МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Студента 502 группы Айзенберга Антона Андреевича

"F-ВЕКТОРЫ И ЧИСЛО БУХШТАБЕРА СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ"

Научный руководитель - член-корр. РАН, профессор Бухштабер В.М.

Содержание

1 Введение

Эту работа состоит из трех частей.

Первая включает разделы 2 и 3. В ней дается обобщение кольца многогранников, введенного В.М.Бухштабером, а именно, кольцо симплициальных комплексов. При помощи дифференцирования в этом кольце выведены соотношения Дена-Соммервиля для эйлеровых сфер и эйлеровых многообразий, доказанные впервые в [8]. Формула дифференцирования на множестве симплициальных комплексов была впервые рассмотрена в [6] при выводе локальных формул для классов симплициальных гомологий, двойственных к классам Понтрягина. В отличие от А.А.Гайфуллина мы рассматриваем эквивалентность комплексов без учета ориентации.

Также рассматриваются флаговые f- и h-числа $(n-1)$-мерных симплициальных комплексов, вершины которых можно покрасить правильным образом в n цветов. Для флаговых f-чисел многообразий также выполняется аналог соотношений Дена-Соммервиля.

Для f-чисел сфер эти соотношения являются наиболее общими линейными соотношениями. Доказательство этого факта и соотношений Дена-Соммервилля для сфер можно найти в [4].

Во второй части (разделы 4 – 7) рассматриваются частично упорядоченные множества. По каждому ч.у.множеству A можно построить порядковый (или флаговый) симплициальный комплекс $\operatorname{ord} A$, а для каждого симплициального комплекса K можно рассмотреть ч.у.множество его симплексов по включению $\operatorname{pos} K$. Композиция этих операций дает конус над барицентрическим подразбиением $\operatorname{ord}\operatorname{pos} K = \operatorname{cone} K'$. Эту взаимосвязь можно использовать для вычисления количества цепей прямого произведения ч.у.множеств, зная числа цепей множителей. Отсюда выводятся формулы для вычисления f-вектора декартова произведения двух симплициальных комплексов, триангулированного подходящим образом, через f-векторы этих комплексов. Одна из этих формул описана в [7], но доказана другим способом.

Также рассмотрены операции порядковой суммы и порядкового произведения ч.у.множеств и их влияние на число цепей. Введена операция $\otimes$ на симплициальных комплексах, аналогичная порядковому произведению ч.у.множеств. В части 3 будет отмечено еще одно свойство этой операции, связанное с функтором K-степени.

Третья часть (разделы 8-12) начинается с рассмотрения K-степеней произвольных клеточных пар. Доказана связь f-полиномов K, клеточной пары и K-степени, если определить f-полином клеточного пространства по аналогии с f-полиномом многогранника.

Далее описано число Бухштабера s и некоторые его свойства. Работа следует результатам Н.Ю.Ероховца [3]. Задача вычисления $s(K)$ сводится к построению невырожденного симплициального отображения K в комплекс U_l с наименьшим возможным номером, где U_l — универсальные комплексы, введенные в [5]. Таким образом, число s проявляет свойства, аналогичные свойствам хроматического числа γ, так как γ определяется сходным образом с заменой U_l на симплексы Δ_l. При помощи этой аналогии можно доказать несколько оценок на число s. Также исследуется структура комплексов U_l. Это приводит к известным ранее свойствам s и позволяет получить несколько новых.

Вводится семейство инвариантов симплициальных комплексов, аналогичных хроматическому числу. Использование этих инвариантов позволяет получать новые оценки на число Бухштабера.

2 Кольцо симплициальных комплексов

Определение 1. *Пусть M — конечное множество. Назовем симплициальным комплексом на M систему K его подмножеств, $K \subseteq 2^M$, такую что выполнены следующие свойства:*

1) Если $\sigma \in K$ и $\tau \subset \sigma$, то $\tau \in K$.

2) Все одноэлементные подмножества лежат в K. Пустое множество также лежит в K.

Элементы множества M называются вершинами, элементы K — симплексами. Часто мы будем обозначать M через $V(K)$.

Назовем два симплициальных комплекса эквивалентными, если существует биекция между множествами вершин, осуществляющая биекцию между симплексами.

Размерностью симплекса $\dim \sigma$ будем называть число $|\sigma| - 1$. Максимальная размерность симплексов K есть, по определению, размерность комплекса $\dim K$.

Симплексы симплициального комплекса K образуют частично упорядоченное множество относительно включения. Это множество мы будем обозначать $\operatorname{pos} K$.

Определение 2. *Симплициальный комплекс K называется чистым, если все его максимальные по включению симплексы имеют одинаковую размерность.*

Определение 3. *Пусть K — симплициальный комплекс. Построим новый симплициальный комплекс K', вершинами которого будут все непустые симплексы K. Симплексы K' определяются всевозможными наборами $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ симплексов K, которые образуют цепь по включению.*

Определение 4. *Пусть K_1, K_2 — симплициальные комплексы. Определим новый симплициальный комплекс $K_1 * K_2$ на множестве $V(K_1) \sqcup V(K_2)$. Его симплексы имеют вид $\sigma = \sigma_1 \sqcup \sigma_2$, где $\sigma_1 \in K_1$, а $\sigma_2 \in K_2$.*

Определение 5. *Пусть K — симплициальный комплекс и $\sigma \in K$ его симплекс. Определим линк σ как подкомплекс K, образованный множествами $\tau \in K$, такими что $\tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in K$. Для линка будет использоваться обозначение* $\operatorname{link}(\sigma)$*, если из контекста ясно, в каком комплексе он лежит. В противном случае мы будем писать* $\operatorname{link}_K(\sigma)$.

Полезно заметить следующий факт. Пусть $\sigma = \tau_1 \sqcup \tau_2 \in K$. Тогда $\operatorname{link}_K \sigma = \operatorname{link}_{\operatorname{link}_K \tau_1} \tau_2$, т.е. линк взятый внутри линка, является снова линком исходного комплекса.

Определение 6. *Симплициальный $(n-1)$-мерный комплекс K называется эйлеровым многообразием, если $\chi(\operatorname{link}(\sigma)) = 1 - (-1)^{n-|\sigma|}$ для каждого непустого симплекса $\sigma \in K$. Эйлеровой $(n-1)$-мерной сферой называется эйлерово многообразие, у которого $\chi(K) = 1 - (-1)^n$. Здесь χ обозначает эйлерову характеристику.*

В качестве основных примеров эйлеровых многообразий и сфер выступают триангуляции произвольных компактных замкнутых многообразий и сфер соответственно. Заметим, что все линки эйлерова многообразия являются эйлеровыми сферами по определению.

Построим кольцо симплициальных комплексов $\mathcal{K}$. Его аддитивными образующими будут классы эквивалентности симплициальных комплексов $\mathcal{K} = \mathbb{Z}[K]$. Определим умножение на элементах базиса $K_1 \cdot K_2 = K_1 * K_2$ и распространим его по линейности на все $\mathcal{K}$. Введем дифференцирование d. На базисе зададим его таким образом $dK = \sum\limits_{v \in K} \operatorname{link}(v)$, где $\operatorname{link}(v) = \operatorname{link}(\{v\})$, а на остальные элементы распространим по линейности. Покажем, что эти две операции определяют кольцо с дифференцированием.

Утверждение 1. $d(K_1 \cdot K_2) = dK_1 \cdot K_2 + K_1 \cdot dK_2$.

Доказательство. Здесь и далее v обозначает одномерный симплекс, соответствующий вершине. По определению $v \in K_1 * K_2 \Leftrightarrow v \in K_1$ или $v \in K_2$. Поэтому

$$d(K_1 * K_2) = \sum_{v \in K_1 * K_2} \operatorname{link}(v) = \sum_{v \in K_1} \operatorname{link}_{K_1 * K_2}(v) + \sum_{v \in K_2} \operatorname{link}_{K_1 * K_2}(v) =$$

$$= \sum_{v \in K_1} \operatorname{link}_{K_1}(v) * K_2 + \sum_{v \in K_2} K_1 * \operatorname{link}_{K_2}(v) = d(K_1) \cdot K_2 + K_1 \cdot dK_2.$$

Использовано то, что для $v \in K_1 \subset K_1 * K_2$ выполнено $\operatorname{link}(v) = \{\sigma \sqcup \tau \in K_1 * K_2, v \notin \sigma, \sigma \in K_1, \tau \in K_2\} = \operatorname{link}_{K_1}(v) * K_2$. ■

Определим для симплициального комплекса K числа $f_i = \#\{\sigma \in K, |\sigma| = i\}$ — количества симплексов размерности $i-1$. Тогда $\max\limits_{f_k \neq 0} k = \dim K - 1 = n$. Определим отображения f и F из $\mathcal{K}$ в $\mathbb{Z}[t]$ и $\mathbb{Z}[\alpha, t]$ соответственно по формулам

$F_K(\alpha, t) = f_0 \alpha^n + f_1 \alpha^{n-1} t + \ldots + f_n t^n$,

$f_K(t) = F_K(1, t) = f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n$.

Утверждение 2. *Отображение f является дифференциальным гомоморфизмом из $(\mathcal{K}, d)$ в $(\mathbb{Z}[t], \frac{\partial}{\partial t})$. Отображение F является гомоморфизмом на подкольце, образованном чистыми комплексами в $(\mathcal{K}, d)$, со значениями в дифференциальном кольце $(\mathbb{Z}[\alpha, t], \frac{\partial}{\partial t})$.*

Доказательство. Вначале покажем мультипликативность f.

$$f_{K_1 * K_2} = \sum_{\sigma \in K_1 * K_2} t^{|\sigma|} = \sum_{\sigma_1 \in K_1, \sigma_2 \in K_2} t^{|\sigma_1| + |\sigma_2|} = \left(\sum_{\sigma_1 \in K_1} t^{|\sigma_1|} \right) \cdot \left(\sum_{\sigma_2 \in K_2} t^{|\sigma_2|} \right) = f_{K_1} \cdot f_{K_2}.$$

Пусть $n_1 = \dim K_1 + 1, n_2 = \dim K_2 + 1$. Тогда, очевидно, $\dim(K_1 \cdot K_2) + 1 = n_1 + n_2 = n$. Используя, что $F_K(\alpha, t) = f_K \left(\frac{t}{\alpha} \right) \alpha^{dim K + 1}$ получаем

$$F_{K_1 * K_2}(\alpha, t) = f_{K_1 * K_2} \left(\frac{t}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{n_1 + n_2} = \left[f_{K_1} \left(\frac{t}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{n_1} \right] \cdot \left[f_{K_2} \left(\frac{t}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{n_2} \right] = F_{K_1} \cdot F_{K_2}.$$

Далее докажем, что гомоморфизм дифференциален. Выкладки проводятся для F. Заметим, что если K - чистый комплекс, то размерность линка любой его вершины на единицу меньше размерности K.

$$F_{dK} = F \left(\sum_{v \in K} \operatorname{link}(v) \right) = \sum_{v \in K} F_{\operatorname{link}(v)} = \sum_{v \in K} \sum_{\sigma \in \operatorname{link}(v)} t^{|\sigma|} \alpha^{\dim(\operatorname{link}(v)) + 1 - |\sigma|} =$$
$$= \sum_{v \in K, \sigma \in K, v \notin \sigma, v \cup \sigma \in K} t^{|\sigma|} \alpha^{n-1-|\sigma|} = \sum_{\tau \in K, v \in \tau, \sigma = \tau \setminus v} t^{|\sigma|} \alpha^{n-1-|\sigma|} = \sum_{\tau \in K, v \in \tau} t^{|\tau|-1} \alpha^{n-|\tau|} =$$
$$= \sum_{\tau \in K} |\tau| t^{|\tau|-1} \alpha^{n-|\tau|} = \frac{\partial}{\partial t} F_K.$$

Размерности линков вершин влияют только на степени α. Если $\alpha = 1$, то те же рассуждения дадут доказательство дифференциальности гомоморфизма f для любого симплициального комплекса. ■

Заметим, что $d^l K = \sum_{|\sigma| = l} l! \cdot \operatorname{link}(\sigma)$, согласно замечанию о линке линка.

