компонента $\bigcap p(U_i)$. Тогда положим $W = p^{-1}(V) \cap U_1$. Нетрудно заметить, что $p(W) = V$ - связно. Кроме того, $V = \bigsqcup p(p^{-1}(V) \cap U_i)$, значит условие 3 также выполнено. Условие 2 выполнено, т.к. $U_1 \cap \{p^{-1}p(x)\} = x$. ■

Утверждение 6. *Пусть $x \in \Sigma \subset X$ - особая точка разветвленного накрытия двумерного многообразия двумерным многообразием. Тогда существует окрестность x, не содержащая других особых точек X.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность U_1 точки x, гомеоморфную $\mathbb{R}^2$, такую что $p(U_1)$ гомеоморфно подмножеству $\mathbb{R}^2$. Теперь выберем меньшую окрестность U_2 удовлетворяющую условиям леммы 10. Теперь можно рассматривать разветвленное накрытие p ограниченное на U_2. Допустим, что в U_2 нашлась еще одна особая точка накрытия $x_2 \in U_2$. Теперь, воспользовавшись леммой 10 еще раз, найдем окрестность $U_3 \ni x_2$, удовлетворяющую условиям леммы. Поскольку x_2 - особая точка, то в ее окрестности найдутся точки x_3 и x_4, такие что $p(x_3) = p(x_4) = y_3$. Введем также обозначения: $y_1 = p(x_1)$, $y_2 = p(x_2)$. Множество $p(U_3)$ связно и точки y_2 и y_3 можно соединить инъективным путем s_2. Аналогично, из связности $p(U_2)$ следует существование инъективного пути s_1 лежащего в U_2, соединяющего точки y_1 и y_3. Более того путь s_1 можно выбрать так, чтобы он не пересекал уже построенный путь s_2 в точках, отличных от y_3. Возможность такого выбора следует из достижимости точки y_3 ([1], стр 511, теор 11) и связности связного открытого подмножества плоскости без замкнутого отрезка. Теперь рассмотрим два поднятия s_2' и s_2'' пути s_2 с началом в точках x_3 и x_4 (результат Д.В.Гугнина). Эти поднятия лежат в U_3 и оканчиваются в точке из $p^{-1}(y_2)$. Значит они могут оканчиваться только в x_2. Аналогично построим два поднятия s_1' и s_1'' пути s_1 с началом в точках x_3 и x_4 соответственно. Оба поднятия оканчиваются в точке x.

Получили два пути, $q' = -s_1' \cup s_2'$ и $q'' = -s_1'' \cup s_2''$, накрывающие инъективный путь $q = s_1 \cup s_2$. Легко видеть, что q' и q'' также инъективны. Проделав, если нужно, репараметризацию, положим $q'(\frac{1}{2}) = x_3$, $q''(\frac{1}{2}) = x_4$ и $q(\frac{1}{2}) = y_3$. Найдем наименьшее $t > \frac{1}{2}$ и наибольшее $t < \frac{1}{2}$, т.ч. $q'(t) = q''(t)$. Такие t_1 и t_2 существуют, т.к. $q'(0) = q''(0) = x$ и $q'(1) = q''(1) = x_2$. Теперь поднятия q' и q'', ограниченные на $[t_1, t_2]$ замыкаются в инъективное отображение окружности в $U_1 \cong \mathbb{R}^2$. Получили вложенную в $\mathbb{R}^2$ окружность, образ которой при открытом отображении p является путем q, ограниченным на $[t_1, t_2]$. Этого не может быть по лемме 7. ■

