Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

# $SU$-бордизмы

Курсовая работа

Черных Георгий
403 группа

Научный руководитель:
Панов Т. Е.

2017 г.

## Предварительные сведения

Далее все многообразия подразумеваются компактными.

Определение 1. Вещественное векторное расслоение $\xi$ над многообразием $M$ называется **стабильно комплексным**, если существует такое $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что $\xi \oplus \mathbb{R}^k$ изоморфно овеществлению некоторого комплексного расслоения над $M$. Этот изоморфизм и комплексное расслоение задают стабильно комплексную структуру на $\xi$.

Стабильно комплексные структуры, определяемые комплексными расслоениями $\zeta_1$ и $\zeta_2$, эквивалентны, если существуют $k_1$, $k_2 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такие, что $\zeta_1 \oplus \mathbb{C}^{k_1} \cong \cong \zeta_2 \oplus \mathbb{C}^{k_2}$ как комплексные расслоения.

Само многообразие называется **стабильно комплексным**, если стабильно комплексно его касательное расслоение $\mathcal{T}M$.

Для стабильно комплексных расслоений определены характеристические классы Чженя, а именно, ими считаются классы Чженя соответствующего комплексного расслоения. Значит, также определены и все остальные харкатеристические классы комплексных расслоений. Мы будем их обозначать просто $c(\xi)$ без указания на изоморфное комплексное расслоение.

В частности, для стабильно комплексных многообразий определены характеристические числа: $\langle c_1^{i_1} \dots c_n^{i_n}(\mathcal{T}M), [M]\rangle$.

Стабильно комплексная структура естественно индуцируется на край многообразия, а значит, можно рассматривать соответствующую группу **унитарных бордизмов $\Omega^U$**.

Далее многообразия обычно будут подразумеваться стабильно комплексными.

Определение 2. $SU$**-структурой** на многообразии $M$ называется такая стабильно комплексная структура, что у соответствующего комплексного расслоения первый класс Чженя равен нулю (что равносильно тривиальности детерминанта, то есть соответствует вещественному понятию ориентируемости). Соответствующая группа **специальных унитарных бордизмов ($SU$-бордизмов)** обозначается через $\Omega^{SU}$.

Для дальнейшего нам понадобится гомотопическое описание групп бордизмов:

Теорема Понтрягина–Тома

$$\Omega_n^{SU} \cong \pi_n(\mathbf{TBSU}) = \lim_{r\to\infty} \pi_{n+2r}(TBSU_r),$$

*где $TBSU_k$ — пространство Тома универсального расслоения $\gamma^k$ над классифицирующим пространством $BSU_k$ специальной унитарной группы $SU(k)$, а отображения гомотопических групп суть композиции отображения двойной надстройки и отображения $Tj_k\colon T(j_k^*\gamma^{k+1}) = T(\gamma^k \oplus \mathbb{R}^2) = \Sigma^2 TBSU_k \to TBSU_{k+1}$, где $j_k\colon BSU_k \to BSU_{k+1}$ — естественное отображение.*

Структура кольца унитарных бордизмов была вычислена Милнором и Новиковым:

Теорема

*Кольцо $\Omega^U$ является кольцом многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ с $\deg x_i = 2i$. Два многообразия бордантны в $\Omega^U$ тогда и только тогда, когда совпадают их целочисленные характеристические числа. Многообразие $M^{2i}$ может быть взято в качестве мультипликативного образующего тогда и только тогда, когда*

$$s_i(M^{2i}) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } i+1 \neq p^s \text{ ни для какого простого } p \\ \pm p, & \text{если } i+1 = p^s \text{ для некоторого простого } p \end{cases},$$

*где $s_i$ — характеристическое число, отвечающее характеристическому классу, соответствующему $i$-ой степенной сумме.*

## Основные вычисления

Структура же $\Omega^{SU}$ гораздо сложнее. Попробуем её описать. Для начала докажем следующее

Предложение

*Группы $\Omega^{SU}_n$ конечно порождены и кольцо $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Q}$ есть кольцо многочленов $\mathbb{Q}[x_i,\, i > 1]$ с $\deg x_i = 2i$.*

*Доказательство.* Будем считать известным, что $H^*(BSU_n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_i(\gamma^n),\, 1 < i \leqslant n]$. Тогда по теореме об изоморфизме Тома группа $H^n(\mathbf{TBSU}; \mathbb{Z}) = \lim\limits_{r \to \infty} H^{n+2r}(TBSU_r; \mathbb{Z})$ изоморфна группе $H^n(BSU_r; \mathbb{Z})$ для достаточно большого $r$, ввиду стабилизации этих групп по $r$. В частности, она свободна. По теореме об универсальных коэффициентах $H_n(\mathbf{TBSU}; \mathbb{Z})$ также свободна и того же ранга. Отсюда по обобщённой теореме Уайтхеда вытекает конечнопорождённость $\Omega^{SU}_n$.