Пример 1. Пусть $K = \Delta_{n-1}$ обозначает симплекс, т.е. систему, состоящую из всех подмножеств n-элементного подмножества. Тогда $\Delta_{n-1} = \underbrace{\Delta_1 * \ldots * \Delta_1}_{n}$, следовательно $f_{\Delta_{n-1}}(t) = (1+t)^n$, что подтверждает тот факт, что число k-элементных подмножеств n-элементного множества равно $\binom{n}{k}$. Аналогично, $F_{\Delta_{n-1}}(\alpha, t) = (\alpha + t)^n$. Для любой вершины $v \in \Delta_n$ выполнено $\operatorname{link} v = \Delta_{n-2}$, следовательно $d\Delta_{n-1} = n\Delta_{n-2}$.

Пример 2. Рассмотрим симплициальный комплекс $\partial \Delta_n$ на $(n+1)$-элементном множестве $[n+1]$, симплексами которого являются все его подмножества, кроме самого $[n+1]$. Тогда $d(\partial \Delta_n) = (n+1)\partial \Delta_{n-1}$, а f-полином имеет вид $F_{\partial \Delta_n}(\alpha, t) = \frac{1}{\alpha}((\alpha + t)^{n+1} - t^{n+1})$.

Введем H-полином $H_K(\alpha, t) = F_K(\alpha - t, t)$. Такая замена координат переводит оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ в оператор $\partial = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha}$. Таким образом выполнено равенство $\partial H_K = H_{dK}$.

Утверждение 3 (соотношения Дена-Соммервилля)**.** *Если K - чистая эйлерова сфера,* $\dim K = n - 1$, *то*

$$H_K(\alpha, t) = H_K(t, \alpha).$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ комплекс представляет из себя конечный набор точек. Из того, что K имеет эйлерову характеристику сферы следует, что точек ровно две. Тогда $F_K = (\alpha + 2t)$, следовательно $H_K(\alpha, t) = \alpha + t$ симметричен. База доказана.

Допустим, для всех комплексов L размерности $\dim L \leqslant n-2$ утверждение доказано. Рассмотрим комплекс K размерности n, удовлетворяющий условию теоремы. Тогда линк любой вершины $\operatorname{link}(v)$

также удовлетворяет условию теоремы, и, согласно предположению индукции, выполнено условие $H_{\mathrm{link}(v)}(\alpha, t) = H_{\mathrm{link}(v)}(t, \alpha)$. Просуммировав это выражение по всем вершинам $v \in K$, получим

$H_{dK}(\alpha, t) = H_{dK}(t, \alpha)$,

$\partial H_K(\alpha, t) = \partial H_K(t, \alpha)$, (здесь используется симметричность оператора ∂ по аргументам).

$H_K(\alpha, t) = H_K(t, \alpha) + P(\alpha - t) = H_K(t, \alpha) + C \cdot (\alpha - t)^n$.

Последнее равенство вытекает из того, что H-полином однороден. Осталось определить константу C. Для этого подставим $\alpha = -1, t = 0$

$H(-1, 0) = H(0, -1) + C(-1)^n$,

$F(-1, 0) = F(1, -1) + C(-1)^n$,

$(-1)^n = 1 - \chi(K) + C(-1)^n$,

$C = (-1)^n(\chi(K) - \chi(S^{n-1})$.

Следовательно, $C = 0$ и шаг индукции доказан. ■

Теорема 1. *Пусть K — чистое эйлерово $(n-1)$-мерное многообразие. Тогда выполнено выполнено*

$$H_K(\alpha, t) = H_K(t, \alpha) + (\chi(K) - \chi(S^{n-1}) \cdot (t - \alpha)^n.$$

Доказательство. У эйлерова $(n-1)$-многообразия линки симплексов мощности k являются эйлеровыми $(n-k-1)$-сферами. Поэтому линки вершин K удовлетворяют условию предыдущего утверждения. Значит, их h-полиномы симметричны. Получаем, как и раньше,

$H_{dK}(\alpha, t) = H_{dK}(t, \alpha)$,

$\partial H_K(\alpha, t) = \partial H_K(t, \alpha)$,

$H_K(\alpha, t) = H_K(t, \alpha) + P(\alpha - t) = H_K(t, \alpha) + C \cdot (\alpha - t)^n$, где

$C = (-1)^n(\chi(K) - \chi(S^{n-1})$.

Отсюда следует утверждение. ■

В частности, топологические сферы и триангулированные многообразия нечетной размерности обладают симметричными h-полиномами.

3 Флаговые f- и h-векторы

Определение 7. *Согласно [4], определим сбалансированный комплекс как чистый симплициальный комплекс K размерности $n-1$, обладающий правильной раскраской вершин в n цветов. Т.е. задана функция $c : V(K) \to [n] = \{1, \ldots, n\}$, биективная на максимальных симплексах.*

Пример. Пусть задано регулярное клеточное разбиение Ω. Построим симплициальный комплекс Ω', называемый барицентрическим подразбиением Ω. Множеством его вершин будет множество непустых клеток Ω. Непустое множество вершин образует симплекс, тогда и только тогда, когда замыкания соответствующих клеток образуют цепь по включению. Тогда Ω' является сбалансированным комплексом. Достаточно сопоставить каждой вершине размерность соответствующей клетки.

Утверждение 4. *Формальные суммы сбалансированных комплексов $\widetilde{\mathcal{K}}$ образуют дифференциальное подкольцо в $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Доказательство состоит в прямой проверке того, что джойн двух сбалансированных комплексов обладает правильной раскраской, и того, что линки также можно раскрасить в нужное количество цветов. ■

Пусть K — сбалансированный комплекс размерности n с фиксированной раскраской в цвета $1, \ldots, n$. Скажем, что симплекс $\sigma \in K$ покрашен в цвета $T \subseteq [n] = \{1, \ldots, n\}$, если $c(\sigma) = T$.

Определение 8. *Определим флаговые (или расширенные) f-числа комплекса K следующим образом. Пусть $T \subseteq [n]$. Тогда $f_T = \#\{\sigma \in K, \sigma$ покрашен в цвета $T\}$.*

Простое следствие из определений дает связь между компонентами расширенного и простого f-векторов

$$f_l(K) = \sum_{T\subseteq[n],|T|=l} f_T.$$

Определение 9. *Введем флаговые (или расширенные) h-числа. Пусть $T \subseteq [n]$. Тогда*

$$h_T = \sum_{R\subseteq T}(-1)^{|T|-|R|}f_R.$$

Из формулы включения-исключения следует, что

$$f_T = \sum_{R\subseteq T} h_R.$$

Утверждение 5 (обобщенные соотношения Дена-Соммервилля)**.** *Пусть K — сбалансированная эйлерова сфера размерности $n-1$. Тогда ее обобщенные h-числа обладают симметричностью*

$$h_T = h_{[n]\setminus T}.$$

Доказательство. Фиксируем правильную раскраску c комплекса K в n цветов. Введем многочлен от $2n$ переменных $f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,t_1,t_2,\ldots,t_n) = f(\overline{\alpha},\overline{t}) = \sum\limits_{T\subseteq[n]} f_T\overline{t}^T\overline{\alpha}^{[n]\setminus T}$. Здесь использовано обозначение $\overline{t}^T = t_1^{\varepsilon_1}t_2^{\varepsilon_2}\ldots t_n^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_i = 1$ если $i\in T$, и $\varepsilon_i = 0$ иначе. Аналогичное обозначение для $\overline{\alpha}$. Также введем полином $h(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,t_1,t_2,\ldots,t_n) = h(\overline{\alpha},\overline{t}) = \sum\limits_{T\subseteq[n]} h_T\overline{t}^T\overline{\alpha}^{[n]\setminus T}$.

Из свойств флаговых f- и h-чисел следует $h(\overline{\alpha},\overline{t}) = f(\overline{\alpha}-\overline{t},\overline{t})$. Заметим еще, что $f(\alpha,\ldots,\alpha,t,\ldots,t) = F(\alpha,t),\quad h(\alpha,\ldots,\alpha,t,\ldots,t) = H(\alpha,t)$.

В терминах введенных многочленов симметричность h-чисел означает симметричность многочлена $h(\overline{\alpha},\overline{t})$ относительно одновременной замены α_i на t_i.

Теперь, когда предварительные определения сформулированы, докажем симметричность h-чисел. Схема доказательства такая же как и раньше — по индукции. База индукции $n=1$. Проверка того, что $h_{\{0\}} = h_{\{1\}}$, как и ранее, не составляет труда.

Проведем шаг индукции. Допустим, что для всех эйлеровых сфер размерности меньше $n-1$ симметричность установлена. Докажем требуемое утверждение для сферы K размерности $n-1$. Нетрудно проверить следующее соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t_i} f_K(\overline{\alpha},\overline{t}) = \sum_{v\in K, c(v)=i} f_{\mathrm{link}(v)}(\alpha_1,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_n,t_1,\ldots,\widehat{t_i},\ldots,t_n).$$

Следовательно, суммируя по всем цветам, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_n}\right) f_K(\overline{\alpha},\overline{t}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in K,c(v)=i} f_{\mathrm{link}(v)}(\alpha_1,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_n,t_1,\ldots,\widehat{t_i},\ldots,t_n).$$

Применяя замену координат $\overline{\alpha}\mapsto\overline{\alpha}-\overline{t},\quad \overline{t}\mapsto\overline{t}$, получим соотношение для h-вектора

$$\partial h_K(\overline{\alpha},\overline{t}) = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial t_n}+\frac{\partial}{\partial \alpha_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial \alpha_n}\right) h_K(\overline{\alpha},\overline{t}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{v\in K,c(v)=i} h_{\mathrm{link}(v)}(\alpha_1,\ldots,\widehat{\alpha_i},\ldots,\alpha_n,t_1,\ldots,\widehat{t_i},\ldots,t_n).$$

Значит, по предположению индукции $\partial h_K(\overline{\alpha},\overline{t}) = \partial h_K(\overline{t},\overline{\alpha})$, так как линки вершин являются сбалансированными эйлеровыми сферами и ∂ симметричен по $\overline{\alpha}$ и $\overline{t}$. Таким образом $h(\overline{\alpha},\overline{t}) = h(\overline{t},\overline{\alpha}) + P(\overline{\alpha},\overline{t})$, где

$$\partial P = 0.$$

Кроме того, P имеет вид
$$P(\overline{\alpha},\overline{t}) = \sum_{T\subseteq[n]} p_T \overline{t}^T \overline{\alpha}^{[n]\setminus T}.$$
Можно убедиться, что многочлен, удовлетворяющий этим соотношениям, имеет вид $P(\overline{\alpha},\overline{t}) = c\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - t_i)$. В итоге получаем $h(\overline{\alpha},\overline{t}) = h(\overline{t},\overline{\alpha}) + c\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - t_i)$. Чтобы найти c, подставим $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = -1, \quad t_1 = \ldots = t_n = 0$. Получим

$h(\overline{-1},\overline{0}) = h(\overline{0},\overline{-1}) + c(-1)^n$,

$H(-1,0) = H(0,-1) + c(-1)^n$,

$(-1)^n = 1 - \chi(K) + c(-1)^n$,

$c = (-1)^n(\chi(K) - \chi(S^{n-1})) = 0$.