Утверждение 7. *Пусть X и Y связные двумерные топологические многообразия без края, $p : X \to Y$ полурегулярное n-листное накрытие и $x \in \Sigma \subset X$ - особая точка накрытия p. Пусть заданы $D_1 = D_2 = \{u \in \mathbb{C}; |u| < 1\}$ и отображение $g_m : D_1 \to D_2$, $g_m(u) = u^m$. Тогда существуют такие окрестности $U \ni x$ и $V \subset p^{-1}(U)$, такие гомеоморфизмы φ, ψ, и такое $m, 2 \le m \le n$, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & D_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g_m} \\ U & \xrightarrow{\psi} & D_2 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Обозначим $y = p(x)$. Пусть $\{x = x_1, x_2, \ldots, x_l\} = p^{-1}(y)$. Выберем у x_i связные непересекающиеся окрестности U_i, гомеоморфные плоскости. Пусть $V \subset \bigcap p(U_i)$, также гомеоморфно плоскости и содержит y. Рассмотрим окружность $S \subset V$, охватывающую точку y. Поскольку p над S является регулярным накрытием, то $p^{-1}(S)$ есть несвязное объединение окружностей S_j. Каждая окружность S_j лежит в каком-то из множеств U_i, т.к. U_i не пересекаются. Без ограничения общности, считаем, что $S_1, \ldots, S_\alpha \subset U_1$.

Рассмотрим окружность S_1. Она лежит в множестве, гомеоморфном плоскости, значит, ограничивает область $W_1 \subset U_1$. Согласно лемме 8, $p(W_1)$ совпадает с внутренней областью S. Но тогда $p(W_1) \ni y$. Следовательно, $W_1 \ni x$, т.к. $p^{-1}(y) \cap U_1 = x$. Аналогичные рассуждения приводят к тому, что внутренние области всех окружностей $S_i, i = 1, \dots, \alpha$ содержат x. Допустим, что $\alpha > 1$. Поскольку, окружности не пересекаются, $S_\imath$ лежит во внутренности $S_\jmath$ для некоторых $\imath, \jmath$. Но отображение p переводит внутреннюю область $S_\jmath$ во внутреннюю область S, поэтому $S_\imath$ не может перейти в S. Значит $S_1 = p^{-1}(S) \cap U_1$. Аналогично, $S_i = p^{-1}(S) \cap U_i$

Обозначим за W_i замыкание внутренней области S_i, $\widetilde{W_i} = W_i \setminus \{x_i\}$. Замыкание внутренней области S обозначим Q, $\widetilde{Q} = Q \setminus \{y\}$. Тогда $q = p : \widetilde{W_1} \to \widetilde{Q}$ - открытое отображение. Покажем, что существует такое число m, что для любой точки $y \in \widetilde{Q}$, $\#q^{-1}(y) = m$. Выберем две точки y_1 и y_2 в $\widetilde{Q}$. Соединим их инъективным путем s в $\widetilde{Q}$. Отображение p над s является регулярным накрытием, поэтому $p^{-1}(s) = \bigsqcup s_i$ - несвязное объединение путей в X. Каждый путь лежит в каком-то $\widetilde{W_i}$, т.к. W_i не пересекаются (они лежат в непересекающихся множествах U_i). Значит, $s_1, \dots, s_\nu \subset U_1$. Значит, $\#q^{-1}(y_1) = \#q^{-1}(y_2) = \nu$. Теперь можно воспользоваться леммой 6, тем самым показав, что отображение $q : \widetilde{W_1} \to \widetilde{Q}$ является регулярным ν-листным накрытием.

С точностью до гомеоморфизма пространства накрытия существует только одно n-листное регулярное накрытие $S^1 \times [0, 1)$ над собой. Поэтому для любого гомеоморфизма $\psi : \widetilde{Q} \to \overline{D}_2 \setminus \{0\}$ существует гомеоморфизм φ, замыкающий диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W_1} & \xrightarrow{\varphi} & \overline{D}_1 \setminus \{0\} \\ \Big\downarrow q & & \Big\downarrow g_n \\ \widetilde{Q} & \xrightarrow{\psi} & \overline{D}_2 \setminus \{0\} \end{array}$$

Все отображения в диаграмме можно продолжить до отображений одноточечных компактификаций, получив тем самым требуемый факт:

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{\varphi} & \overline{D}_1 \\ \Big\downarrow q & & \Big\downarrow g_n \\ Q & \xrightarrow{\psi} & \overline{D}_2 \end{array}$$

■

Из доказательства видно, что по заданному гомеоморфизму ψ окрестности особой точки на диск можно построить гомеоморфизм связной компоненты прообраза этой окрестности φ на диск такой, что отображение $\psi \circ p \circ \varphi^{-1}$ является гладким.