Так как $TBSU_r$ является $(2r-1)$-связным, то по теореме Серра ранг группы $\Omega^{SU}_n$ совпадает с рангом $H^n(\mathbf{TBSU}; \mathbb{Z})$. Следовательно, $\Omega^{SU}_n \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(\mathbf{TBSU}; \mathbb{Q}) \cong H_n(\mathbf{BSU}; \mathbb{Q})$. То есть, размерности однородных компонент подходящие. Осталось проверить, что кольцо $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Q}$ полиномиальное.

Но это вытекает из следующего. Рассмотрим подмногообразия $M^{2n}$ в $\mathbb{CP}^{n+1}$, двойственные классу $c_1(\mathcal{T}\mathbb{CP}^{n+1})$. Тогда это $SU$-многообразия и $c(M^{2n}) = \frac{(1+x)^{n+2}}{1+(n+2)x}$, так что $s_n(M^{2n}) = ((n+2)x^n - ((n+2)x)^n)(n+2)x[\mathbb{CP}^{n+1}] = (n+2)^2 - (n+2)^{n+1} \neq 0$ при $n > 1$. Для разбиения $\omega = (i_1, \ldots, i_r)$ из чисел $i_k > 1$ обозначим через $M_\omega$ многообразие $M^{2i_1} \times \ldots \times M^{2i_r}$. Тогда, как несложно видеть, матрица $(s_{\omega'}(M_\omega))$ (для разбиений без единиц фиксированного числа $n$, упорядоченных лексикографически) треугольная с ненулевыми элементами на диагонали. Действительно,

$$s_{\omega'}(M_\omega) = \sum_{\omega_1 \cup \ldots \cup \omega_r = \omega'} s_{\omega_1}(M^{2i_1}) \ldots s_{\omega_r}(M^{2i_r})$$

Тогда при $\omega' < \omega$ число $s_{\omega'}(M_\omega)$ равно нулю, так как в этом случае $\omega'$ не может быть измельчением $\omega$ (а значит, все слагаемые в сумме равны нулю, так как $s_{\tilde{\omega}}(M^{2i}) = 0$, если сумма чисел $\tilde{\omega}$ не равна $i$). На диагонали же стоят числа $s_\omega(M_\omega) = \prod\limits_k s_{i_k}(M^{2i_k}) \neq 0$. Значит, многообразия $M_\omega$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Так как их количество в точности равно размерности $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Q}$, то это базис. Так как это мономы, получаем требуемое утверждение с $x_i = M^{2i}$. $\square$

Вышеописанное рассуждение показывает совершенно аналогично, что $M_\omega$ не зависимы также и в $\Omega^U \otimes \mathbb{Q}$. То есть, гомоморфизм забывания $F \otimes \mathbb{1}\colon \Omega^{SU} \otimes \otimes \mathbb{Q} \to \Omega^U \otimes \mathbb{Q}$ инъективен. Значит, в ядре настоящего гомоморфизма забывания могут лежать лишь элементы конечного порядка. С другой стороны, так как $\Omega^U$ не имеет кручения, то все элементы конечного порядка лежат в ядре.

Таким образом получено

Следствие

*Ядро гомоморфизма забывания $F\colon \Omega^{SU} \to \Omega^U$ совпадает с подгруппой кручения в $\Omega^{SU}$.*

Для исследования нечётно-примарной структуры нам понадобится ряд предварительных рассмотрений.

Алгеброй Стинрода $\mathcal{A}_p$ для простого числа $p$ называется градуированная алгебра всех стабильных когомологических операций над $\mathbb{Z}_p$, то есть, $(\mathcal{A}_p)^i = = H^{i+n}(K(\mathbb{Z}_p, n); \mathbb{Z}_p)$, $n > i$.