Шаг индукции доказан. ■

Теорема 2. *Пусть M — сбалансированное эйлерово многообразие размерности $n-1$. Тогда его обобщенные h-числа удовлетворяют соотношению*
$$h_T = h_{[n]\setminus T} + (\chi(M) - \chi(S^{n-1}))(-1)^{n-|T|}.$$

Доказательство. Линки всех вершин M — эйлеровы сферы, а значит к ним применимо предыдущее утверждение. Значит $h(\overline{\alpha},\overline{t}) = h(\overline{t},\overline{\alpha}) + c\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - t_i)$, где $c = (-1)^n(\chi(M) - \chi(S^{n-1}))$, как и раньше. Вычисляя коэффициент при $\overline{t}^T\overline{\alpha}^{[n]\setminus T}$ в правой и левой частях, получим требуемое соотношение. ■

4 Кольцо конечных частично-упорядоченных множеств

Определение 10. *Пусть A и B — частично упорядоченные множества.*

Порядковой суммой $A\oplus B$ называется структура ч.у. множества на объединении $A\sqcup B$, такая что $c \leqslant d$ в $A\oplus B$, если либо (а) $c\in A, d\in A$, $c\leqslant_A d$ (б) $c\in B, d\in B$, $c\leqslant_B d$ (в) $c\in A$, $d\in B$.

Порядковым произведением $A\otimes B$ называется структура ч.у. множества на декартовом произведении $A\times B$, такая что $(a,b)\leqslant(c,d)$ в $A\otimes B$, если либо (а) $a\leqslant_A c$ (б) $a=c$ и $b\leqslant_B d$.

Прямым произведением $A\times B$ называется структура ч.у. множества на декартовом произведении $A\times B$, такая что $(a,b)\leqslant(c,d)$ в $A\times B$, если $a\leqslant_A c$ и $b\leqslant_B d$.

Пример. Пусть $\mathbf{n}$ обозначает множество из n элементов с полным порядком. Тогда $\mathbf{n}\oplus\mathbf{m}$ есть вполне упорядоченное множество из $n+m$ элементов, а $\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}$ есть вполне упорядоченное множество из nm элементов.

Введем еще одно обозначение $B^1 = \mathbf{2}$. Булевым кубом называется ч.у. множество $B^n = \underbrace{B^1\times\ldots\times B^1}_{n}$. Это ч.у. множество изоморфно множеству подмножеств конечного множества $[n]$, упорядоченных по включению.

Определим кольцо $\mathcal{S}$ ч.у. множеств, аналогично тому, как это было сделано для симплициальных комплексов. Аддитивный базис кольца $\mathcal{S}$ состоит из конечных ч.у. множеств (с точностью до изоморфизма). Введем умножение на базисе с помощью порядковой суммы $A\cdot B = A\oplus B$ и доопределим его на всем $\mathcal{S}$ по линейности. Видно, что умножение получилось ассоциативное, но не коммутативное. Удобно также считать элементом $\mathcal{S}$ пустое ч.у.множество. Тогда оно является единицей кольца.

Известна следующая операция. Любому ч.у. множеству A можно поставить в соответствие симплициальный комплекс $\mathrm{ord}(A)$, определенный на множестве A. Его симплексами объявляются те и только те подмножества, которые образуют цепь в A.

Из всех определений напрямую следует утверждение.

Утверждение 6. $\mathrm{ord}(A\cdot B) = \mathrm{ord}(A) * \mathrm{ord}(B)$.

Утверждение 7. $d(\operatorname{ord} A) = \sum\limits_{v\in A} \operatorname{ord}(A_{>v}) * \operatorname{ord}(A_{<v})$,

где $A_{>v} = \{w \in A, w > v\}, A_{<v} = \{w \in A, w < v\}$.

Доказательство. $\operatorname{link}(v) = \{\sigma \in \operatorname{ord}(A), v \notin \sigma\} = \{\sigma_- \sqcup \sigma_+, \sigma_-$ - цепь в $A_{<v}, \sigma_+$ - цепь в $A_{>v}\} = \operatorname{ord}(A_{>v}) * \operatorname{ord}(A_{<v})$. ■

Ввиду этого утверждения, можно ввести дифференцирование на $\mathcal{S}$ по формуле $dA = \sum\limits_{v\in A} A_{<v} \cdot A_{>v}$.

Нетрудно проверить, что это дифференцирование удовлетворяет соотношению Ньютона-Лейбница $d(A \cdot B) = dA \cdot B + A \cdot dB$, а отображение $A \mapsto \operatorname{ord}(A)$ задает дифференциальный гомоморфизм кольца $(\mathcal{S}, d)$ в $(\mathcal{K}, d)$. Тем самым, получен дифференциальный гомоморфизм из $(\mathcal{S}, d)$ в $(\mathbb{Z}[t], \frac{\partial}{\partial t})$, заданный как композиция отображения ord и вычисления f-вектора $A \mapsto f_A = f_{\operatorname{ord}(A)}$. Коэффициент f-полинома, стоящий при t^k, определяет количество цепей A длины k.

Пример. Легко видеть, что $\operatorname{ord} \mathbf{n} = \Delta_{n-1}$, т.к. все подмножества вполне упорядоченного множества являются цепями. Значит $f_{\mathbf{n}} = (1+t)^n$.

Построим теперь аналог порядкового произведения на симплициальных комплексах, то есть такую операцию $\otimes$ на $\mathcal{K}$, что $\operatorname{ord}(A \otimes B) = \operatorname{ord}(A) \otimes \operatorname{ord}(B)$. Пусть K_1, K_2 — симплициальные комплексы. Построим новый симплициальный комплекс $K = K_1 \otimes K_2$ на декартовом произведении $V(K_1)\times V(K_2)$. Обозначим через $p_{1,2}$ канонические проекции $V(K)$ на $V(K_1)$ и $V(K_2)$. Тогда система симплексов K определена по правилу $\sigma \in K$ тогда и только тогда, когда $p_1(\sigma) \in K_1$ и для всех вершин $v \in V(K_1)$, $p_2(p_1^{-1}(v) \cap \sigma) \in K_2$.

Утверждение 8. $\operatorname{ord}(A \otimes B) = \operatorname{ord}(A) \otimes \operatorname{ord}(B)$.

Доказательство. Симплексы $\operatorname{ord}(A\otimes B)$ — это цепи $\sigma = (a_1, b_1) < (a_2, b_2) < \ldots < (a_m, b_m)$, где

$a_1 = \ldots = a_{n_1} < a_{n_1+1} = \ldots = a_{n_1+n_2} < \ldots < a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} = \ldots = a_{n_1+\ldots+n_k}$,

$b_1 < \ldots b_{n_1}$,

$b_{n_1+1} < \ldots < b_{n_1+n_2}$,

$\ldots$

$b_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} < \ldots < b_{n_1+\ldots+n_k}$.

Тогда $p_1(\sigma) = \{a_1, a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}\}$ образует цепь в A. Также выполнено

$$p_2(p_1^{-1}(a)) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } a \notin p(\sigma), \\ \{b_{n_1+\ldots+n_l+1}, \ldots b_{n_1+\ldots+n_{l+1}}\}, & \text{если } a = a_{n_1+\ldots+n_l+1}. \end{cases}$$

— цепи в B. То есть установлено соответствие цепей в $A \otimes B$ и симплексов $\operatorname{ord}(A) \otimes \operatorname{ord}(B)$. ■

Утверждение 9. *Пусть K_1 и K_2 - симплициальные комплексы. Тогда $f_{K_1\otimes K_2}(t) = f_{K_1}(f_{K_2}(t)-1)$ — результат подстановки $f_{K_2}(t) - 1$ в f_{K_1}.*

Доказательство.

$$f_{K_1\otimes K_2}(t) = \sum_{\rho\in K_1\otimes K_2} t^{|\rho|} = \sum_{\sigma\in K_1, \tau_1,\ldots,\tau_{|\sigma|}\in K_2, \tau_i\neq\emptyset} t^{|\tau_1|+\ldots+|\tau_{|\sigma|}|} =$$

$$= \sum_{\sigma\in K_1} \left(\sum_{\tau_1,\ldots,\tau_{|\sigma|}\in K_2, \tau_i\neq\emptyset} t^{|\tau_1|+\ldots+|\tau_{|\sigma|}|} \right) = \sum_{\sigma\in K_1} \left(\sum_{\tau\in K_2, \tau\neq\emptyset} t^{|\tau|} \right)^{|\sigma|} =$$

$$= \sum_{\sigma\in K_1} (f_{K_2}(t) - 1)^{|\sigma|} = f_{K_1}(f_{K_2}(t) - 1).$$

■

Следствие: для ч.у. множеств выполнено $f_{A\otimes B}(t) = f_A(f_B(t) - 1)$.

Можно дать эквивалентное определение порядковому произведению комплексов $K = K_1 \otimes K_2$. Пусть $|K_1| = m$. Рассмотрим комплекс $L = K_2^{*m}$ — джойн m копий K_2. Для каждого симплекса $\sigma \in K_1$ определим подкомплекс $L_\sigma = \emptyset * \ldots * K_2 * \ldots * \emptyset \subset L$, где на местах из σ стоят копии K_2, а на всех остальных - пустые множества. Тогда нетрудно проверить, что $K_1 \otimes K_2 = \bigcup\limits_{\sigma \in K_1} L_\sigma \subseteq L$. Связь этой конструкции с K-степенью будет установлена ниже.

Замечание: порядковое произведение комплексов топологически устроено достаточно плохо. Даже если K_1 и K_2 - многообразия, то $K_1 \otimes K_2$ может не быть многообразием. Но топология $K_1 \otimes K_2$ зависит только от топологии K_2 и комбинаторики K_1, что следует из эквивалентного определения, т.к. джойн является топологической операцией.

5 Вычисление f- и h-векторов прямых произведений

Как изменяются f-векторы при вычислении порядковых сумм и порядковых произведений мы выяснили в предыдущем разделе. Осталось рассмотреть еще одну важную операцию на ч.у. множествах — прямое произведение. Далее мы будем обозначать p_1, p_2 — естественные проекции на первый и второй множители произведения соответственно.

Обозначим через $\mathcal{L} = \mathbb{Q}[t]$ векторное пространство многочленов от одной переменной $\mathcal{L} = \mathbb{Q}^\infty$. Будем считать, что в $\mathcal{L}$ отмечен базис $1, t, t^2, t^3, \ldots$. Тогда f-полином любого ч.у. множества лежит в $\mathcal{L}$, $\quad f_A = (f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, 0, \ldots)$.