Определение 8. *Пусть X и Y двумерные гладкие многообразия без края. Назовем n-листное полурегулярное накрытие $p : X \to Y$ гладким разветвленным накрытием, если выполнены следующие условия:*

1) Отображение p является гладким.

2) Отображение p является локальным диффеоморфизмом на множестве $X \setminus \Sigma$, где Σ - множество особых точек X.

3) У любой особой точки $z \in \Sigma$ существует окрестность V, и два диффеоморфизма $\varphi : V \to D_1$, $\psi : U \to D_2$, где $U = p(V)$, $D_1 = D_2 = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, такие что диаграмма:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"] & D_1 \arrow[d, "g_m"] \\ U \arrow[r, "\psi"] & D_2 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Здесь $g_m(x) = x^m$

Теорема 4. *Пусть $p : X \to Y$ n-листное полурегулярное накрытие, X и Y - двумерные топологические многообразия без края. Пусть на Y задана гладкая структура. Тогда существует единственная гладкая структура на X, такая что $p : X \to Y$ - гладкое разветвленное накрытие.*

Доказательство. На Y есть гладкая структура, т.е. покрытие многообразия открытыми множествами U_i вместе с гомеоморфизмами $\psi_i : U_i \to D_i$ на открытые подмножества $\mathbb{R}^2$, такими, что $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ гладкое при $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Если на Y задана гладкая структура, то покрытие $\{U_i\}$ можно брать сколь угодно мелким. Рассмотрим в качестве атласа на Y покрытие $U_i \sqcup V_i$, обладающее следующими свойствами:

1)Для любой особой точки $y_i \in Z$ существует только одно множество $U_i \ni y_i$, причем $U_i \cong D^2$. Множества U_i между собой не пересекаются.

2)Для остальных элементов покрытия V_i выполнено $p^{-1}(V_i) = nV_i = \bigsqcup V_i^{(k)}$

Пусть ψ_i и τ_i - отображения соответственно карт U_i и V_i в $\mathbb{R}^2$, задающее гладкую структуру. Построим гладкую структуру на X. Рассмотрим атлас $\{\bigsqcup V_i^{(k)}\} \sqcup \{\bigsqcup U_i^{(k)}\}$, где $U_i^{(k)}$ - компоненты $p^{-1}(U_i)$.

Зададим отображения $\varphi_i^{(k)} : U_i^{(k)} \to \mathbb{R}^2$ согласно процедуре, описанной в доказательстве предыдущего утверждения. Зададим $\sigma_i^{(k)} = \tau_i \circ p : V_i^{(k)} \to \mathbb{R}^2$.

Докажем, что атлас $\{\bigsqcup V_i^{(k)}\} \sqcup \{\bigsqcup U_i^{(k)}\}$ и набор отображений $\{\sigma_i^{(k)}\} \cup \{\varphi_i^{(k)}\}$ задают гладкую структуру на X. Действительно, переход от карты $V_i^{(k)}$ к карте $V_j^{(l)}$ осуществляется гладкой функцией $\sigma_i^{(k)} \circ (\sigma_j^{(l)})^{-1}$. Переход от $U_i^{(k)}$ к $V_j^{(l)}$ осуществляется функцией

$$\sigma_j^{(l)} \circ (\varphi_i^{(k)})^{-1} = \tau_i \circ p \circ p^{-1} \circ \psi_i^{-1} \circ g_n = \tau_i \circ \psi_i^{-1} \circ g_n$$

Запись корректна т.к. p является гомеоморфизмом на $U_i^{(k)}$. Как и ранее $g_n(z) = z^n$. Отсюда видно, что функция перехода гладкая и невырожденная. Последнее следует из того факта, что $dg_n(z) = 0 \Leftrightarrow \psi_i^{-1} \circ g_n(z)$ - особая точка. Но особая точка не лежит в $V_j \cap U_i$. Значит функция перехода гладкая и невырожденная.