Для нечётного простого $p$ известно, что:

1) $\mathcal{A}_p$ является ассоциативной градуированной алгеброй над $\mathbb{Z}_p$, порождённой операциями $\beta$ степени 1 и $\mathcal{P}^i$ степени $2i(p-1)$, все соотношения между которыми даются соотношениями Адема:

$$\beta^2 = 0,$$

$$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} \mathcal{P}^{a+b-t}\mathcal{P}^t,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^a\beta\mathcal{P}^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)}{a-pt} \beta\mathcal{P}^{a+b-t}\mathcal{P}^t + \\ + \sum_{t=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} \mathcal{P}^{a+b-t}\beta\mathcal{P}^t\end{aligned}$$

2) При естественном спаривании $\mathcal{A}_p \otimes H^*(X, A; \mathbb{Z}_p) \to H^*(X, A; \mathbb{Z}_p)$ выполняется следующее:

а) $\beta$ соответствует кограничному оператору Бокштейна для последовательности коэффициентов $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$

б) $\beta(xy) = (\beta x)y + (-1)^{\dim x} x(\beta y)$

$\mathcal{P}^i$ соответствуют степеням Стинрода и обладают следующими свойствами:

А) $\mathcal{P}^i$ - аддитивна

Б) $\mathcal{P}^0 = 1$

В) $\mathcal{P}^i u = u^p$ при $\dim u = 2i$

Г) $\mathcal{P}^i u = 0$ при $\dim u < 2i$

Д) $\mathcal{P}^i(xy) = \sum\limits_{j+k=i} \mathcal{P}^j x \cdot \mathcal{P}^k y$

Можно, следуя Милнору, определить диагональное отображение $\Delta\colon \mathcal{A}_p \to \to \mathcal{A}_p \otimes \mathcal{A}_p$, $\Delta(\beta) = \beta \otimes 1 + 1 \otimes \beta$, $\Delta(\mathcal{P}^i) = \sum\limits_{j+k=i} \mathcal{P}^j \otimes \mathcal{P}^k$, превращающее $\mathcal{A}_p$ в связную алгебру Хопфа над $\mathbb{Z}_p$.

Сумма Уитни векторных расслоений определяет отображение $TBSU_k \bigwedge TBSU_m \to$ $\to TBSU_{k+m}$, индуцирующее диагональное отображение

$$\psi\colon H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p) \to H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p) \otimes H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p),$$

которое превращает $H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$ в связную коалгебру над $\mathbb{Z}_p$ с коединицей $U \in H^0(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$.

Так как группа $H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$ состоит только из элементов чётной степени, то $\beta$ действует на ней тривиально. Следовательно, $H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$ является модулем над алгеброй Хопфа $\mathcal{A}_p/(\beta)$. При этом $\psi$ является гомоморфизмом $\mathcal{A}_p/(\beta)$-модулей.

Кроме того, верно следующее

Утверждение

*Гомоморфизм $\nu\colon \mathcal{A}_p/(\beta) \to H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$, $a \mapsto a(U)$ является мономорфизмом.*

Для доказательства можно рассмотреть классифицирующее отображение $h\colon BSp \to BSU$ (т.к. симплектическое расслоение является $SU$-расслоением) и воспользоваться тем, что $(Th)^*\nu$ - мономорфизм (этот факт мы примем без доказательства).

Теперь пришло время сформулировать один алгебраический результат.

Теорема Милнора–Мура

*Пусть $A$ — связная градуированная алгебра Хопфа над полем $\mathbb{F}$, а $M$ — связная градуированная коалгебра над $\mathbb{F}$ с коединицей $1 \in M_0$, являющаяся левым модулем над $A$, таким, что диагональное отображение $\psi\colon M \to M \otimes M$ есть гомоморфизм $A$-модулей. Пусть также гомоморфизм $\nu\colon A \to M$, $a \mapsto a \cdot 1$ является мономорфизмом.*

*Тогда $M$ является свободным левым $A$-модулем.*

*Доказательство.* Пусть $A^+$ — подгруппа элементов положительной степени в $A$. Рассмотрим проекцию $\pi\colon M \to N = M/A^+M$. Пусть $f\colon N \to M$ есть $\mathbb{F}$-линейное правое обратное отображение для $\pi$, т.е. $\pi f = \mathbb{1}$. Определим гомоморфизм $A$-модулей $\varphi\colon A \otimes N \to M$ по формуле $\varphi(a \otimes n) = af(n)$. Покажем, что $\varphi$ — изоморфизм. Тогда $M$ будет свободным $A$-модулем, как и $A \otimes N$.

1) Эпиморфность. Так как $(A^+M) \cap M_0 = 0$, то в нулевой размерности $\varphi\colon A_0 \otimes N_0 \to M_0$ есть тождлественное отображение поля $\mathbb{F}$. Предположим по индукции, что $\varphi\colon (A \otimes N)_i \to M_i$ - эпиморфизм при $i < k$.