Утверждение 10. *Существует билинейный функционал $w : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ такой, что для любых двух ч.у. множеств A и B выполнено $f_{A\times B} = w(f_A, f_B)$.*

Доказательство. Определим B_{nm} как $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$. Скажем, что цепь σ плотна в B_{nm}, если $p_{1,2} : B_{nm} \to \mathbf{n}, \mathbf{m}$ сюръективны. Обозначим через $a_{nm}(t)$ производящую функцию плотных цепей $\sigma \in B_{nm}$. Иными словами $a_{nm}(t) = \sum\limits_{\substack{\sigma \in B_{nm} \\ p_{1,2}(\sigma) = \mathbf{n}, \mathbf{m}}} t^{|\sigma|}$. Рассмотрим функционал w, заданный в отмеченном базисе формулой

$$w(v, u) = \sum_{i,j>0} v_i u_j a_{ij}(t) + v_0 u_0. \tag{1}$$

Тогда выполнено

$$f_{A\times B} = \sum_{\sigma \in A\times B} t^{|\sigma|} = \sum_{\substack{\sigma_1 \in A, \sigma_2 \in B \\ \sigma \text{ плотна в } \sigma_1 \times \sigma_2 \subset A \times B}} t^{|\sigma|} = \sum_{\substack{\sigma_1 \in A, \\ \sigma_2 \in B}} \sum_{\substack{\sigma \text{ плотна в} \\ B_{|\sigma_1||\sigma_2|}}} t^{|\sigma|} =$$
$$= \sum_{i,j>0} f_i(A) f_j(B) a_{ij}(t) + f_0(A) f_0(B) = w(f_A, f_B).$$

Очевидно, что функционал w билинейный. ■

Утверждение 11. *Билинейный функционал w задает на пространстве $\mathcal{L}$ коммутативное ассоциативное умножение. Кольцо $(\mathcal{L}, w)$ содержит единицу.*

Доказательство. Требуется проверить свойства $w(w(v, u), y) = w(v, w(u, y))$ и $w(v, u) = w(u, v)$ для всех векторов $v, u, y \in \mathcal{L}$. В силу линейности достаточно доказать эти соотношения для векторов из полного подмножества $\mathcal{L}$. В качестве такого подмножества возьмем f-векторы ч.у. множеств. Но для них $w(w(f_A, f_B), f_C) = w(f_{A\times B}, f_C) = f_{A\times B\times C} = w(f_A, f_{B\times C}) = w(f_a, w(f_B, f_C))$ и аналогично $w(f_A, f_B) = f_{A\times B} = f_{B\times A} = w(f_B, f_A)$. Впрочем, коммутативность видна прямо из формулы (1).

По тем же соображениям единицей кольца является $e = f_{\mathbf{1}} = 1 + t$. Действительно на f-векторах ч.у. множеств свойство единицы выполнено $w(e, f_A) = f_{\mathbf{1}\times A} = f_A$. На остальных векторах оно выполнено по линейности. ■

Зададим оператор B на $\mathcal{L}$ с помощью матрицы $\{b_{ij}\}_{i,j \geqslant 0}$ в отмеченном базисе. Элементы матрицы $b_{00} = 1$, $b_{0j} = b_{i0} = 0$, $b_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} (-1)^k \binom{i}{k} (i-k)^j$ при $i, j \geqslant 1$. Оператор B обратим, т.к. его ограничения на конечномерные пространства $\langle 1, t, \ldots, t^k \rangle$ задаются верхнетреугольными матрицами, а на диагонали стоят ненулевые числа.

Известен следующий факт: $f_{K'} = Bf_K$, где K - симплициальный комплекс, а K' — его барицентрическое подразбиение (см.[2]).

Введем также оператор C. В выбранном базисе он задается, как умножение многочлена на $(1+t)$. Этот оператор обладает следующим свойством $f_{\operatorname{cone} K} = Cf_K$, где K - симплициальный комплекс, а $\operatorname{cone} K$ — конус над комплексом, то есть джойн K и точки.

Теорема 3. *Для любых $v, u \in \mathcal{L}$ выполнено $CB(v \cdot u) = w(CBv, CBu)$, где $v \cdot u$ понимается как произведение многочленов. Иными словами, оператор CB задает кольцевой гомоморфизм кольца многочленов $(\mathcal{L}, \cdot)$ в кольцо $(\mathcal{L}, w)$.*

Доказательство. Пусть K — симплициальный комплекс. Напомним, что через $\operatorname{pos}(K)$ мы обозначаем ч.у. множество его симплексов по включению. Мы имеем выражение $\operatorname{ord} \operatorname{pos}(K) = \operatorname{cone} K'$. Конус возникает в результате добавления пустой грани. Для любых симплициальных комплексов K и L имеем

$CB(f_K \cdot f_L) = CBf_{K*L} = Cf_{(K*L)'} = f_{\operatorname{cone}(K*L)'} = f_{\operatorname{ord} \operatorname{pos}(K*L)} = f_{\operatorname{ord}(\operatorname{pos} K \times \operatorname{pos} L)} = f_{\operatorname{pos}(K) \times \operatorname{pos}(L)} = w(f_{\operatorname{pos}(K)}, f_{\operatorname{pos}(L)}) = w(f_{\operatorname{ord} \operatorname{pos}(K)}, f_{\operatorname{ord} \operatorname{pos}(L)}) = w(f_{\operatorname{cone} K'}, f_{\operatorname{cone} L'}) = w(CBf_K, CBf_L)$.

Для векторов, не являющихся f-векторами симплициальных комплексов, доказываемое соотношение выполнено по линейности. Нетрудно также проверить, что единица кольца многочленов 1 переходит под действием CB в единицу $e = 1 + t$ кольца $(\mathcal{L}, w)$. ■

Замечание. f-векторы симплициальных комплексов и ч.у. множеств действительно линейно плотны в $\mathcal{L}$. Достаточно взять в качестве базиса f-векторы симплексов Δ_{n-1} и конечных линейно-упорядоченных множеств $\mathbf{n}$ соответственно.

Отметим еще несколько соотношений: $w(1, 1) = 1$, $w(1, tQ(t)) = 0$ для любого многочлена $Q(t)$. Они оба следуют из того, что $\emptyset \times A = \emptyset$ для всех ч.у. множеств A и $f_\emptyset = 1$. Теорему 3 вместе с этими соотношениями можно применять для подсчета f-векторов произведений ч.у.множеств. Разделим многочлены p_1 и p_2 с остатком на $t + 1$.

$$
\begin{gathered}
w(p_1(t), p_2(t)) = w(p_1(-1) + (t+1)q_1(t), p_2(-1) + (t+1)q_2(t)) = \\
= w(p_1(-1), p_2(-1)) + w(p_1(-1), (t+1)q_2(t)) + w((t+1)q_1(t), p_2(-1)) + w((t+1)q_1(t), (t+1)q_2(t)) = \\
= p_1(-1)p_2(-1) + p_1(-1)q_2(0) + q_1(0)p_2(-1) + w(Cq_1, Cq_2) = \\
= p_1(0)p_2(-1) + p_1(-1)p_2(0) - p_1(-1)p_2(-1) + w(CBB^{-1}q_1, CBB^{-1}q_2) = \\
= p_1(0)p_2(-1) + p_1(-1)p_2(0) - p_1(-1)p_2(-1) + CB((B^{-1}q_1) \cdot (B^{-1}q_2)).
\end{gathered}
$$

Можно также рассматривать билинейную форму w как оператор при фиксированном первом аргументе. Следующие утверждения описывают структуру этого оператора. Введем для него обозначения $w_v = w(v, \cdot) \in End(\mathcal{L})$ для $v \in \mathcal{L}$, а $w_A = w_{f_A}$ для ч.у. множества A.

Лемма 1. $w_{v+y} = w_v + w_y, \quad w_{A \times B} = w_A \circ w_B = w_B \circ w_A.$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе $w_A(w_B(u)) = w(f_A, w(f_B, u)) = w(w(f_A, f_B), u) = w(f_{A \times B}, u) = w_{A \times B}(u)$ для всех u. Другое равенство аналогично. ■

Лемма 2. $w_{B^1} = t(1+t)\frac{d}{dt} + id.$

Доказательство. Мы докажем равенство операторов на векторах f_A для некоторого ч.у. множества A, так как они полны в $\mathcal{L}$. Имеем $w_{B^1}(f_A) = f_{B^1 \times A}$. Цепи в $B^1 \times A$ имеют вид $(0, a_1) < \ldots (0, a_l) < (1, b_1) < \ldots < (1, b_m)$, где $a_1 < \ldots < a_l$ и $b_1 < \ldots < b_m$ — цепи в A, и $a_l \leqslant b_1$. Разобьем множество цепей $B^1 \times A$ на подмножества M_1 и M_2. К первому отнесем те, которые не содержат 0 на первом месте (то есть $l = 0$), ко второму — все остальные. Посчитаем отдельно производящие функции первого и второго множества. Первое множество задается цепями $b_1 < \ldots < b_m$, поэтому $f_{M_1} = f_A$. Запишем для второго множества

$$f_{M_2}(t) = \sum_{\substack{\sigma_{1,2}\text{цепи}A, \sigma_1 \neq \emptyset \\ \max(\sigma_1) \leqslant \min(\sigma_2) \\ v = max(\sigma_1), \sigma_1' = \sigma_1 \setminus v}} t^{|\sigma_1|+|\sigma_2|} = \sum_{v \in A, \sigma_1' < v, \sigma_2 \geqslant v} t^{1+|\sigma_1'|+|\sigma_2|} =$$

$$= \sum_{v \in A} t \cdot f_{A_{<v}}(t) \cdot f_{v \oplus A_{>v}}(t) = \sum_{v \in A} t \cdot f_{A_{<v}}(t) \cdot f_{pt}(t) \cdot f_{A_{>v}}(t) =$$

$$= \sum_{v \in A} t(1+t) \cdot f_{A_{<v}}(t) \cdot f_{A_{>v}}(t) = t(1+t) f_{dA}(t) = t(t+1) \frac{d}{dt} f_A(t).$$

В итоге получаем $f_{B^1 \times A} = f_{M_1}(t) + f_{M_2}(t) = f_A(t) + t(t+1)\frac{d}{dt} f_A(t)$. Что и завершает доказательство. ■

Обозначим оператор $t(t+1)\frac{d}{dt}$ через θ.

Теорема 4. *Пусть, как и ранее, B — оператор барицентрического подразбиения, а C — оператор умножения на $t+1$. Тогда $w_{CBf(t)} = f(\theta)$.*

Доказательство. В силу линейности оператора w по индексу и линейности операторов B и C достаточно доказать соотношение только для базисных векторов. Пусть $v_i(t) = (t+1)^i$, для $i = 0, 1, \ldots$. Тогда $CBv_i(t) = CBf_{\Delta_{i-1}}(t) = f_{C\Delta'_{i-1}}(t) = f_{B^i}(t)$. Значит $w_{CBv_i} = w_{B^i} = w_{B^1 \times \ldots \times B^1} = w^i_{B^1} = (id + \theta)^i = v_i(\theta)$. Так как векторы $v_i(t)$ образуют базис в пространстве многочленов, то утверждение доказано для всех $f \in \mathcal{L}$. ■

Из вышесказанного можно вывести следующие соотношения.