Переход от $V_i^{(k)}$ к $V_j^{(l)}$ рассматривать не имеет смысла, т.к. указанные множества не пересекаются.

Итог. Построена гладкая структура на X. Осталось заметить, что согласно конструкции гладкой структуры на X, отображение p является гладким и локальным диффеоморфизмом в неособых точках. Условие 4 в определении гладкого накрытия также выполнено. Доказано существование гладкой структуры на X, создающей на p структуру гладкого накрытия.

Теперь докажем единственность гладкой структуры.

Допустим существует две гладких структуры на X. Обозначим гладкие многообразия с соответствующими структурами за X^1 и X^2. Требуется показать, что существует такое покрытие X открытыми множествами V_i, что для каждого V_i отображение $id : V_i^1 \to V_i^2$ является гладким, где под V_i^δ подразумевается множество V_i с гладкостью X^δ. Действительно, из симметричности доказательства будет следовать, что обратное отображение $id : V_i^2 \to V_i^1$ также гладкое, значит $id : V_i^1 \to V_i^2$ является диффеоморфизмом.

Вначале построим окрестность V для произвольной особой точки $z \in \Sigma$. Согласно определению гладкого накрытия выберем окрестность V точки z, такую что диаграммы

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & D_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} \\ U_1 & \xrightarrow{\psi} & D_2 \\ V_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & D_1 \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} \\ U_2 & \xrightarrow{\psi} & D_2 \end{array}$$

коммутативны.

Вообще говоря, окрестность V для различных гладких структур выбирается по-разному. Ограничим указанные диаграммы на $V = V_1 \cap V_2$. При таком ограничении множества, появившиеся в правых столбцах диаграмм уже не будут, вообще говоря, кругами, но станут некоторыми открытыми подмножествами D_1^1, D_1^2 единичного круга D_1, и подмножествами D_2^1, D_2^2 круга D_2.

Расмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} D_1^1 & \xleftarrow{\varphi_1} & V & \xrightarrow{\varphi_2} & D_1^2 \\ \downarrow{\scriptstyle g_n} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle g_n} \\ D_2^1 & \xleftarrow{\psi} & Y & \xrightarrow{\psi} & D_2^2 \end{array}$$

Из нее видно, что $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : D_1 \to D_1$, задается правилом $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = xe^{2\pi ik(x)/n}$. В силу непрерывности указанной функции, $k(x)$ локально постоянно, значит $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = xe^{2\pi ik/n}$. Следовательно, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ гладкое отображение открытого подмножества диска на другое открытое подмножество. Покажем, что $id : V^1 \to V^2$ гладкое. Имеем равенство:

$$(id : V^1 \to V^2) =$$
$$= (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 : V^1 \to V^2) =$$
$$= (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 : V^1 \to V^2) =$$
$$= (\varphi_2^{-1} \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varphi_1 : V^1 \to V^2)$$

Последнее есть композиция гладких отображений $\varphi_1 : V^1 \to D_1^1$, $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) : D_1^1 \to D_1^2$ и $\varphi_2^{-1} : D_1^2 \to V^2$. Значит, оно является гладким в некоторой окрестности z. Аналогично показываем, что обратное отображение $id : V^2 \to V^1$ гладкое. Следовательно, оно является диффеоморфизмом для некоторой окрестности особой точки z.

Итак, тождественное отображение некоторой окрестности особой точки z является диффеоморфизмом. Рассмотрим теперь произвольную неособую точку. У нее есть окрестность V^1, диффеоморфно отображающаяся посредством p на Y относительно гладкости X_1 и окрестность V^2, диффеоморфно относительно X_2 отображающаяся на Y. Тогда $id = p \circ p^{-1} : V^1 \cap V^2 \to V^1 \cap V^2$ будет диффеоморфизмом, как композиция двух диффеоморфизмов: $p : V^1 \cap V^2 \to p(V^1 \cap V^2)$ относительно X^1 и $p^{-1} : p(V^1 \cap V^2) \to V^1 \cap V^2$ относительно X^2.

