Ряд Пуанкаре дивизориальной фильтрации, связанной с кривой с одной ветвью на бесконечности.*

А. Ю. Буряк †

Аннотация

Компонента исключительного дивизора модификации проективной плоскости с помощью последовательности раздутий определяет фильтрацию на кольце многочленов от двух переменных. Набор таких компонент определяет мультииндексную фильтрацию на этом кольце. Ряд Пуанкаре этой фильтрации вычисляется для некоторых наборов компонент, когда рассматриваемая модификация является минимальным разрешением плоской алгебраической кривой с одной ветвью на бесконечности.

Пусть C – плоская неприводимая аффинная кривая, заданная многочленом $f(x,y)$. Пусть C имеет одну ветвь на бесконечности, то есть её замыкание в $\mathbb{CP}^2$ пересекает бесконечно удалённую прямую A лишь в одной точке и локально неприводима в ней. Пусть m и n – степени этого многочлена по x и y соответственно. Мы будем предполагать, что $m > n$, то есть C проходит через точку пересечения оси y и бесконечно удалённой прямой A. Нам понадобится ряд утверждений из [4], установленных там при условии $n \nmid m$, поэтому мы тоже будем это предполагать. Согласно [4] произвольная кривая с одним местом на бесконечности заменой координат в плоскости $\mathbb{C}^2$ приводится к кривой, удовлетворяющей вышеперечисленным условиям. Рассмотрим такое минимальное разрешение C

*УДК 515.162

†Автор благодарит С. М. Гусейн-Заде за постановку задачи и полезные обсуждения и рецензента работы за ряд важных замечаний и предложений.

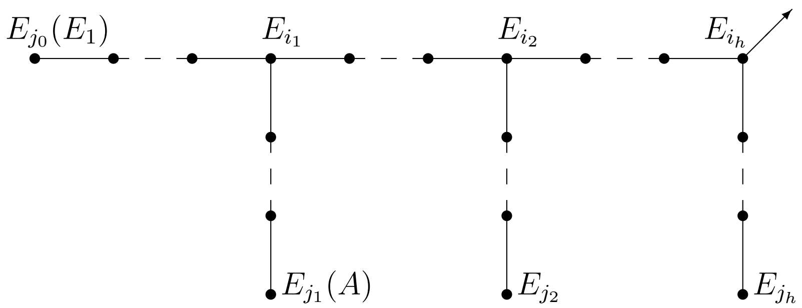

Рис. 1: Граф разрешения.

на бесконечности, что полный прообраз $C \cup A$ в окрестности особой точки есть дивизор с нормальными пересечениями. Это разрешение состоит из последовательности раздутий и чтобы не усложнять обозначения собственные прообразы кривых при этих модификациях мы будем обозначать теми же буквами, как и на немодифицированной поверхности. Набору неприводимых дивизоров на гладкой алгебраической поверхности можно сопоставить двойственный граф. Его вершины соответствуют дивизорам, и две вершины соединены ребром, если соответствующие дивизоры пересекаются. Из [4] следует, что двойственный граф Γ системы вклеенных дивизоров вместе с A имеет вид, изображённый на рис. 1.
Пусть $\mathcal{D}$ – множество всех вклеенных дивизоров вместе с A. Договоримся, что дивизор A имеет номер 0, а все остальные пронумерованы в порядке появления от 1 до $T = i_h$. Вершину графа Γ, соответствующую дивизору E_i, будем обозначать через a_i. Дивизоры E_{j_k} назовём крайними. Пусть g – произвольный многочлен, а $E_k \in \mathcal{D}$. Положим $\nu_k(g)$ – порядок полюса g вдоль дивизора E_k. Пусть $E_{u_1}, E_{u_2}, \ldots, E_{u_r}$ – некоторый набор дивизоров из $\mathcal{D}$. Функции ν_{u_i} определяют мультииндексную фильтрацию в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x,y]\colon J(v_1,\ldots,v_r) = \{g \in \mathbb{C}[x,y]\colon \nu_{u_i}(g) \leq v_i\}$. Для того чтобы дать следующие определения нам необходима