Утверждение 12.

$$w(CBv, u) = v(\theta)u(t),$$

$$w(Cv, u) = [B^{-1}v](\theta)u(t),$$

$$CB(v(t) \cdot u(t)) = v(\theta)[CBu](t).$$

Далее мы сформулируем ряд утверждений, которые следуют из предыдущих и описывают случай f-полинома от двух переменных. Пусть $\widetilde{\mathcal{L}}$ — векторное пространство многочленов от двух переменных $\mathbb{Q}[\alpha, t]$ с отмеченным базисом из мономов.

Утверждение 13. *Существует билинейная операция $\widetilde{w} : \widetilde{\mathcal{L}} \otimes \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ такая, что для любых двух ч.у. множеств A, B выполнено*

$$F_{A \times B}(\alpha, t) = \widetilde{w}(F_A(\alpha, t), F_B(\alpha, t)).$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение пространства $\widetilde{\mathcal{L}}$ в сумму пространств однородных многочленов $\widetilde{\mathcal{L}} = \bigoplus\limits_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{L}}_i$. Зададим $\widetilde{w}$ на однородных многочленах $P^{(n)} \in \widetilde{\mathcal{L}}_n$ и $Q^{(m)} \in \widetilde{\mathcal{L}}_m$ по формуле $\widetilde{w}(P^{(n)}(\alpha, t), Q^{(m)}(\alpha, t)) = \alpha^{n+m-1} \cdot w(P^{(n)}(1, t), Q^{(m)}(1, t)) \left(\frac{t}{\alpha}\right)$. Иными словами, на однородных компонентах операция задана так же, как w на $\mathcal{L}$. Требуемое утверждение теперь доказано автоматически. ■

Можно также сформулировать аналог утверждения 3 для пространства $\widetilde{\mathcal{L}}$. Пусть оператор $\widetilde{B}$ действует на $\widetilde{\mathcal{L}}_n$ таким образом $\widetilde{B}P(\alpha, t) = \alpha^n (BP(1, t)) \left(\frac{t}{\alpha}\right)$. А оператор C — это умножение на многочлен $(\alpha + t)$.

Из всех определений следует утверждение.

Утверждение 14. *Оператор CB задает кольцевой гомоморфизм кольца многочленов $(\widetilde{\mathcal{L}}, \cdot)$ в кольцо $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{w})$.*

Замечание. Оба кольца $(\mathcal{L}, w)$ и $(\widetilde{\mathcal{L}}, \widetilde{w})$ имеют градуировку, равную $deg\ P\ -\ 1$.

6 Ранговые ч.у. множества.

Определение 11. *Целочисленная функция r на ч.у. множестве A называется рангом, если для любых двух сравнимых элементов $a, b \in A$, $a \leqslant b$ число элементов в любой насыщенной цепи $\{a = c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b\}$ равно в точности $k = r(b) - r(a) + 1$. Также будем считать, что у ч.у.множества есть единственный минимальный элемент $\overline{0}$ и на нем $r(\overline{0}) = 0$. Тогда ранг определен однозначно, если он существует, и обозначается* rk. *Ч.у. множества, обладающие рангом, называются ранговыми.*

Пример 1. Множество симплексов K по включению образует ранговое ч.у.множество. Ранг задается размерностью симплекса.

Пример 2. Если порядковый комплекс $\operatorname{ord} A$ рангового ч.у. множества является чистым, то он сбалансирован. Покрасим вершины $\operatorname{ord} A$ в ранги соответствующих элементов. Тогда флаговыми f-числами рангового ч.у. множества называются флаговые f-числа соответствующего симплициального комплекса.

Пример 3. Если у двух ч.у.множеств заданы ранги, то на их прямом произведении также можно определить ранг $\operatorname{rk}(a, b) = \operatorname{rk} a + \operatorname{rk} b$.

Введем пространство $\mathcal{L}'$ флаговых f-векторов как пространство с базисом $\{e_S\}$ для всех конечных подмножеств S неотрицательных целых чисел. Тогда флаговый f-вектор ч.у.множества (комплекса) — это, по определению, $f'(A) = \sum\limits_S f_S e_S \in \mathcal{L}'$ (заметим, что $f_S = 0$, если $S \nsubseteq \{0, 1, \ldots, \operatorname{rk} A\}$, а значит, определение корректно). Введем операцию $w' : \mathcal{L}' \otimes \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'$ заданную в координатах по формуле

$$w'(f, g)_S = \sum_{\substack{T,R-\text{мультимножества} \\ T+R=S}} f_{\widehat{T}} \cdot g_{\widehat{R}},$$

где T, R — мультимножества неотрицательных целых чисел мощности $n = |S|$, упорядоченные по возрастанию, $S + T$ — покомпонентная сумма $\{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n\} + \{j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_n\} = \{(i_1 + j_1) \leqslant \ldots \leqslant (i_n + j_n)\}$, а $\widehat{T}$ и $\widehat{R}$ — множества, полученные из соответствующих мультимножеств забыванием кратностей.

Утверждение 15.

$$f'(A \times B) = w'(f'(A), f'(B)).$$

Доказательство. Пусть $S = \{l_1, \ldots, l_n\}$. Тогда $w'(f'(A), f'(B))_S$ равно количеству цепей вида $(i_1, j_1) < \ldots < (i_n, j_n)$ в $A \times B$ таких, что $\operatorname{rk}\ i_k\ +\ \operatorname{rk}\ j_k\ =\ l_k$. Просуммировав по всевозможным числовым мультимножествам $\{\operatorname{rk} i_1, \ldots, \operatorname{rk} i_n\}$ и $\{\operatorname{rk} j_1, \ldots, \operatorname{rk} j_n\}$, получим требуемое. ■

7 Связь с декартовым произведением комплексов.

Пусть K, L — симплициальные комплексы с фиксированной нумерацией вершин. Тогда определено их декартово произведение $K \times L$. Подмножество $\sigma = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_l, j_l)\}$ вершин является симплексом, если $\{i_1, \ldots, i_l\}$ — симплекс в K, $\{j_1, \ldots, j_l\}$ — симплекс в L, и кроме того, $i_k \geqslant i_m \Leftrightarrow j_k \geqslant j_m$ для всех $k, m = 1, \ldots, l$.

Теорема 5. *Для любых двух симплициальных комплексов K, L и любых двух нумераций их вершин выполнены условия*

$$f_{K\times L} = w(f_K, f_L),$$

$$F_{K\times L} = \widetilde{w}(F_K, F_L).$$

Доказательство. Занумеруем вершины произвольно. Заметим, что нумерация вершин комплексов K и L задает на множестве вершин $K \times L$ структуру частично упорядоченного множества B_{kl}. Определение декартова произведения симплициальных комплексов может быть переформулировано следующим образом $\sigma \subset K \times L$ является симплексом тогда и только тогда, когда σ — цепь в B_{kl} и $p_{1,2}(\sigma)$ являются симплексами в соответствующих комплексах. Далее

$$\sum_{\substack{A=\{(i_1,j_1),\ldots,(i_l,j_l)\}\\ p_1(A)=\sigma\in K, p_2(A)=\tau\in L}} t^{|A|} = \sum_{\substack{\sigma\in K\\ \tau\in L}} \sum_{A \text{ плотна в } \sigma\times\tau} t^{|A|} = \sum_{i,j} f_i(K) f_j(L) a_{ij}(t) = w(f_K, f_L).$$

Для $\widetilde{w}$ утверждение доказывается аналогично. ■

Рассмотрим теперь сбалансированные симплициальные комплексы. Пусть вершины K правильно покрашены в цвета $0, 1, \ldots, k-1$, а вершины L — в цвета $0, 1, \ldots, l-1$. Занумеруем вершины этих комплексов по правилу: вначале нумеруем все вершины цвета 0, потом все вершины цвета 1 и так далее. По двум занумерованным комплексам построим их декартово произведение. Заметим, что структура симплексов декартова произведения в данном случае не зависит от произвола в нумерации. Действительно, триангуляция $\sigma \times \tau$ зависит только от порядка нумерации вершин симплексов σ и τ. Но этот порядок совпадает с порядком цветов по построению, то есть от нумерации не зависит. Тем самым корректно определено декартово произведение сбалансированных симплициальных комплексов. Нетрудно убедиться, что на декартовом произведении также можно ввести правильную раскраску: вершину (v, w) нужно покрасить в $c(v) + c(w)$. Раскраска будет правильной, следовательно $K \times L$ — сбалансирован.

Рассуждая аналогично предыдущему утверждению, можно получить следующий факт.

Утверждение 16. *Для сбалансированных комплексов K, L выполнено*

$$f'(K \times L) = w'(f'(K), f'(L)).$$

8 K-степени и момент-угол комплексы.

Определение 12. *Пусть K — симплициальный комплекс на m вершинах, а (X, A) — топологическая пара. Для каждого симплекса $\sigma \in K$ определим подмножество $(X, A)^\sigma \subset X^m$, $(X, A)^\sigma = \{(x_1, \ldots, x_m) \in X^m, x_i \in A$, если $i \notin \sigma\}$. Тогда K-степень это топологическое пространство*

$$(X, A)^K = \bigcup_{\sigma \in K} (X, A)^\sigma \subseteq X^m.$$

В K-степень канонически вложено A^m.

Если (X, A) — конечная клеточная пара, то на K-степени индуцируется клеточная структура из X^m. Определим для клеточного разбиения аналог f-полинома $C_X(x) = \sum\limits_{i=0}^{dimX} c_i x^i$, где c_i равно числу клеток размерности i разбиения.

Утверждение 17. *Для разбиения $(X, A)^K$, индуцированного разбиением пары (X, A) выполняется*

$$C_{(X,A)^K}(x) = F_K(C_A(x), C_X(x) - C_A(x)) \cdot C_A(x)^{m-n},$$

где F_K — f-полином от двух переменных симплициального комплекса K, $m = |K|$, $n = dimK + 1$.

Доказательство. Разобьем множество клеток $(X, A)^K$ на непересекающиеся классы M_σ. Клетка $c = c_1 \times \ldots \times c_m$ лежит в M_σ, если c_i является клеткой из A при $i \notin \sigma$ и c_i является клеткой X, не лежащей в A при $i \in \sigma$. Тогда производящая функция размерности клеток из M_σ имеет вид $(C_X(x)-C_A(x))^{|\sigma|}C_A(x)^{m-|\sigma|}$. Производящая функция всех клеток $(X,A)^K$ равна сумме таких выражений по всем симплексам

$$C_{(X,A)^K}(x)=\sum_{\sigma\in K}(C_X(x)-C_A(x))^{|\sigma|}C_A(x)^{m-|\sigma|}=$$
$$=\sum_{\sigma\in K}(C_X(x)-C_A(x))^{|\sigma|}C_A(x)^{n-|\sigma|}C_A(x)^{m-n}=F_K(C_A(x),C_X(x)-C_A(x))\cdot C_A(x)^{m-n}.$$

■

K-степень является функтором на категории пар при фиксированном комплексе K. Паре (X,A) он сопоставляет пару $((X,A)^K,A^m)$. Обозначим этот функтор через $\widehat{K}$.

Утверждение 18. *Для композиции функторов имеет место равенство*

$$\widehat{K}_1\circ\widehat{K}_2=\widehat{K_1\otimes K_2},$$

где $K_1\otimes K_2$ — порядковое произведение комплексов, введенное ранее.