Пусть $x \in M_k$. Тогда $\pi(x - \varphi(1 \otimes \pi(x))) = \pi(x) - \pi(f(\pi(x))) = \pi(x) - \pi(x) = 0$. То есть, $x - \varphi(1 \otimes \pi(x)) = \sum a_i x_i$, $a_i \in A^+$, $x_i \in M$. Но тогда $\deg x_i < k$, а значит, $x_i = \varphi(y_i)$. Но тогда $x = \varphi(1 \otimes \pi(x) + \sum a_i y_i)$ и получаем, что $\varphi\colon (A \otimes N)_k \to M_k$ — сюръективно.

2) Мономорфность. Рассмотрим последовтаельность гомоморфизмов $A$-модулей:

$$A \otimes N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M \otimes M \xrightarrow{\mathbb{1}\otimes\pi} M \otimes N.$$

Имеем

$$1 \otimes n \to f(n) \to f(n) \otimes 1 + 1 \otimes f(n) + \ldots \to f(n) \otimes 1 + 1 \otimes n + \ldots,$$

или $a\otimes n \to a\cdot 1\otimes n+e$, где $e \in \bigcup\limits_{p<\deg n} M\otimes N_p$. Взяв ещё композицию с проекцией $M\otimes N$ на $M\otimes N_{\deg n}$ и получаем отображение $A\otimes N_{\deg n} \to M\otimes N_{\deg n}$, $a\otimes n \mapsto$ $\mapsto a\cdot 1\otimes n = \nu(a)\otimes n$, которое инъективно. Следовательно, вся композиция $(\mathbb{1}\otimes\pi)\circ\psi\circ\varphi$ мономорфна, а значит, мономорфен и $\varphi$. $\square$

Таким образом, мы получаем, что $H^*(\mathbf{TBSU};\mathbb{Z}_p)$ является свободным $\mathcal{A}_p/(\beta)$-модулем для нечётных простых $p$.

Осталось применить одно общее утверждение из гомотопической топологии:

Теорема Милнора

*Если $\mathbf{X}$ — спектр, такой, что группа $H^*(\mathbf{X};\mathbb{Z})$ не имеет $p$-кручения и $H^*(\mathbf{X};\mathbb{Z}_p)$ является свободным $\mathcal{A}_p/(\beta)$-модулем, то гомотопические группы спектра $\mathbf{X}$ не имеют $p$-кручения.*

Эта теорема была доказана Милнором с помощью спектральной последовательности Адамса и милноровского описания алгебры Стинрода (см. [3]).

В итоге получаем следующее предложение:

Теорема

*Всё кручение группы $\Omega^{SU}$ является 2-примарным.*

Теперь осталось вычислить кольцевую структуру.

Рассмотрим следующие рациональные характеристические классы: $s_\omega(e)$, соответствующий симметрической функции $s_\omega$ от переменных $e^{x_i}-1$, и класс $\mathcal{S}$, соответствующий функции $\prod \frac{x_i}{e^{x_i}-1}$. Можно определить функцию $\rho\colon H_*(BU;\mathbb{Q}) \to$ $\to \mathbb{Q}[\alpha_i]$ по формуле $\rho(\alpha) = \sum\limits_{\omega}(s_\omega(e)\mathcal{S})[\alpha]\alpha_\omega$, где $\omega = (i_1,\ldots,i_r)$, $\alpha_\omega = \alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_r}$.

Это кольцевой гомоморфизм. Обозначим через $B_n \subset H_n(BU;\mathbb{Q}) =$ $= \mathrm{Hom}(H^n(BU;\mathbb{Q}))$ множество элементов $\alpha \in H_n(BU;\mathbb{Q})$, таких, что $\rho(\alpha) \in$ $\in \mathbb{Z}[\alpha_i]$. $B_* = \bigoplus\limits_n B_n$ - подкольцо в $H_*(BU;\mathbb{Q})$. Несложно видеть, что $B_* \subset$ $\subset H_*(BU;\mathbb{Z})$. Через $\rho_p$ обозначим приведение $\rho\colon B_* \to \mathbb{Z}[\alpha_i]$ по модулю $p$.