Лемма 1 *Для любого многочлена g и дивизора $E_k \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство $\nu_k(g) \geq 0$, то есть g не может быть тождественным нулём на дивизоре E_k, при этом неравенство строгое, если $g \not\equiv const$ и дивизор E_k не является крайним.*

Доказательство см. ниже. Пусть среди дивизоров $E_{u_1}, \ldots, E_{u_r}$ есть хотя бы один некрайний. Тогда легко видеть, что для любого набора $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_r) \in \mathbb{Z}^r$ имеем $dim J(\overline{v}) < \infty$. Положим $d(\overline{v}) := dim(J(\overline{v})/J(\overline{v}-\overline{1}))$

и $L(\overline{t}) := \sum\limits_{\overline{v}\in\mathbb{Z}^r} d(\overline{v})\overline{t}^{\overline{v}}$, где $\overline{1} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{Z}^r, \overline{t}^{\overline{v}} = t_1^{v_1}\cdots t_r^{v_r}$. Из леммы 1 следует, что $L(\overline{t})$ – степенной ряд. Аналогично [1] определим ряд Пуанкаре фильтрации $\{J(\overline{v})\}$ формулой

$$P(\overline{t}) = \frac{L(\overline{t})\prod\limits_{i=1}^{r}(1-t_i)}{1-\overline{t}^{\overline{1}}}.$$

Точно так же как и в [1] доказывается, что ряд Пуанкаре равен интегралу по эйлеровой характеристике

$$P(\overline{t}) = \int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]} \overline{t}^{\overline{\nu}(g)} d\chi\,,$$

где $\overline{t}^{\overline{\nu}(g)} = t_1^{\nu_{u_1}(g)} t_2^{\nu_{u_2}(g)} \cdots t_r^{\nu_{u_r}(g)}$, а через $\mathbb{P}V$ мы обозначаем проективизацию векторного пространства V. Интеграл по эйлеровой характеристике $\int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]} \overline{t}^{\overline{\nu}(g)} d\chi$ определяется как

$$\int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]} \overline{t}^{\overline{\nu}(g)} d\chi := \sum_{\overline{v}\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}} \chi(\{g\in\mathbb{PC}[x,y] \mid \overline{\nu}(g) = \overline{v}\})\overline{t}^{\overline{v}}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае все множества $\{g \in \mathbb{PC}[x,y] \mid \overline{\nu}(g) = \overline{v}\}$ конечномерны и поэтому их эйлерова характеристика не требует дополнительного определения (в отличие от локального случая из [1]).

Положим $\Delta = (E_i \circ E_j)$ – матрица пересечений системы дивизоров $\mathcal{D}$, $M = \Delta^{-1} = (m_{ij})$. Через $\overset{\bullet}{E}_k$ обозначим E_k без точек пересечения с другими дивизорами из $\mathcal{D}$. Матрица M симметрична и её элементы имеют следующий смысл. Пусть для некоторого E_k существует функция g_k, такая что кривая $\{g_k = 0\}$ трансверсально пересекает $\overset{\bullet}{E}_k$ и не имеет общих точек с другими дивизорами из $\mathcal{D}$. Тогда для любого l выполняется $m_{kl} = \nu_l(g_k)$. Из [5] следует, что такие кривые существуют для дивизоров E_{j_k} и E_{i_l} и значит соответствующие элементы матрицы M положительны. Положим $\overline{m}_k = (m_{ku_1},\ldots,m_{ku_r})$. Объединение вершин графа Γ, начиная с a_{j_k} и до ближайшей тройной точки, не включая её, назовём k-ой ветвью графа Г. Дивизор E_l назовём простым если вершина a_l либо совпадает с тройной точкой, либо лежит на h-ой ветви, либо лежит между вершинами $a_{i_{h-1}}$ и a_{i_h}. Если $h = 1$, то все дивизоры назовём простыми.