Доказательство. Напомним, что симплексами комплекса $K_1\otimes K_2$ являются все подмножества $\sigma\subset V(K_1)\times V(K_2)=\{(i_k,j_k)\}$, такие что $\sigma_1=p(\sigma)$ — симплекс в K_1, и для любого i множество $\{j_k\}$ является симплексом K_2, если $(i,j_k)\in\sigma$. То есть задать симплекс в $K_1\otimes K_2$ можно с помощью симплекса $\{i_1,\dots,i_k\}=\sigma_1\in K_1$ и набора симплексов $\sigma_2^{i_1},\dots,\sigma_2^{i_k}$.

Оба пространства $((X,A)^{K_2},A^{m_2})^{K_1}$ и $(X,A)^{K_1\otimes K_2}$ являются подмножествами $X^{m_1\times m_2}$. Рассмотрим точку $x=(x_{11},\dots,x_{1m_1},\dots,x_{m_21},\dots,x_{m_2m_1})\in X^{m_1\times m_2}$. Тогда, пользуясь определениями, получаем $x\in(X,A)^{K_1\otimes K_2}$ эквивалентно существованию $\sigma\in K_1\otimes K_2$, такому что $x_{ij}\in A$, если $(i,j)\notin\sigma$. Это в свою очередь эквивалентно существованию $\sigma_1=\{i_1,\dots,i_k\}\in K_1$ и $\sigma_2^{i_1},\dots,\sigma_2^{i_k}\in K_2$ таких что $x_{ij}\in A$, если либо $i\notin\sigma_1$ либо $i\in\sigma_1$ и $j\notin\sigma_2^i$. Эквивалентно: существует $\sigma_1\in K_1$ такой что при любом фиксированном $i\in\sigma_1$ существует $\sigma_2^i\in K_2$ со свойством $(x_{i1},\dots,x_{im_2})\in(X,A)^{\sigma_2^i}$, а при любом фиксированном $i\notin\sigma_1$ выполнено $(x_{i1},\dots,x_{im_2})\in A^{m_2}$. Эквивалентно: существует $\sigma_1\in K_1$ такой, что при любом $i\in\sigma_1$ набор $(x_{i1},\dots,x_{im_2})\in(X,A)^{K_2}$, а при $i\notin\sigma_1$ $(x_{i1},\dots,x_{im_2})\in A^{m_2}$. Что в свою очередь означает, что $x\in((X,A)^{K_2},A^{m_2})^{K_1}$. Что и требовалось доказать. ■

Определим K-степень специального вида.

Определение 13. *Момент-угол комплексом для симплициального комплекса K называется пространство $\mathcal{Z}_K=(D^2,S^1)^K$. Далее мы считаем, что (D^2,S^1) представлена единичным кругом и окружностью в $\mathbb{C}$. Таким образом, комплекс $\mathcal{Z}_K$ оказывается вложенным в $\mathbb{C}^m$.*

Комплекс $\mathcal{Z}_K$ переходит в себя при действии тора T^m на $\mathbb{C}^m$. Значит, на нем тоже определено покоординатное действие m-мерного тора. У этого действия есть стационарные подгруппы. Для каждого симплекса $\sigma\in K$ определим координатную подгруппу тора $T^\sigma\subset T^m$. Она оставляет неподвижными точки вида $(x_1,\dots,x_m)$, где $x_i=0$ если $i\in\sigma$. Других стационарных подгрупп нет.

Определение 14. *Числом Бухштабера называется наибольшая размерность $s(K)$ торических подгрупп группы T^m действующих на $\mathcal{Z}_K$ свободно.*

Цель дальнейших построений — определить инвариант $s(K)$ в других терминах.

9 Характеристические пары

Определение 15. *Пусть $\mathbb{Z}^l$ — целочисленная решетка размерности l. Скажем что набор векторов $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{Z}^l$ унимодулярен, если отображение $p:\mathbb{Z}^k\to\mathbb{Z}^l$, заданное на базисе формулой $p(e_i)=v_i$, является изоморфизмом на прямое слагаемое в $\mathbb{Z}^l$. Эквивалентно: набор $v_1,\dots,v_k$ можно дополнить до базиса решетки $\mathbb{Z}^l$.*

Характеристическим отображением симплициального комплекса K на множестве $[m]$ в решетку $\mathbb{Z}^l$ называется такое отображение $\Lambda : [m] \to \mathbb{Z}^l$, $i \mapsto v_i$, что для любого симплекса $\sigma \in K$ набор векторов $\{v_i, i \in \sigma\}$ унимодулярен.

Характеристической парой называется пара (K, Λ), где Λ — характеристическое отображение комплекса K. Число l — размерность решетки — мы будем называть размерностью пары.

Ясно, что не для любого l существует характеристическое отображение K в $\mathbb{Z}^l$. Например, если l меньше комбинаторной размерности симплекса, то такого отображения заведомо не существует. Но для $l = m$ отображение без труда строится: $\Lambda(i) = e_i$, где e_i базисные векторы решетки.

Утверждение 19. *Пусть $r(K)$ — наименьшая размерность решетки, для которой существует характеристическое отображение. Тогда*

$$s(K) = m - r(K).$$

Доказательство. Пусть $H \subset T^m$ является торической подгруппой, действующей свободно, $H \cong T^r$. Рассмотрим отображение торов $T^m \to T^m/H \cong T^{m-r}$. Оно задано правилом

$$\widetilde{\Lambda} : (t_1, \ldots, t_m) \mapsto (t_1^{\lambda_{1,1}} \ldots t_m^{\lambda_{1,m}}, \ldots, t_1^{\lambda_{m-r,1}} \ldots t_m^{\lambda_{m-r,m}}),$$

где матрица

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \ldots & \lambda_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m-s,1} & \ldots & \lambda_{m-s,m} \end{pmatrix}$$

задает соответствующее отображение решеток $\Lambda : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^{m-r}$. Тогда отображение $i \mapsto \Lambda e_i$, которое сопоставляет каждой вершине комплекса соответствующий столбец матрицы будет характеристическим. Докажем это.

Группа H действует свободно тогда и только тогда, когда она пересекается с любым стабилизатором T^σ лишь по единице. Значит, $\widetilde{\Lambda}|_{T^\sigma} : T^\sigma \to T^{m-r}$ инъективен. Соответствующее ему отображение решеток задается матрицей Λ_σ, полученной из Λ взятием столбцов с номерами из σ. Это отображение будет мономорфизмом на прямое слагаемое, а, значит, столбцы с номерами из σ матрицы Λ образуют унимодулярный набор.

Обратными рассуждениями можно показать, что сюръективное характеристическое отображение в $\mathbb{Z}^{m-r}$ задает отображение торов $\widetilde{\Lambda} : T^m \to T^{m-r}$, которое инъективно на координатных подторах $T^\sigma \subset T^m$, соответствующих симплексам комплекса. Группа $Ker\widetilde{\Lambda}$ не пересекается со стабилизаторами, а, значит, действует свободно на момент-угол комплексе.

Тем самым установлено соответствие между свободно действующими подгруппами ранга r и характеристическими отображениями в $\mathbb{Z}^{m-r}$, откуда и следует утверждение. ■

Определим хроматическое число симплициального комплекса $\gamma(K)$ как наименьшее число цветов, необходимое для раскраски вершин K правильным образом. Легко получить следующие оценки.

Утверждение 20.

$$m - \gamma(K) \leqslant s(K) \leqslant m - dim(K) - 1.$$

Доказательство. Оценка $s(K) \leqslant m - dim(K)$ означает, что
не существует характеристическое отображение в решетку, размерность которой меньше, чем размерность комплекса плюс один.

Пусть задана правильная раскраска $c : V(K) \to \{1, \ldots, \gamma\}$. Построим отображение $\Lambda : V(K) \to \mathbb{Z}^\gamma$ по формуле $\Lambda(v) = e_{c(v)}$. Нетрудно проверить, что это отображение будет характеристическим, откуда и следует нижняя оценка для s. ■

Определение 16. *Симплициальным отображением симплициального комплекса K в комплекс L называется отображение множеств вершин $f : V(K) \to V(L)$ такое, что $f(\sigma) \in L$, если $\sigma \in K$.*

Невырожденным симплициальным отображением называется симплициальное отображение, обладающее свойством $|f(\sigma)| = |\sigma|$ для всех симплексов $\sigma \in K$, то есть f инъективно на каждом симплексе. Также такие отображения называются разветвленными комбинаторными накрытиями.

Введем категорию **ChP**, объектами которой объявим все характеристические пары (K, Λ). Морфизмом из пары (K_1, Λ_1) в пару (K_2, Λ_2) назовем невырожденное отображение $f : K_1 \to K_2$, такое что $\Lambda_1 = \Lambda_2 \circ f$. Видно, в частности, что морфизмы не меняют размерность пары.

Введем семейство бесконечных $(l-1)$-мерных симплициальных комплексов U_l, $l = 1, 2, \ldots$. Вершинами U_l будут примитивные целочисленные векторы $v \in \mathbb{Z}^l$, а симплексы определяются всевозможными унимодулярными наборами векторов. Определим на U_l характеристическое отображение $\eta : U_l \subset \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}^l$, $\eta = id$. Тогда из любой пары размерности l есть единственный морфизм в (U_l, η). Такой морфизм попросту совпадает с характеристическим отображением Λ пары. Теперь можно переформулировать утверждение 19 таким образом: наименьшее l для которого существует невырожденное отображение комплекса K в U_l равно $m - s(K)$. Поэтому для изучения числа Бухштабера можно исследовать препятствия, не позволяющие невырожденно отображать K в U_l. Для удобства будем пользоваться обозначением $r(K) = m - s(K)$.

Скажем, что два комплекса эквивалентны $K \sim L$, если существуют невырожденные отображения K в L и наоборот.

Утверждение 21. *Если существует невырожденное отображение $K \to N$ то $\gamma(K) \leqslant \gamma(N)$ и $s(K) \geqslant s(N)$. Как следствие, число s и хроматическое число являются инвариантами класса эквивалентности.*

Доказательство. Докажем более общий факт. Пусть L_i произвольная серия симплициальных комплексов, такая что L_i можно невырожденно отобразить в L_j при $j > i$ и, кроме того, любой комплекс K можно невырожденно отобразить хотя бы в один из L_i (как следствие, во все L_j с большими номерами). Назовем L-числом комплекса K наименьшее такое i, что K можно невырожденно отобразить в L_i. Например, если в качестве L-серии взять последовательность симплексов Δ_{i-1}, то L-число это просто хроматическое число комплекса. А если в качестве L-серии взять U_l то L-число равно $r(K)$. Если рассмотреть последовательность $\Delta_\infty^{(i)}$ комплексов на бесконечном числе вершин с симплексами, заданными всеми подмножествами мощности не больше $i+1$, то ее L-число есть размерность комплекса.

Если существует невырожденное отображение K в N и N в L_i, то их композиция снова невырождена, откуда следует, что $L(K) \leqslant L(N)$. ■

Замечание. L-серии позволяют просто доказывать некоторые утверждения. Пусть L_i^1 и L_i^2 — две серии, такие что для любого i существует невырожденное отображение L_i^1 в L_i^2. Будем писать в таком случае, что $L_i^1 \succ L_i^2$. Тогда нетрудно проверить, что выполнено неравенство на L-числа $L^1(K) \geqslant L^2(K)$. Рассмотрим пример: $\Delta_i \succ U_i \succ \Delta_\infty^{(i)}$. Отсюда следует, что $\gamma(K) \geqslant r(K) \geqslant \dim K$, что есть в точности утверждение 20.