Для многообразия $M^n$ рассмотрим отображение $\tau(M)\colon H^*(BU;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$, переводящее характеристический класс $x$ в значение $x(\mathcal{T}M)$ на фундаментальном классе $[M]$. Это определяет кольцевой гомомрфизм $\tau\colon \Omega^U \to H_*(BU,\mathbb{Q})$. Можно доказать, что число $(s_\omega(e)\mathcal{S})[\tau(M)]$ является целым, т.е. $\tau(M) \in B_n$.

Скажем, что многочлен $P \in \mathbb{Z}_p[\alpha_i]$ имеет наибольший моном $\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_r}$, если для любого другого монома $\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_s}$ из $P$ либо $j_1+\ldots+j_s < i_1+\ldots+i_r$, либо $j_1+\ldots+j_s = i_1+\ldots+i_r$ и $s > r$. Наибольшие мономы (если есть) перемножаются при перемножении многочленов. Многочлены с различными наибольшими мономами линейно независимы.

Предложение

*Пусть $p$ - нечётное простое число. Тогда существуют $SU$-многообразия $M_i^p \in \Omega_{2i}^{SU}, i \geqslant 2$, такие, что элемент $\rho_p(\tau(M_i^p))$ имеет наибольший моном вида*:

1) $\alpha_i$, *если* $i \neq p^s, p^s-1$
2) $\alpha_{p^{s-1}}^p$, *если* $i = p^s$
3) $\alpha_{p^{s-1}-1}^p$, *если* $i = p^s-1$.

*Доказательство.* $\rho_p(\tau(M))$ есть приведение по модулю $p$ многочлена $\sum(s_\omega(e)\mathcal{S})[M]\alpha_\omega$. Для многообразия $M$ обозначим через $\partial M$ подмногообразие, двойственное классу $c_1$, которое является $SU$-многообразием.

1) Если $\dim M = 2i$, то $s_i(e)\mathcal{S}[M] = s_i(M)$. Поэтому достаточно выбрать разбиение $\omega = (i_1, \ldots, i_r)$ числа $i+1$, для которого $s_i(\partial(\mathbb{CP}^{i_1} \times \ldots \times \mathbb{CP}^{i_r})) \not\equiv 0 \pmod p$. Это можно сделать следующим образом:

a) $i,\ i+1 \not\equiv 0 \pmod p : \omega = (1,\ 1,\ i-1)$;

b) $i+1 = p^r(pu+v), r > 0, 0 < v < p, i \neq p^s - 1 : \omega = (p^r v, p^{r+1}u)$ при $u > 0$ и $\omega = (p^r, p^r(v-1))$ при $u = 0$;

c) $i = p^r(pu+v), r > 0, 0 < v < p, i \neq p^s : \omega = (1, p^r v, p^{r+1}u)$ при $u > 0$ и $\omega = (1, p^r, p^r(v-1))$ при $u = 0$.

2) Для $i = p^s$ положим $M_i^p = \partial(\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^{p^{s-1}} \times \ldots \times \mathbb{CP}^{p^{s-1}})$, где взято $p$ экземпляров $\mathbb{CP}^{p^{s-1}}$. Тогда $c(M_i^p) = (1+x)^2 \frac{\prod_{j=1}^{p}(1+x_j)^{p^{s-1}+1}}{1+2x+(p^{s-1}+1)\sum x_j}$. Члены $\sum x_j$ вносят в характеристические числа сумму $p$ одинаковых слагаемых, поэтому вычисления по модулю $p$ можно проводить для многообразия $M$, двойственного к классу $2x$. Но числа Чженя $\bmod p$ у такого многообразия будут точно такие же, как и у $2(\mathbb{CP}^{p^{s-1}})^p$. Тогда для разбиения числа $i$ имеем $s_\omega(e)\mathcal{S}[M_i^p] = s_\omega(M_i^p) \equiv 2s_\omega((\mathbb{CP}^{p^{s-1}})^p) = 2s_\omega(e)\mathcal{S}((\mathbb{CP}^{p^{s-1}})^p)$. Так как $\rho_p(\tau(\mathbb{CP}^{p^{s-1}}))$ имеет наибольший моном вида $\alpha_{p^{s-1}}$, то всё доказано.