Теорема 1 *Пусть дан набор дивизоров, не все из которых являются крайними. Если все дивизоры из набора простые, либо $h \leq 2$, то*

$$P(t_1, \ldots, t_r) = \prod_{0 \leq k \leq T} (1 - \bar{t}^{\overline{m}_k})^{-\chi(\dot{E}_k)}.$$

Замечание 1 *Доказываемая формула была предложена в [2] для более общей ситуации, однако доказательство содержало ошибку.*

Для доказательства леммы 1, а потом и теоремы 1 нам потребуются несколько определений и вспомогательное утверждение. Положим

$$\delta_k = \nu_{j_k}(f),\ 0 \leq k \leq h\,,$$
$$d_l = gcd(\delta_0, \ldots, \delta_{l-1}),\ 1 \leq l \leq h+1\,,$$
$$q_s = d_s/d_{s+1},\ 1 \leq s \leq h\,.$$

Доказательства следующих фактов можно найти в [4]

$$d_{h+1} = 1,$$
$$q_k\delta_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\delta_{k-1}.$$

Пусть S – полугруппа полюсов кривой C ([4]). В [6] и [4] доказывается, что $\delta_0, \ldots, \delta_h$ порождают S, причём любое число λ из S единственным образом представимо в виде

$$\lambda = a_0\delta_0 + a_1\delta_1 + \cdots + a_h\delta_h$$

где $0 \leq a_0$, $0 \leq a_i < q_i$ при $1 \leq i \leq h$. Из [4] мы знаем, что $d_k \mid n$. Положим $n_k = \frac{n}{d_k}$. Определим многочлены g_k, с коэфициентом 1 при старшей степени y, $deg_y(g_k) = n_k$, и ψ_k, $deg_y(\psi_k) < n - n_k$, равенством

$$f = g_k^{d_k} + \psi_k\,.$$

Легко видеть, что этим равенством многочлены g_k и ψ_k определяются однозначно. Положим также $g_0 = x$. Имеем по определению, $g_{h+1} = f$. Многочлены $g_0, \ldots, g_h$ называются приближающими многочленами для многочлена f. Положим $C_k = \{g_k = 0\}$. В [4] доказывается, что при $2 \le k \le h$ и при $k = 0$ кривая C_k имеет одну ветвь на бесконечности и трансверсально пересекает $\overset{\bullet}{E}_{j_k}$. Кривая C_1 тоже имеет одну ветвь на бесконечности и трансверсально пересекает некоторый дивизор $\overset{\bullet}{E}_l$ на 1-ой ветви, но не обязательно $\overset{\bullet}{E}_{j_1}$. Для облегчения дальнейших вычислений продеформируем приближающие многочлены следующим образом. Из [5] мы имеем следующие формулы

$$g_0 = x,$$
$$g_1 = y + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{n} \rfloor} c_j x^j, \ c_j \in \mathbb{C},$$
$$g_{i+1} = g_i^{q_i} + a_{\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\cdots\overline{\alpha}_{i-1}} g_0^{\overline{\alpha}_0} g_1^{\overline{\alpha}_1} \cdots g_{i-1}^{\overline{\alpha}_{i-1}} + \sum_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_i)\in\Lambda_i} c_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_i} g_0^{\alpha_0} g_1^{\alpha_1} \cdots g_i^{\alpha_i},$$
$$a_{\overline{\alpha}_0\overline{\alpha}_1\cdots\overline{\alpha}_{i-1}} \in \mathbb{C}^*, c_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_i} \in \mathbb{C} \ (1 \le i \le h),$$

где

$$\sum_{j=0}^{i-1} \overline{\alpha}_j \delta_j = q_i \delta_i, \ 0 \le \overline{\alpha}_j < q_j \ (0 < j < i),$$
$$\Lambda_i = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_i) \in \mathbb{Z}^{i+1} \mid 0 \le \alpha_j < q_j \ (0 < j < i),$$
$$0 \le \alpha_i < q_i - 1, \ \sum_{j=0}^{i} \alpha_j \delta_j < q_i \delta_i\}.$$