Следующее утверждение позволяет выбирать канонический представитель класса.

Утверждение 22. *Если в классе эквивалентности есть представитель с конечным числом вершин, то в классе существует единственный с точностью до перенумерации вершин минимальный по числу вершин представитель. Его f-вектор минимален в данном классе. Минимальный представитель вкладывается в любой другой комплекс из класса.*

Доказательство. Допустим, что есть два минимальных по числу вершин комплекса K и N. Тогда существуют невырожденные функции $f : K \to N$ и $g : N \to K$. Ясно, что они обе биективны на вершинах (иначе $gf(K)$ было бы меньшим представителем класса). Также каждое из них индуцирует биективные отображения множества симплексов. Действительно, f инъективно на симплексах, т.к. оно инъективно на множестве вершин. Если бы оно не было сюръективным, то fg тоже не было бы сюръективным на симплексах, чего не может быть, так как оно является инъективным отображением конечного множества в себя. То есть любые два комплекса с минимальным числом вершин изоморфны.

Допустим, что K минимален по числу симплексов размерности i, N по числу вершин, а f, g как и ранее. Если число вершин K равно числу вершин у N, то все доказано. Если число вершин больше, то рассмотрим комплекс $g(N)$. Тогда $g(N) \sim N$ и $g(N) \subseteq K$, следовательно, в нем вершин не больше, чем в N, а симплексов не больше, чем в K. Тогда он будет минимальным и по числу вершин и по числу симплексов размерности i, а значит, он совпадает с N и имеет минимально возможное число симплексов размерности i.

Аналогичными рассуждениями можно показать существование вложения минимального комплекса в любой эквивалентный комплекс. ■

Сформулируем еще несколько свойств невырожденных отображений и отношения эквивалентности.

Следующее утверждение устанавливается прямой проверкой.

Утверждение 23. *1) Если $f : K \to N$ невырожденно и $\sigma \in K$, то $f(\mathrm{link}_K\, \sigma) \subset \mathrm{link}_N\, f(\sigma)$.*

2) Если $f : K_1 \to K_2$ невырожденно, то $f * id : K_1 * N \to K_2 * N$ также невырожденно.

3) Если $K_1 \sim K_2$, то $K_1 * N \sim K_2 * N$.

10 Свойства U_l

Обозначим через $X^{(k)}$ k-мерный остов комплекса X, то есть наибольший содержащийся в X подкомплекс размерности k. Тогда $\Delta_{l-1}^{(k-1)}$ — $(k-1)$-мерный остов симплекса на l вершинах. Иными словами, $\Delta_l^{(k)}$ — симплициальный комплекс на l вершинах, симплексы которого образованы всеми множествами мощности не более чем k. В частности, $\Delta_l^{(1)} = K_l$ — полный граф на l вершинах.

Утверждение 24.

$$U_l^{(1)} \sim K_{2^l-1}.$$

Доказательство. Зададим невырожденное отображение графа K_{2^l-1} в U_l. Для этого занумеруем вершины графа непустыми подмножествами $S \subseteq [l]$. Отобразим вершину v_S в целочисленный l-вектор e_S, у которого координаты с номерами из S равны 1, а остальные 0, то есть $e_S = \sum\limits_{i \in S} e_i$. Отображение является симплициальным, т.к. каждая пара векторов (e_S, e_T) образует правильный набор в $\mathbb{Z}^l$ при $S \neq T$. Докажем это. Пусть $S \subset T$, тогда дополним $S \subset T$ до полной цепочки $S_1 \subset \ldots \subset S_l$ из непустых подмножеств $[l]$. Тогда, очевидно, e_{S_i} образуют базис решетки. Если же S и T не лежат один в другом, но $S \cap T \neq \emptyset$, то добавим в набор $e_{S\cap T}$. Тогда правильность набора $(e_S, e_T, e_{S\cap T})$ эквивалентна правильности набора $(e_S, e_S + e_T - e_{S\cap T}, e_{S\cap T}) = (e_S, e_{S\cup T}, e_{S\cap T})$, который можно дополнить до части базиса решетки по тем же соображениям, что и раньше. Если же $S \cap T = \emptyset$, то доказательство совсем тривиально. Другой способ доказать то же самое будет рассмотрен при доказательстве утверждения 27.

Зададим невырожденное отображение $U_l^{(1)}$ в K_{2^l-1}. Каждому примитивному вектору $v \in \mathbb{Z}^l$ сопоставим его же по модулю 2, то есть вектор из нулей и единиц $v(mod\, 2)$. Тогда в $(0, \ldots, 0)$ ничего не перейдет, так как иначе примитивный вектор делился бы на 2, поэтому образ такого отображения состоит из $2^l - 1$ точек. Осталось проверить, что правильный набор из двух целочисленных векторов не может отобразиться в одну точку. Но если $v_1 \equiv v_2 (mod 2)$, то они заведомо не являются частью базиса решетки (целый вектор $(v_1 + v_2)/2$ не выражается с целыми коэффициентами через v_i). Поэтому задано невырожденное отображение в K_{2^l-1}. ■

Утверждение 25 (следствие)**.**

$$r(K_p) = \lceil \log_2(p+1) \rceil.$$

Доказательство. Если граф K_p можно невырожденно отобразить в U_l, то его также можно невырожденно отобразить и в K_{2^l-1}. А минимальное l, для которого это возможно, таково, что

$p \leqslant 2^l - 1$. Откуда и следует утверждение. ■

Пусть Γ — простой граф, то есть одномерный симплициальный комплекс. Очевидно, что $\gamma(\Gamma) \leqslant p$ тогда и только тогда, когда Γ можно невырожденно отобразить в K_p.

Теорема 6. *Пусть Γ — простой граф. Тогда*

$$r(\Gamma) = \lceil \log_2(\gamma(\Gamma) + 1) \rceil.$$

Доказательство. Поскольку существует невырожденное отображение Γ в $K_{\gamma(\Gamma)}$, то согласно утверждению 21, $r(\Gamma) \leqslant r(K_\gamma)$. Но, если существует отображение $\Gamma \to U_l$, то существует и сквозное отображение в K_{2^l-1}, то есть раскраска в $2^l - 1$ цвета. Следовательно, $\gamma(\Gamma) \leqslant 2^{r(\Gamma)} - 1$. В итоге $\log_2(\gamma(\Gamma) + 1) \leqslant r(\Gamma) \leqslant \lceil \log_2(\gamma(\Gamma) + 1) \rceil$, откуда следует утверждение. ■

Утверждение 26 (следствие)**.** *Пусть K симплициальный комплекс. Тогда*

$$r(K) \geqslant \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil.$$

Доказательство. Одномерный остов $K^{(1)}$ можно невырожденно отобразить в K. Следовательно, согласно утверждению 21, $r(K^{(1)}) \leqslant r(K)$. Но $K^{(1)}$ — граф и $r(K^{(1)}) = \lceil \log_2(\gamma(K^{(1)}) + 1) \rceil = \lceil \log_2(\gamma(K) + 1) \rceil$. ■

Введем еще один симплициальный комплекс $U_l(2)$. Его вершины — это ненулевые векторы $\mathbb{Z}_2^l$. Набор векторов определяет симплекс комплекса, если векторы набора линейно независимы над $\mathbb{Z}_2$.

Утверждение 27.

$$U_l^{(2)} \sim U_l^{(2)}(2).$$

Доказательство. Отображение в одну сторону строится приведением по модулю 2. Если набор векторов образует часть базиса в $\mathbb{Z}^l$, то их образ будет частью базиса $\mathbb{Z}_2^l$, а, значит, отображение симплициально и невырождено. Теперь отобразим $U_l^{(3)}(2)$ в $U_l^{(3)}$. Каждому вектору из нулей и единиц из $\mathbb{Z}_2^l$ поставим в соответствие такой же вектор в $\mathbb{Z}^l$. Надо проверить, что, если три вектора образовывали часть базиса в $\mathbb{Z}_2^l$, то они образуют часть базиса решетки $\mathbb{Z}^l$. Запишем их координаты в строки $3 \times l$-матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,1} & \dots & \varepsilon_{1,i_1} & \dots & \varepsilon_{1,i_2} & \dots & \varepsilon_{1,i_3} & \dots & \varepsilon_{1,l} \\ \varepsilon_{2,1} & \dots & \varepsilon_{2,i_1} & \dots & \varepsilon_{2,i_2} & \dots & \varepsilon_{2,i_3} & \dots & \varepsilon_{2,l} \\ \varepsilon_{3,1} & \dots & \varepsilon_{3,i_1} & \dots & \varepsilon_{3,i_2} & \dots & \varepsilon_{3,i_3} & \dots & \varepsilon_{3,l} \end{pmatrix}$$

Т.к. векторы линейно независимы, матрица имеет ненулевой над $\mathbb{Z}_2$ минор, образованный столбцами i_1, i_2, i_3. Если матрица 3×3 из 0 и 1 имеет нечетный определитель, то этот определитель равен ± 1. То есть над $\mathbb{Z}$ матрица A имеет минор, равный ± 1. Но тогда векторы образуют часть базиса решетки.

Замечание 1. Из существования минора, равного ± 1, следует, что набор унимодулярен, но, вообще говоря, не наоборот. Достаточно рассмотреть матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ее строки образуют унимодулярный набор, так как их можно дополнить до базиса решетки, добавив вектор $(0 \quad 1 \quad 1)$. Но ни один минор матрицы не равен ± 1.

Замечание 2. То же доказательство работает и для утверждения 24, которое также является следствием этого. ■

Это утверждение позволяет сводить поиск характеристического отображения двумерных комплексов к поиску невырожденного отображения в конечный симплициальный комплекс. Значит, для комплексов размерности 2 число s можно найти алгоритмически.

11 Другие свойства U_l

Сформулируем гомологические свойства комплекса U_l, доказанные в [DJ],[vdK]. Эти свойства интересны сами по себе, но использоваться не будут.

Утверждение 28. *Комплекс U_l является $(l-2)$-связным. Для любого симплекса $\sigma \in U_l$ комплекс $\mathrm{link}_{U_l}\,\sigma$ является $(l-|\sigma|-2)$-связным. То есть комплекс U_l является комплексом Коэна-Маколея.*

Нас же больше интересуют свойства U_l с точки зрения невырожденных отображений.

Утверждение 29. *1) Пусть $\sigma \in U_l$, $|\sigma| = k$. Тогда $\mathrm{link}_{U_l}\,\sigma \sim U_{l-k}$.*
2) Существует невырожденное отображение $U_l * U_k$ в U_{l+k}.

Доказательство. Автоморфизмом решетки можно перевести любой симплекс U_l в симплекс, составленный из первых k векторов стандартного базиса. Поэтому все линки совпадают, и без ограничения общности можно считать, что σ — стандартный.

1) Построим невырожденное отображение U_{l-k} в $\mathrm{link}_{U_l}\,\sigma$. Вектор $(v_1, \ldots, v_{l-k}) \in U_{l-k}$ переходит в $(0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_{l-k}) \in U_l$. Такое отображение будет симплициальным и невырожденным. Кроме того, его образ лежит в $\mathrm{link}_{U_l}\,\sigma$.