3) $i = p^s - 1, s \leqslant 1$. Положим $M = M_i^p = \partial((\mathbb{CP}^{p^{s-1}})^p)$. Обозначим через $H \subset (\mathbb{CP}^{p^{s-1}})^p$ подмногообразие, двойственное $\sum x_j$. $c(M) = \frac{\prod_{j=1}^{p}(1+x_j)^{p^{s-1}+1}}{1+(p^{s-1}+1)\sum x_j}$, $c(H) = \frac{\prod_{j=1}^{p}(1+x_j)^{p^{s-1}+1}}{1+\sum x_j}$. Таким образом, для $s > 1$ имеем $c_\omega(M) = c_\omega(H) + p^{s-1}v_\omega$, где $v_\omega$ — симметричсекая функция от $x_j$, т.е. $v_\omega = a\sum x_1^{p^{s-1}} \ldots x_j^{p^{s-1}-1} \ldots x_p^{p^{s-1}}$. Умножая на $(p^{s-1}+1)\sum x_j$ и вычисляя значение на фундаментальном классе произведения многообразий $\mathbb{CP}^{p^{s-1}}$, получаем, что

$$c_\omega(M) \equiv (p^{s-1}+1)c_\omega(H) \pmod{p^2}.$$

Можно показать, что для любого многообразия $V$ размерности $p^s - 1$ и числа $k \leqslant p^s - p + 1$ имеет место формула $s_\mu(e)\mathcal{S}[V] = \sum \frac{a_\omega}{b_\omega} c_\omega[V]$, где $\mu$ — разбиение числа $k$, $a_\omega, b_\omega \in \mathbb{Z}$ и $b_\omega \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Следовательно, $s_\mu(e)\mathcal{S}[M] \equiv (p^{s-1}+1)s_\mu(e)\mathcal{S}[H] \pmod p$. Тогда $M$ имеет тот же наибольший моном, что и у известного многообразия Милнора $H$, у которого он, как известно, равен как раз $\alpha^p_{p^{s-1}-1}$.

Для $s = 1$ имеем (из-за симметрии по переменным $x_j$) $c_\omega(M) \equiv 0 \pmod p$. Поэтому $s_\mu(e)\mathcal{S}[M] = \sum \frac{a_\omega}{b_\omega} c_\omega[M] \equiv 0 \pmod p$ (в этом случае $b_\omega \not\equiv 0 \pmod p$) для разбиений $\mu$ чисел $k > 0$. Таким образом, нужно только проверить, что $\mathcal{S}[M] \not\equiv 0 \pmod p$. Прямым вычислением можно убедиться, что $\mathcal{S}[M] \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod p$. □

Таким образом, мы получаем, что многочлены $\rho_p(\tau(M_{i_1}^p \times \ldots \times M_{i_r}^p)) = \rho_p(\tau(M_{i_1}^p) \ldots \rho_p(M_{i_r}^p))$ линейно независимы в кольце $\mathbb{Z}_p[\alpha_i]$, так как у них разные наибольшие мономы.

Докажем теперь следующее алгебраическое

Утверждение

*Пусть $R_*$ — градуированное подкольцо градуированного кольца полиномов $Q_* = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\alpha_i, i > 1]$. Если для каждого простого нечётного $p$ существуют элементы $c_i^p \in R_i, i > 1$, такие, что $R_* \otimes \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p[c_i^p]$, то кольцо $R_*$ является* *кольцом многочленов* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][b_i, i > 1]$. *Если* $S_* \subset R_*$ — *подкольцо, содержащее все элементы* $c_i^p$, *то* $S_* = R_*$.

*Доказательство.* Так как $R_n \subset Q_n$, то $R_n$ — свободный $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-модуль ранга $\geqslant \pi(n)$, где $\pi(n)$ — количество разбиений без 1 числа $n$ (ранг $Q_n$). Но так как $R_n \otimes \mathbb{Z}_p = (R_* \otimes \mathbb{Z}_p)_n$ является $\pi(n)$-мерным векторным пространством, то ранг модуля $R_n$ в точности равен $\pi(n)$.

Пусть $a_\omega = \sum \lambda_\omega^{\omega'} \alpha_{\omega'}$ — некоторый базис $R_n$ ($\lambda_\omega^{\omega'} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$). Применяя обычный процесс приведения к треугольному виду из алгебры, можно считать, что $\lambda_\omega^{(n)} = 0$ при $\omega \neq (n)$ и $\lambda_{(n)}^{(n)} \neq 0$. Обозначим через $b_n$ элемент $a_{(n)}$. Так как $\lambda_{(n)}^{(n)} \neq 0$, то по индукции можно выразить все $\alpha_i$ через многочлены с рациональными коэффициентами от $b_j$, $j \leqslant i$. Следовательно, базис в $R_n$ задаётся элементами $b_n$ и $a_\omega = \sum \mu_\omega^{\omega'} b_{\omega'}$, где $\omega, \omega'$ — разбиения без 1 числа $n$, не равные $(n)$, $\mu_\omega^{\omega'} \in \mathbb{Q}$. Отсюда следует линейная независимость $b_\omega$.