При произвольном изменении чисел $c_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_i}$ минимальное разрешение соответствующей кривой C не изменяется, а последовательность $g_0, \dots, g_h$ остаётся последовательностью приближающих многочленов для f. Наша фильтрация строится только по разрешению, поэтому мы можем для удобства положить все эти параметры равными 0. В этом случае $g_1 = y$ и кривая C_1 пересекает именно $\overset{\bullet}{E}_{j_1}$, а точки пересечения C_k при $k \ge 2$ с соответствующими дивизорами не меняются. Положим

$$g_{a_0 a_1 \dots a_{h+1}} = g_0^{a_0} g_1^{a_1} \cdots g_{h+1}^{a_{h+1}}$$

где $0 \le a_0, 0 \le a_{h+1}, 0 \le a_i < q_i$ при $1 \le i \le h$. Эти многочлены образуют базис $\mathbb{C}[x,y]$ как векторного постранства ([6]). Для $2 \le k \le h+1$ минимальное разрешение кривой C_k получается из построенного разрешения для кривой C стягиванием всех дивизоров, появившихся после $E_{i_{k-1}}$, причём C_k будет после этого трансверсально пересекать $E_{i_{k-1}}$ ([4]). Многочлены $g_0, \dots, g_{k-1}$ будут в этом случае приближающими многочленами для g_k ([4]). Соответствующая последовательность чисел δ выглядит следующим образом $\frac{\delta_0}{d_k}, \frac{\delta_1}{d_k}, \dots, \frac{\delta_{k-1}}{d_k}$. Таким образом для каждого $1 \le k \le h+1$ мы имеем базис пространства $\mathbb{C}[x,y]$, состоящий из многочленов $g_{a_0 a_1 \dots a_k}$, где $0 \le a_0, 0 \le a_k, 0 \le a_i < q_i$ при $1 \le i \le k-1$. Этот базис назовём базисом k-ого уровня. Мультиндексы $\overline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$, удовлетворяющие этим ограничениям, назовём допустимыми мультииндексами k-ого уровня. Пусть I_k – множество допустимых мультииндексов k-ого уровня.

Лемма 2 *Пусть $g = \sum_{\overline{a} \in I_h} \lambda_{\overline{a}} g_{\overline{a}}$. Тогда для любого простого дивизора E_l, $\nu_l(g)$ равно максимальному $\nu_l(g_{\overline{a}})$ среди элементов базиса, присутствующих в разложении g с ненулевыми коэффициентами.*

Доказательство. Пусть G_l – множество элементов базиса, присутствующих в разложении g с ненулевыми коэффициентами, для которых достигается максимум функции ν_l. Достаточно доказать, что все нетривиальные линейные комбинации векторов из G_l имеют один и тот же порядок полюса вдоль дивизора E_l. Предположим сначала, что $l = i_k$ для некоторого $1 \le k \le h-1$. Стянем все дивизоры, появившиеся после E_{i_k}. Нам достаточно доказать, что для любых двух различных многочленов $g_{\overline{a}}, g_{\overline{b}} \in G_l$ определяемые ими кривые $C_{\overline{a}}$ и $C_{\overline{b}}$ имеют различные индексы пересечения с E_{i_k}. Предположим противное. Из [4] мы имеем следующую формулу для индекса пересечения

$$(E_{i_k} \circ C_p) = \frac{d_{k+1}}{d_p} = q_{k+1} q_{k+2} \cdots q_{p-1},$$

где $k+1 \le p \le h+1$. Таким образом

$$(E_{i_k} \circ C_{\overline{a}}) = a_{k+1} + a_{k+2} q_{k+1} + a_{k+3} q_{k+1} q_{k+2} + \dots + a_h q_{k+1} \cdots q_{h-1}.$$

Положим $\delta'_i = \frac{\delta_i}{d_{k+1}}$ для $0 \le i \le k$. Из [4] имеем равенство

$$\nu_{i_k}(g_{\overline{a}}) = a_0 \delta'_0 + a_1 \delta'_1 + \dots + a_k \delta'_k + q_k \delta'_k (E_{i_k} \circ C_{\overline{a}}) \qquad (1)$$