Получили искомое покрытие V_i. Значит отображение $id : X^1 \to X^2$ диффеоморфизм. ■

Следствие. Пусть $p : X \to Y$ открыто-замкнутое конечнократное отображение двумерных многообразий без края, и на X задана гладкая структура. Тогда на Y существует единственная гладкая структура, такая что p является гладким разветвленным накрытием.

Утверждение 8. *Разветвленные накрытия компактного двумерного многообразия над собой существуют только над двумерным тором, сферой, бутылкой Клейна и проективной плоскостью. Причем накрытия над $\mathbb{T}^2$ и $\mathbb{K}$ регулярны.*

Доказательство. Выведем оценки для эйлеровой характеристики многообразия, основываясь на формуле Римана-Гурвица. Ее применимость вытекает из доказанного утверждения о структуре ветвления в особой точке.

Пусть многообразие X накрывает себя n-листно. Обозначим χ эйлерову характеристику X. Рассмотрим множество особых точек базы и вырежем их вместе с некоторыми круговыми окрестностями. Вырежем также прообразы этих окрестностей. Как было доказано во второй секции, оставшееся накрытие - регулярно.

Обозначим получившееся многообразие базы за M, а многообразие накрытия N. Тогда, если в базе вырезано k дисков, то

$$\chi(M) = \chi - k.$$

.

Оценим количество вырезанных дисков в пространстве накрытия. У каждой особой точки не больше $n-1$ прообразов, значит всего в накрытии вырезано

$$m \leq k(n-1) \tag{1}$$

дисков.

Получили, что

$$\chi(N) = \chi - m.$$

С другой стороны, N накрывает M регулярно n-листно, значит

$$\chi(N) = n \cdot \chi(M); \tag{2}$$

Из выражений (1) и (2) находим

$$\chi - m = n \cdot (\chi - k) \leq n \cdot \chi - m + k$$

$$(n-1) \cdot \chi - k \geq 0$$

Отсюда следует утверждение. Действительно, если накрытие нетривиально, то $n \geq 2$. Значит $\chi \geq 0$, а если $\chi = 0$, то $k = 0$, т.е. накрытие p не имеет особых точек, иными словами, регулярно.

Значит накрытия могут существовать только для ориентируемых поверхностей рода 0 и 1, и неориентируемых рода 1 и 2.

Для завершения доказательства осталось показать, что указанные пространства накрывают себя.

1) $p : S^2 \to S^2$. Отображение римановой сферы, задаваемое уравнением $p(z) = z^2$. Имеет две особые точки, 0 и ∞.

2) $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Достаточно взять произведение двух накрытий окружности над окружностью.

3) $p : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Отождествим проективную плоскость с фактором римановой сферы по отношению эквивалентности $\overline{z} \sim -\frac{1}{z}$. Отображение $z \mapsto z^3$ опускается до отображения фактор-пространств. Имеет одну особую точку $[0] = [\infty]$.

4) $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. У отображения, построенного в предыдущем примере вырежем особую точку вместе с окрестностью и прообразом. Оставшееся накрытие - регулярное 3-листное накрытие листа Мебиуса листом Мебиуса. Склеим два таких накрытия по границе. Получим регулярное накрытие бутылки Клейна бутылкой Клейна. ■

Список литературы

[1] К. Куратовский, Топология т.2. Изд-во "Мир". Москва. 1969.

[2] В. Гуревич, Г. Волмэн, Теория размерности. Гос. изд-во иностранной литературы. Москва. 1948.

[3] А. В. Чернавский, Конечнократные открытые отображения многообразий, Мат. сборник 65:3, 1964, 357-369.

[4] P. T. Church, E. Hemmingsen, Light open maps on n-manifolds, Duke Math. J., 27, 1960, 527-536.