Предположим по индукции, что в размерностях, меньших $n$, кольцо $R_*$ является кольцом полиномов от $b_i, i < n$. Пусть $L$ и $M$ — свободные $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-модули, порождённые $a_\omega$ и $b_\omega$ соответственно ($\omega$ — разбиение $n$, $\omega \neq (n)$). Так как все $b_\omega$ выражаются через $a_{\omega'}$ без использования $a_(n) = b_n$, то $M \subset L$. Так как эти модули имеют одинаковый ранг, то $M$ имеет конечный индекс в $L$, обязательно нечётный.

Пусть теперь $p$ — нечётное простое число. Так как $R_*$ — кольцо многочленов от $b_i$ в размерностях, меньших $n$, то все элементы $c_\omega^p, \omega \neq (n)$ лежат в $M$. Значит, образ $M$ в $R_n \otimes \mathbb{Z}_p$ имеет ту же самую размерность $(\pi(n) - 1)$, что и образ $L$. Следовательно, индекс $M$ в $L$ не может делиться на $p$. Так как это верно для любого нечётного простого $p$, то индекс равен 1, то есть, $M = L$. Следовательно, $R_n$ имеет базис из $b_\omega$ (уже для всех разбиений), то есть, $R_*$ является кольцом многочленов от $b_i, i < n + 1$ в размерностях, меньших $n + 1$.

По индукции получаем, что $R_* = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][b_i, i > 1]$.

$S_n$ лежит в $R_n$ как свободный подмодуль, причём эпиморфно отображается на $R_n \otimes \mathbb{Z}_p$. Поэтому ранг $S_n$ равен рангу $R_n$, а индекс как подгруппы не делится на $p$. Значит, $S_n = R_n$. □

Применяя доказанные выше утверждения к $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\alpha_i, i > 1] = H_*(BSU; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $R_* = B_* \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cap H_*(BSU; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, $S_* = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \otimes \tau(\Omega^{SU})$ и $c_i^p = \tau(M_i^p)$ и используя инъективность $\tau$, получаем в итоге

Утверждение
*Кольцо* $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ *является кольцом многочленов* $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][x_{2i}, i > 1]$.

## Заключительные замечания

Аналогично унитарному случаю можно проверить, что классы мультипликативных образующих в $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ задаются определёнными значениями некоторых целочисленных характеристических чисел.

Было бы интересно найти подобные образующие в некоторых хорошо изученных классах многообразий.

Например, торические многообразия вовсе не могут быть $SU$-многообразиями, а квазиторические — представляют ноль в $\Omega^U$ в размерностях $< 10$.

В работе [2] найдены квазиторические представители мультипликативных образующих в $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ для размерностей, начиная с 10. Ответ получен в виде целочисленных комбинаций исходных многообразий двух типов: $\tilde{L}(n_1, n_2)$ и $\tilde{N}(n_1, n_2)$.

$\tilde{L}(n_1, n_2)$ определяется следующим образом. $n_1 = 2k_1$ — чётно, $n_2 = 2k_2 + 1$ — нечётно. Рассмотрим $L(n_1, n_2) = \mathbb{CP}(\eta \oplus \mathbb{C}^{n_2})$, где $\eta$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}^{n_1}$. Тогда мы имеем

$$\mathcal{T}L(n_1, n_2) \oplus \mathbb{C}^2 \cong \underbrace{p^*\bar{\eta} \oplus \ldots \oplus p^*\bar{\eta}}_{n_1+1} \oplus (\bar{\gamma} \otimes p^*\eta) \oplus \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \ldots \oplus \bar{\gamma}}_{n_2},$$

где $p$ — проекция расслоения $\eta \oplus \mathbb{C}^{n_2}$, $\gamma$ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}(\eta \oplus \mathbb{C}^{n_2})$.

Тогда $\tilde{L}(n_1, n_2)$ получается из $L(n_1, n_2)$ лишь сменой стабильно комплексной структуры на следующую:

$$\mathcal{T}L(n_1, n_2) \oplus \mathbb{R}^4 \cong$$
$$\cong \underbrace{p^*\bar{\eta} \oplus p^*\eta \oplus \ldots \oplus p^*\bar{\eta} \oplus p^*\eta}_{2k_1} \oplus p^*\bar{\eta} \oplus (\bar{\gamma} \otimes p^*\eta) \oplus \underbrace{\bar{\gamma} \oplus \gamma \oplus \ldots \oplus \bar{\gamma} \oplus \gamma}_{2k_2} \oplus \gamma$$

Эта стабильно комплексная структура уже является $SU$-структурой.