Теперь строим невырожденное отображение $f : \mathrm{link}_{U_l}\,\sigma \to U_{l-k}$. Пусть D — подрешетка, порожденная векторами из σ. Т.к. D является прямым слагаемым, то имеется отображение факторизации на решетку $p : \mathbb{Z}^l \to \mathbb{Z}^l/D \cong \mathbb{Z}^{l-k}$. Проверим, что p индуцирует невырожденное отображение $\mathrm{link}_{U_l}\,\sigma$ в U_{l-k}. Пусть τ — такой набор векторов, что $\tau \sqcup \sigma$ образует часть базиса $\mathbb{Z}^l$. Будем считать, что $\tau \sqcup \sigma$ образует базис в $\mathbb{Z}^l$ (всегда можно дополнить до $l-k$ векторов). Тогда $p(\tau \sqcup \sigma) = p(\tau) \sqcup p(\sigma) = p(\tau) \sqcup \{0\}$ порождают $\mathbb{Z}^{l-k}$, а, учитывая то, что их ровно $l-k$, можно заключить, что они составляют базис $\mathbb{Z}^{l-k}$. Первое утверждение доказано.

2) Построим $f : U_l * U_k \to U_{l+k}$. Пусть $v \in U_l * U_k$. Тогда

$$f(v) = \begin{cases} (v, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}), & \text{если } v \in U_l, \\ (\underbrace{0 \ldots, 0}_{l}, v), & \text{если } v \in U_k. \end{cases}$$

Иными словами, вершины из $U_l \subset \mathbb{Z}^l$ отображаются посредством вложения $\mathbb{Z}^l \hookrightarrow \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}^k$, а вершины из $U_k \subset \mathbb{Z}^k$ — посредством вложения $\mathbb{Z}^k \hookrightarrow \mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}^k$. Покажем, что такое отображение симплициально и невырожденно. Будем, как и ранее, проверять симплициальность отображения только на максимальных симплексах, то есть на наборах векторов, образующих базис решетки. Пусть $\sigma = (\tau_1, \tau_2) \in U_k * U_l$, где τ_1 — базис $\mathbb{Z}^l$, а τ_2 — базис $\mathbb{Z}^k$. Тогда $f(\sigma) = f(\tau_1) \sqcup f(\tau_2)$ — базис $\mathbb{Z}^l \oplus \mathbb{Z}^k$. Невырожденность следует из инъективности f. ■

Утверждение 30. *Для любых комплексов K и N выполнено неравенство*

$$r(K * N) \leqslant r(K) + r(N).$$

Доказательство. Комплекс K можно невырожденно отобразить в U_{l_1}, а комплекс N — в U_{l_2}, где $l_1 = r(K)$, $l_2 = r(N)$. Тогда $K * N$ отображается в комплекс $U_{l_1} * U_{l_2}$, который, в свою очередь отображается в $U_{l_1+l_2}$ по предыдущему утверждению. Тем самым существует невырожденное отображение $K * N$ в $U_{l_1+l_2}$, что и дает оценку сверху. ■

Утверждение 31.

$$r(K * L) \geqslant r(K) + \dim L + 1.$$

Доказательство. Пусть $l = r(K * L)$. Обозначим через σ максимальный по мощности симплекс L. Тогда подкомплекс $\mathrm{link}_{K*L}\,\sigma = \mathrm{link}_L\,\sigma * K$ можно невырожденно отобразить в $\mathrm{link}_{U_l}\,\Delta$, где Δ — симплекс мощности $\dim L + 1$ в U_l. Так как $\mathrm{link}_{U_l}\,\Delta \sim U_{l-\dim L} - 1$, то $\mathrm{link}_L\,\sigma * K$ можно невырожденно отобразить в $U_{l-\dim L-1}$, а, следовательно, и K можно невырожденно отобразить в $U_{l-\dim L-1}$, откуда и получается оценка. ■

12 Оценки для числа Бухштабера

Утверждение 32 (оценка Николая Ероховца)**.**

$$r(K) \leqslant r(\Delta^{(\dim K)}_{\gamma(K)-1}).$$

Доказательство. Следует из существования отображения K в $\Delta^{\dim K}_{\gamma(K)-1}$ и утверждения 21. ■

Пусть c^l_k — наибольшая мощность множества векторов в $\mathbb{Z}^l$ (соответственно $\mathbb{Z}^l_2$), среди которых каждые k образуют унимодулярный набор (соответственно, часть базиса). Назовем такие множества удачными. Число c используется для оценки числа Бухштабера $s(\Delta^{(k-1)}_{p-1})$.

Утверждение 33. *Для* $k \geqslant 2$ *выполнено*

$$c^l_k \leqslant 2^{l-k+2} + k - 3,$$

$$r(\Delta^{(k-1)}_{p-1}) \geqslant \lceil \log_2(p-k+3) \rceil + k - 2.$$

Доказательство. Пусть M — удачное множество в $\mathbb{Z}^l_2$, $|M| = c$. Тогда выберем в нем произвольные $k-2$ элемента $v_1, \ldots, v_{k-2}$ и обозначим множество оставшихся элементов через N. Для каждого $S \subseteq [k-2]$ введем множество векторов $N_S = N + \sum\limits_{i \in S} v_i$. Множества N_S попарно не пересекаются. Действительно, если бы это было так, то существовали бы $w_1, w_2 \in N$ такие что $w_1 + \sum\limits_{i \in S} v_i = w_2 + \sum\limits_{i \in T} v_i$, следовательно $w_1 + w_2 + \sum\limits_{i \in S \triangle T} v_i = 0$. Но слева стоит нетривиальная сумма (ничего не сокращается) не более k векторов из M, которые линейно-независимы, что дает противоречие. Мы получили, что множество из $2^l - 1$ ненулевых векторов содержит 2^{k-2} подмножества, каждое из которых имеет мощность $c - k + 2$. Отсюда $2^l - 1 \geqslant 2^{k-2}(c - k + 2)$, следовательно $c \leqslant 2^{l-k+2} - 2^{-k+2} + k - 2$, $c \leqslant 2^{l-k+2} + k - 3$. Таким образом, получена оценка на мощность удачного множества в $\mathbb{Z}^l_2$. Но, если есть удачное множество в $\mathbb{Z}^l$, то его приведение $mod\, 2$ есть удачное множество в $\mathbb{Z}^l_2$, следовательно, оценка выполнена и для целочисленных векторов. ■

Утверждение 34.

$$c^l_3 = 2^{l-1},$$

$$r(\Delta^{(2)}_{p-1}) = \lceil \log_2 p \rceil + 1.$$

Доказательство. Согласно утверждению 27, поиск максимального удачного множества можно без ограничения общности свести к поиску набора в $\mathbb{Z}^l_2$, в котором каждые три вектора образуют часть базиса. Заметим, что в $\mathbb{Z}^l_2$ два вектора линейно независимы если они различны, а три вектора линейно независимы если их сумма не равна 0 по модулю 2 и они попарно различны. Построим удачный набор из 2^{l-1} векторов. Рассмотрим e_A для всех A нечетной мощности. Тогда сумма координат у $e_A + e_B + e_C$ нечетна, значит $e_A + e_B + e_C \neq 0$. Получили, что $c^l_3 \geqslant 2^{l-1}$. Неравенство в другую сторону описано утверждением 33 при $k = 3$. Второе равенство вытекает из первого, доказательство полностью аналогично утверждению 25. ■

Утверждение 35.

$$c^l_l = l + 1.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что первые l векторов удачного множества - это стандартный базис $e_1 \ldots, e_l \in \mathbb{Z}^l$. Действительно, они являются базисом, а значит автоморфизмом решетки можно перевести его в стандартный. Найдем еще векторы v, дающие базис вместе с любыми $l-1$ стандартными. Если $e_1, \ldots, e_{l-1}, v$ базис, то у v последняя координата равна ± 1. Аналогично с остальными координатами. Удачное множество из $l+1$ элемента построено. Допустим, что помимо e_i в удачном множестве есть еще хотя бы 2 вектора v_1, v_2. Тогда они имеют вид $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, а, значит, $(v_1 + v_2)/2$ не принадлежит порожденной ими решетке, а, значит, v_1 и v_2 не образуют унимодулярный набор, что противоречит удачности множества. ■

Утверждение 36.

$$r(\Delta_p^{(p-1)}) = p,$$

$$r(\Delta_{p+1}^{(p-1)}) = p + 1.$$

Доказательство. Первое является прямым следствием утверждения 35. Докажем второе. Существует невырожденное отображение $\Delta_{p+1}^{(p-1)}$ в $\Delta_{p+1}^{(p)}$, значит $r(\Delta_{p+1}^{(p-1)}) \leqslant r(\Delta_{p+1}^{(p)}) = p + 1$. Но $r(\Delta_{p+2}^{(p)}) > p$ согласно утверждению 35. ■

13 Аналоги хроматического числа

Определение 17. *Пусть K — симплициальный комплекс. Назовем раскраску его вершин m-правильной, если вершины любого m-мерного симплекса не покрашены в один цвет. Тогда определим $\gamma_m(K)$ как наименьшую мощность m-правильной раскраски.*

Пример. γ_1 — это просто хроматическое число γ.

Покажем теперь, что инварианты γ_m можно определить с помощью серий, как при доказательстве утверждения 21. Для каждого фиксированного m рассмотрим серию $L_i^{(m)} = \left(\Delta_\infty^{(m-1)}\right)^{*i}$. Параметром серии является i — показатель джойн-степени. Тогда серия $L_i^{(m)}$ задает инвариант γ_m. Заметим, что для $m = 1$, $\left(\Delta_\infty^{(0)}\right)^{*i} \sim \Delta_{i-1}$, что и дает серию симплексов для хроматического числа. Теперь можно написать оценки, связывающие различные инварианты симплициального комплекса. Доказательства этих неравенств аналогичны доказанным ранее утверждениям.

Утверждение 37. *Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и любого комплекса K выполнено*

$$\gamma_{kn}(K) \leqslant \left\lceil \frac{\gamma_k(K)}{n} \right\rceil,$$

$$r(K) \leqslant r\left(\left(\Delta_{|K|}^{(k-1)}\right)^{*\gamma_k(K)}\right) \leqslant \gamma_k(K) r(\Delta_{|K|}^{(k-1)}),$$

$$\gamma_k(K) \leqslant \gamma_k(U_{r(K)}).$$

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер. Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения // Труды Матем. Инст. им В.А.Стеклова, т.263, с.1-26.

[2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. Торические действия в топологии и комбинаторике. Москва, МЦНМО, 2004.

[3] Н. Ю. Ероховец. Свойства простых многогранников. Дипломная работа. Москва, 2008.

[4] M. Bayer, L. Billera. Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets // Invent. Math. 1985. V.79, №1, P.143-157.

[5] M. Davis, T. Januszkievicz. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. v.62., №2. P.417—451.

[6] Alexander A. Gaifullin. Local formulae for combinatorial Pontrjagin classes // http://arxiv.org

[7] Gábor Hetyei. Face enumeration using generalized binomial coefficients // http://www.math.uncc.edu/preprint/2004/

[8] V. Klee. A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem // Canad. J. Math. 1964. V.16. P.517-531.

[9] R. Stanley. Enumerative combinatorics, V.1. Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey, California, 1986.

[10] R. Stanley. Flag f-vectors and the cd-index // Math. Zeitschrift 216, 1994. P.483-499.