Из ограничений на числа a_i и b_i и вида формулы для индекса пересечения следует, что числа $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_h$, равно как и $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_h$, однозначно определяются по индексу пересечения, и значит $a_i = b_i$ при $i \geq k+1$. Поскольку $\nu_{i_k}(g_{\overline{a}}) = \nu_{i_k}(g_{\overline{b}})$, то

$$a_0\delta'_0 + a_1\delta'_1 + \dots + a_k\delta'_k = b_0\delta'_0 + b_1\delta'_1 + \dots + b_k\delta'_k$$

Но представление числа в виде такой суммы, с имеющимися ограничениями на коэффициенты, единственно и значит $\overline{a} = \overline{b}$, что противоречит предположению о том, что многочлены $g_{\overline{a}}$ и $g_{\overline{b}}$ различны.

Предположим теперь, что $h \geq 2$ и вершина a_l расположена на связной компоненте $\Gamma - a_{i_{h-1}}$, содержащей a_{i_h}. Пусть вершина $a_{l'}$ связана с a_l и расположена ближе к вершине $a_{i_{h-1}}$, либо совпадает с ней. Опять нам достаточно доказать, что для любых двух различных многочленов $g_{\overline{a}}, g_{\overline{b}} \in G_l$ $\nu_{l'}(g_{\overline{a}}) \neq \nu_{l'}(g_{\overline{b}})$. Предположим, что эти числа равны. Рассмотрим отношение $F = \frac{g_{\overline{a}}}{g_{\overline{b}}}$. Функция F есть тождественная ненулевая константа на соседних дивизорах E_l и E'_l. Заметим, что кривые $C_{\overline{a}}$ и $C_{\overline{b}}$ могут пересекать h-ую ветвь только по дивизору E_{j_h}, значит функция F есть тождественная ненулевая константа на всех дивизорах между $E_{i_{h-1}}$ и E_{j_h} и не имеет ни нуля ни полюса на E_{j_h}. Отсюда видно, что $a_h = b_h$. Положим $\delta'_i = \frac{\delta_i}{d_h}$ для $0 \leq i \leq h-1$. Имеем также, что функция F не имеет ни нуля ни полюса на $E_{i_{h-1}}$. Следовательно, $\nu_{i_{h-1}}(g_{\overline{a}}) = \nu_{i_{h-1}}(g_{\overline{b}})$, и по формуле 1, учитывая равенство $a_h = b_h$, получаем, что

$$a_0\delta'_0 + a_1\delta'_1 + \dots + a_{h-1}\delta'_{h-1} = b_0\delta'_0 + b_1\delta'_1 + \dots + b_{h-1}\delta'_{h-1}$$

Представление числа в виде такой линейной комбинации единственно, поэтому получаем, что $\overline{a} = \overline{b}$, то есть противоречие.

В случае $h = 1$ рассуждения почти такие же. Из того факта, что два многочлена $g_{\overline{a}}, g_{\overline{b}}$ имеют одинаковые порядки полюсов на дивизоре E_l и на соседнем дивизоре следует, что их отношение есть тождественная ненулевая константа на всех некрайних дивизорах из $\mathcal{D}$ и не имеет ни нуля ни полюса на крайних дивизорах. Отсюда следует, что $a_0 = b_0, a_1 = b_1$. $\square$

Доказательство леммы 1. Докажем утверждение индукцией по h. При $h = 1$ применим лемму 2. Из неё следует, что нам достаточно доказать, что $\nu_l(g_0) \geq 0$ и $\nu_l(g_1) \geq 0$ причём неравенства строгие если $l \neq j_0, j_1$. Вспомним, что $g_0 = x$ и $g_1 = y$. Проследим как проходит разрешение кривой C. Сначала вклеивается E_{j_0}, при этом $\nu_{j_0}(x) = 0, \nu_{j_1}(x) = 1$, дальнейшие раздутия происходят в точках, не лежащих на кривой $x = 0$, поэтому на всех последующих дивизорах E_l имеем $\nu_l(x) > 0$. Ясно, что $\nu_{j_1}(y) = 1$ и все раздутия производятся в точках не лежащих на кривой $y = 0$, поэтому для любого l выполняется неравенство $\nu_l(y) > 0$. Теперь пусть $h \geq 2$. Для всех дивизоров, вклеенных до $E_{i_{h-1}}$ включительно, всё доказано по предположению индукции и так как минимальное разрешение g_h получается из нашего стягиванием всех дивизоров, появившихся после $E_{i_{h-1}}$. Значит нам нужно рассмотреть дивизоры, появившиеся после $E_{i_{h-1}}$. При этом по лемме 2 мы можем ограничиться только функциями $g_k, 0 \leq k \leq h$. По предположению индукции $\nu_{i_{h-1}}(g_k) > 0$. Все дивизоры, появившиеся после $E_{i_{h-1}}$, вклеиваются в точках, не лежащих на C_k при $k \leq h-1$, отсюда следует что $\nu_l(g_k) > 0$ при $k < h$ и $l > i_{h-1}$. Имеем $\nu_{i_{h-1}}(g_h) > 0$ и несколько последующих дивизоров каждый раз вклеиваются в точках, лежащих на C_h. При этом порядок полюса g_h на каждом следующем дивизоре падает на единицу. В некоторый момент вклеивается E_{j_h}, а все последующие раздутия не затрагивают C_h. Если $\nu_{j_h}(g_h) < 0$, то и на всех дивизорах, вклеенных после E_{j_h}, порядок полюса g_h отрицательный, в частности и на E_{i_h}, но $\nu_{i_h}(g_h) = m_{i_h j_h} = \nu_{j_h}(f) = \delta_h > 0$, противоречие, следовательно $\nu_{j_h}(g_h) \geq 0$. Все дивизоры после E_{j_h} вклеиваются в нележащих на C_h точках пересечения ранее вкленных дивизоров. Значит на них порядок полюса g_h положительный, что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала первую часть теоремы. Рассмотрим некоторое множество простых дивизоров. Пусть $N \subset I_h$ – некоторое непустое конечное множество допустимых мультииндексов уровня h. Положим $\mathbb{C}[x,y]_N$ – множество функций, разложение которых по базису уровня h содержит только многочлены $g_{\overline{a}}, \overline{a} \in N$ и при этом с ненулевыми коффициентами. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]} \overline{t}^{\overline{\nu}} d\chi = \sum_{\substack{\varnothing \neq N \subset I_h \\ \sharp N < \infty}} \int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]_N} \overline{t}^{\overline{\nu}} d\chi.$$

По лемме 2 функция $\overline{t}^{\overline{\nu}}$ постоянна на страте $\mathbb{PC}[x,y]_N$. Но при $\sharp N \geq 2$

$\chi(\mathbb{PC}[x,y]_N) = \chi((\mathbb{C}^*)^{\sharp N-1}) = 0$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и значит

$$P(t_1,\ldots,t_r) = \sum_{\overline{a}\in I_h} \overline{t}^{\overline{\nu}(g_{\overline{a}})} =$$

$$= \left(\sum_{0\le a_0} \overline{t}^{\overline{\nu}(g_0^{a_0})}\right) \left(\prod_{1\le i\le h-1} \sum_{0\le a_i<q_i} \overline{t}^{\overline{\nu}(g_i^{a_i})}\right) \left(\sum_{0\le a_h} \overline{t}^{\overline{\nu}(g_h^{a_h})}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\overline{t}^{\overline{\nu}(g_0)}}\right) \left(\prod_{1\le i\le h-1} \frac{1-\overline{t}^{q_i\overline{\nu}(g_i)}}{1-\overline{t}^{\overline{\nu}(g_i)}}\right) \left(\frac{1}{1-\overline{t}^{\overline{\nu}(g_h)}}\right).$$

Заметим, что $\overline{\nu}(g_k) = \overline{m}_{j_k}$, а при $1 \le k \le h-1$ на k-ой ветви нет дивизора из нашего набора, поэтому из [4] мы знаем, что $q_k\overline{\nu}(g_k) = \overline{m}_{i_k}$ при $1 \le k \le h-1$, откуда и получаем искомую формулу. Докажем теперь утверждение теоремы для случая $h=2$. Идея доказательства заключается в том, чтобы свести интегрирование по пространству $\mathbb{PC}[x,y]$ к интегрированию по его гораздо более простому подмножеству. Пусть $g_2 = g_1^{q_1} + a g_0^{\overline{\alpha}_0}$. Положим $f_\lambda = g_1^{q_1} + \lambda g_0^{\overline{\alpha}_0}$. Конструктивное подмножество $V \subset \mathbb{PC}[x,y]$ назовём существенным, если

$$\int\limits_{\mathbb{PC}[x,y]} \overline{t}^{\overline{\nu}} d\chi = \int\limits_{V} \overline{t}^{\overline{\nu}} d\chi$$

Чтобы доказать, что некоторое подмножество V является существенным достаточно его дополнение расслоить на торы положительной размерности, вдоль которых функция $\overline{t}^{\overline{\nu}}$ постоянна. Положим $W \subset \mathbb{PC}[x,y]$ – подмножество кривых вида $\{g_0^{\alpha_0} g_1^{\alpha_1} \prod\limits_i f_{\lambda_i} = 0\}$, $\alpha_1 < q_1$. Докажем, что W является существенным. Действительно рассмотрим произвольную функцию g. Разложим её по базису 2-ого уровня:

$$g = \sum_{\substack{i,k\\ j<q_1}} a_{ijk} g_0^i g_1^j g_2^k.$$

Рассмотрим семейство кривых $\{g_{\overline{\lambda}} = 0\}$, где $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{q_1-1})$, $\lambda_s \in \mathbb{C}^*$ и

$$g_{\overline{\lambda}} = \sum_{j=0}^{q_1-1} \lambda_j g_1^j \sum_{i,k} a_{ijk} g_0^i g_2^k.$$

Докажем, что функция $\overline{t}^{\overline{\nu}}$ постоянна вдоль этого семейства. По лемме 2 для этого достаточно доказать что множества ненулевых коэффициентов в разложениях по 1-ому и 2-ому уровням постоянны вдоль семейства. Для второго уровня это очевидно. Разложение по базису 1-ого уровня имеет вид

$$g_{\overline{\lambda}} = \sum_{j=0}^{q_1-1} \lambda_j g_1^j \sum_{i,k} a_{ijk} g_0^i (g_1^{q_1} + a g_0^{\overline{\alpha}_0})^k.$$

Множества мономов в выражениях $g_1^j \sum_{i,k} a_{ijk} g_0^i (g_1^{q_1} + a g_0^{\overline{\alpha}_0})^k$ при различных j не пересекаются друг с другом, поэтому множество ненулевых коэффициентов на первом уровне тоже не меняется. Полученное семейство изоморфно тору некоторой размерности. Выкидываем все те кривые, для которых размерность тора положительна и получаем, что множество кривых вида

$$\{g_1^j \sum_{i,k} a_{ik} g_0^i g_2^k = 0\}, j < q_1,$$

является существенным. Преобразуем это выражение следующим образом:

$$g_1^j \sum_{i,k} a_{ik} g_0^i g_2^k = g_1^j \sum_s \sum_{i+\overline{\alpha}_0 k = s} a_{ik} g_0^i g_2^k.$$

Рассмотрим семейство кривых $\{g_{\overline{\lambda}} = 0\}$, где $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, $\lambda_s \in \mathbb{C}^*$ и

$$g_{\overline{\lambda}} = g_1^j \sum_s \lambda_s \sum_{i+\overline{\alpha}_0 k = s} a_{ik} g_0^i g_2^k.$$

Докажем, что функция $\overline{t}^{\overline{\nu}}$ постоянна вдоль этого семейства. Разложим $g_{\overline{\lambda}}$ по базису первого уровня. Легко видеть, что множества мономов в суммах $\sum_{i+\overline{\alpha}_0 k=s} a_{ik} g_0^i (g_1^{q_1} + a g_0^{\overline{\alpha}_0})^k$ при различных s не пересекаются друг с другом и значит внутри семейства множество ненулевых коэффициентов в разложении по базису 1-ого уровня постоянно. Следовательно по лемме 2 функция $\overline{t}^{\overline{\nu}}$ постоянна вдоль этого семейства. Опять выкидывая торы положительной размерности, мы заключаем, что множество кривых вида

$$\{g_1^j \sum_{i+\overline{\alpha}_0 k = s} a_{ik} g_0^i g_2^k = 0\}, j < q_1,$$

является существенным. Легко видеть, что полученное множество совпадает с множеством кривых вида $\{g_0^{\alpha_0} g_1^{\alpha_1} \prod\limits_i (g_2 + \lambda_i g_0^{\overline{\alpha}_0}) = 0\}$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}, \alpha_1 < q_1$, которое совпадает с множеством W. Из [4] и [5] мы знаем, что кривая $\{f_\lambda = 0\}$ при $\lambda \neq 0, a$ трансверсально с кратностью 1 пересекает дивизор $\overset{\bullet}{E}_{i_1}$ и при этом каждой точке на этом дивизоре соответствует единственный параметр λ. Для топологического пространства Y через $S^k Y$ обозначим его k-ую симметрическую степень. Положим $X = p_0 \cup p_1 \cup p_2 \cup \overset{\bullet}{E}_{i_1}$, где p_s – точка пересечения E_{j_s} и $_s$. Каждой кривой $g \in W$ сопоставим точки её пересечения с дивизорами из $\mathcal{D}$, учитывая кратности. Это отображение устанавливает изоморфизм

$$W \cong \bigcup_{k \geq 0} S^k X = \left(\prod_{s=0}^{2} \bigcup_{k \geq 0} S^k p_s \right) \times \bigcup_{k \geq 0} S^k \overset{\bullet}{E}_{i_1}.$$

Искомый интеграл таким образом равен

$$\int_W \underline{t}^{\underline{\nu}} d\chi = \left(\prod_{s=0}^{2} \sum_{k \geq 0} \chi(S^k p_s) \underline{t}^{k \underline{m}_{j_s}} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \chi(S^k \overset{\bullet}{E}_{i_1}) \underline{t}^{k \underline{m}_{i_1}} \right) =$$

$$= (1 - \underline{t}^{\underline{m}_{i_1}})^{-\chi(\overset{\bullet}{E}_{i_1})} \prod_{s=0}^{2} (1 - \underline{t}^{\underline{m}_{j_s}})^{-\chi(p_s)},$$

где мы воспользовались формулой $\sum_{k=0}^{\infty} \chi(S^k Y) t^k = (1-t)^{-\chi(Y)}$. Полученная формула совпадает с искомой если заметить, что $\chi(p_s) = \chi(\overset{\bullet}{E}_{j_s})$. □

Список литературы

[1] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.: *The Alexander polynomial of a plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic*, Int. Journal of Mathematics, **14** (2003), No. 1, 47–54.

[2] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade: *Multi-index filtrations corresponding to curves with one place at infinity and their Poincare series*, arXiv:math/0506549.

[3] Viro, O. Ya. Some integral calculus based on Euler characteristic. Topology and geometry—Rohlin Seminar, 127–138, Lecture Notes in Math., 1346, Springer, Berlin, 1988.

[4] M. Suzuki: *Affine plane curves with one place at infinity*, Annales Inst. Fourier, **49** (1999), 375–404.

[5] M. Fujimoto, M. Suzuki: *Construction of affine plane curves with one place at infinity*, Osaka J. Math., **39** (2002), 1005–1027.

[6] H. Pinkham: *Courbes planes ayant une seule place a l'infini, Seminaire sur les singularites des surfaces*, Ecole polytechnique, Annee 1977–1978.