Оказывается, исходное многообразие $L(n_1, n_2)$ является торическим многообразием. Докажем чуть более общее

Утверждение

*Многообразие* $V = \mathbb{CP}(\eta^{\otimes i_1} \oplus \ldots \oplus \eta^{i_{n_2}} \oplus \mathbb{C})$, *где* $\eta$ — *тавтологическое линейное расслоение над* $\mathbb{CP}^{n_1}$, *является торическим многообразием с матрицей*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & & \\ & & & i_1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ & & & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & i_{n_2} & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

*в которой левый и правый единичные блоки имеют размеры* $n_1$ *и* $n_2$ *соответственно.*

Многогранник тут комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов $\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$.

*Доказательство.* Обозначим описанное выше торическое многообразие через $U$. Известно, что для симплициального веера $\Sigma$ соответствующее торическое многообразие диффеоморфно фактору $U(\Sigma)/G$.

Здесь $U(\Sigma) = \mathbb{C}^m \setminus \{\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^m \mid \prod\limits_{j \notin g(\sigma)} z_j = 0 \;\forall \sigma \in \Sigma \}$, где $m$ — количество порождающих векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ веера $\Sigma$, $g(\sigma)$ — множество номеров $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset [m]$ векторов, порождающих конус $\sigma$.

$G = \{\, \mathbf{z} \in (\mathbb{C}^\times)^m \mid \prod\limits_{i=1}^{m} z_i^{a_{ij}} = 1 \;\forall j \in [n] \}$, где $\mathbf{a}_i = (a_{ij})$, $n$ — размерность объемлющего пространства.

В нашем случае $m = n_1 + n_2 + 2$, $n = n_1 + n_2$, векторы $\mathbf{a}_i$ стоят по столбцам матрицы, максимальные конусы веера получаются, если выбрать из первых $n_1 + 1$ векторов любые $n_1$ и из оставшихся $n_2 + 1$ любые $n_2$. Таким образом, получается следующее:

$U(\Sigma) = \mathbb{C}^{n_1+1+n_2+1} \setminus \{\, \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n_1+1+n_2+1} \mid z_i\, z_{n_1+1+j} = 0\ \forall i \in [n_1+1],$ $j \in [n_2+1] \,\} = (\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times (\mathbb{C}^{n_2+1} \setminus \mathbf{0}),$

$G \cong \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^{n_1+n_2+2},\ (z,w) \mapsto (\underbrace{z,\dots,z}_{n_1+1}, \frac{w}{z^{i_1}}, \dots, \frac{w}{z^{i_{n_2}}}, w).$

$$U = U(\Sigma)/G = ((\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times (\mathbb{C}^{n_2+1} \setminus \mathbf{0}))/(\mathbb{C}^\times_z \times \mathbb{C}^\times_w) = ((\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times$$
$$\times (\mathbb{C}^{n_2+1} \setminus \mathbf{0})/\mathbb{C}^\times_w)/\mathbb{C}^\times_z = (\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times_{\mathbb{C}^\times_z} \mathbb{C}P^{n_2} = \mathbb{C}P((\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times_{\mathbb{C}^\times_z} \mathbb{C}^{n_2+1})$$

А это $(\mathbb{C}^{n_1+1} \setminus \mathbf{0}) \times_{\mathbb{C}^\times_z} \mathbb{C}^{n_2+1}$ — как раз нужное нам расслоение. □

$\tilde{L}(n_1, n_2)$ также является квазиторическим многообразием над $\Delta^{n_1} \times \Delta^{n_2}$. Оно отличается от $L(n_1, n_2)$ лишь изменением ориентаций соответствующих характеристических подмногообразий.

$\tilde{N}(2k_1, 2k_2+1)$ аналогично получаются изменением стабильно комплексной структуры на проективизации суммы линейных расслоений над $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{2k_1}$. Оно является квазиторическим многообразием над $\Delta^1 \times \Delta^{2k_1} \times \Delta^{2k_2+1}$.

## Список литературы

[1] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov. Toric topology.
[2] Zhi Lu, Taras Panov. On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.
[3] Milnor J. On the Cobordism Ring $\Omega^*$ and a Complex Analogue, Part I
[4] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике.
[5] Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов.