Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

SU-бордизмы и спектральная последовательность Адамса-Новикова

Курсовая работа

Черных Георгий
503 группа

Научный руководитель:
Панов Т. Е.

2018 г.

Введение

В этой работе рассматривается подход С. П. Новикова к вычислению структуры $MSU^*(pt)$ с помощью спектральной последовательности типа Адамса в теории унитарных кобордизмов (см. статью Новикова 1967 года [Нов]). Эта спектральная последовательность оказывается довольно простой (по модулю знания начального члена), что позволяет получить многие факты о SU-бордизмах, полученные ранее более классическими методами (см., например, [CF] и [Ст]).

Предварительные сведения

Сначала сформулируем основную теорему о спектральной последовательности, которой мы будем пользоваться.

Теорема 1.1 (спектральная последовательность Адамса-Новикова) ([Нов], [Мищ], [В])

Для любого связного спектра X существует спектральная последовательность $(E_r^{p,q}, d_r)$, $r \geqslant 2$, обладающая следующими свойствами:

1) $d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$

2) $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p,q}_{A^U}(MU^*(X), MU^*(pt))$, где MU^* – теория комплексных кобордизмов, а A^U – соответствующая алгебра когомологических операций.

3) Существует фильтрация $\pi_n(X) = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} \supset \dots$, $\bigcap\limits_{s\geqslant 0} F^{s,n+s} = 0$, к которой присоединён предельный член: $E_\infty^{p,q} \cong F^{p,q}/F^{p+1,q+1}$.

4) Краевой гомоморфизм $\pi_n(X) = F^{0,n} \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} = \mathrm{Hom}^n(MU^*(X), MU^*(pt))$ совпадает с естественным отображением.

Кроме того, если спектр X – кольцевой, то спектральная последовательность мультипликативна.

Чтобы применить эту теорему к спектру MSU необходимо изучить структуру A^U-модуля $MU^*(MSU)$. Это было проделано С. П. Новиковым в работе [Нов] следующим образом.

Рассмотрим для начала следующее отображение $\gamma\colon MU^2(X) \to H^2(X;\mathbb{Z}) = [X, \mathbb{CP}^\infty] = [X, MU(1)] \hookrightarrow MU^2(X)$, где первое отображение – каноническая аугментация ε. (Как известно, это отображение не аддитивно, сумма переходит в формальную группу геометрических кобордизмов.)

SU-расслоения выделяются условием $c_1 = 0$ или равносильно $\gamma(cf_1) = 0$, так как $\varepsilon(cf_1) = c_1$. Тут cf_i - характеристические классы Коннера-Флойда в комплексных кобордизмах.

То есть, естественное отображение $BSU \to BU$ индуцирует в комплесквых кобордизмах эпиморфизм с ядром – идеалом, натянутым на $\gamma(cf_1)$: $MU^*(BSU) = MU^*(BU)/(\gamma(cf_1))$.

Применяя изоморфизмы Тома $\Phi\colon MU^*(BSU) \to MU^*(MSU)$ и $\Phi\colon MU^*(BU) \to MU^*(MU)$, получаем изоморфизм $MU^*(MSU) = MU^*(MU)/\Phi(\gamma(cf_1))$. Или, так как $MU^*(MU) = A^U$, $MU^*(MSU) = A^U/\Phi(\gamma(cf_1))$.

Это первое предварительное описание искомого A^U-модуля.

Определим теперь важные когомологические операции в A^U.

Пусть $\Delta_{(k_1,k_2)} = \Phi((\gamma(-cf_1))^{k_1}(\gamma(cf_1))^{k_2})$ (это общий способ – применяя изоморфизм Тома к некоторому характеристическому классу, получаем когомологическую операцию).

При естественном действии A^U на $\Omega^U_* = MU_*(pt)$ элементу $\Delta_{(k_1,k_2)}$ соответствует следующая операция: многообразие M^n переходит в подмногообразие двойственное расслоению $(\det TM)^{\oplus k_1} \oplus (\overline{\det TM})^{\oplus k_2}$.

Обозначим $\Delta_{1,0}$ через ∂, а $\Delta_{1,1}$ – через Δ. Эти операции подробно изучались в работах Коннера и Флойда по теории SU-бордизмов. В частности, в работе [CF] была построена операция χ такая, что $\Delta\chi = \mathrm{id}$. Новиков также расширил эту операцию до когомологической операции Ψ, такой что на кобордизмах точки она совпадает с операцией χ Коннера и Флойда. Она определяется следующим образом.

Пусть ξ – линейное расслоение над $\mathbb{CP}^n$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{CP}(\xi + \mathbb{C}^k)$ со стабильно комплексной структурой $\eta \otimes p^*(\overline{T\mathbb{CP}^n}) + k_1\eta + k_2\overline{\eta}$, где η - тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}(\xi + \mathbb{C}^k)$, $k_1 + k_2 = k$. Обозначим полученное U-многообразие через $P^{k_1,k_2}(\xi)$.

Получили элемент $(P^{(k_1,k_2)}(\xi), p) \in MU_*(\mathbb{CP}^n)$. По двойственности Пуанкаре-Атья имеем элемент $\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^*(\mathbb{CP}^n)$.

Для любого расслоения ξ над X положим $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) = \chi_{(k_1,k_2)}(\det \xi)$ (здесь рассматриваем элементы $\chi_{(k_1,k_2)}$ как характеристические классы в комплексных кобордизмах.) Таким образом получаем характеристический класс $\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^*(BU)$ и наконец искомую когомологическую операцию $\Psi_{(k_1,k_2)} = \Phi\chi_{(k_1,k_2)} \in MU^*(MU) = A^U$.

Операция $\Psi_{(1,1)} = \Psi$ на кобордизмах точки совпадает с операцией χ, детально изучавшейся Коннером и Флойдом в [CF], и сопоставляющей многообразию M^n многообразие $\mathbb{CP}(\overline{\det TM} \oplus \mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой $\eta \otimes p^*(\overline{\det TM}) + \eta + \overline{\eta}$.

Важным является следующее наблюдение С. П. Новикова:

Теорема 1.2 ([Нов])

Естественное представление A^U на Ω^U является точным, то есть, если операция $a \in A^U$ действует тривиально на кобордизмах точки, то она сама тривиальна.

(Это принципиальное отличие от, например, классической теории когомологий.)

Это наблюдение позволяет получать соотношения в алгебре A^U из уже известных соотношений операций на кобордизмах точки.

В частности, из $\Delta\chi = \mathrm{id}$ получаем мгновенно, что $\Delta\Psi = 1$ в A^U. Аналогично: $\Delta\partial = \partial\partial = 0$ и $\partial\Psi = 0$.

Отсюда мы уже получаем важное алгебраическое свойство:

$$a\partial + b\Delta = 0 \Rightarrow b = 0 \quad a, b \in A^U \tag{1}$$

Осталось сформулировать основную теорему необходимую для вычисления второго члена спектральной последовательности Адамса-Новикова для MSU.

Теорема 1.3 ([Нов])

1) A^U-модуль $U^*(MSU)$ изоморфен $A^U/(A^U\Delta + A^U\partial)$.

2) Левый аннулятор ∂ в A^U равен в точности $A^U\Delta + A^U\partial$.

Идея доказательства

Сначала устанавливается, что левый аннулятор ∂ состоит в точности из операций вида $\Phi(\gamma(cf_1)) \subset A^U$. Доказательство этого факта основано на следующем.

Рассматривается представление алгебры A^U на $U_*(BU)$: $a \mapsto \tilde{a}$, которое определяется как $\tilde{a}(x) = \tilde{a}(M, \xi) = (Y_\alpha, f_\alpha(\xi + TM) - TY_\alpha)$, где (M, ξ), $\xi \in K^0(M) = [M, BU]$ – представитель $x \in MU_*(BU)$, (Y_α, f_α) – элемент $MU_*(M)$, двойственный по Пуанкаре $\alpha(\xi) \in MU^*(M)$, $\alpha = \Phi^{-1}(a) \in MU^*(BU)$.

Это представление также точно, так в него можно вложить точное представление A^U на когомологиях точки.

Теперь мы имееим, что для SU-расслоения ξ над X получается $(X, \xi) = \tilde{\partial}((X, \xi) \otimes (\mathbb{CP}^1, \eta))$. То есть, образ $\tilde{\partial}$ есть в точности $MU_*(BSU) \subset MU_*(BU)$. Отсюда и из точности представления получаем, что левый аннулятор ∂ равняется $\Phi(\gamma(cf_1)) \subset A^U$.

Далее проверяется, что ядро естественного эпиморфизма $A^U/(A^U\Delta + A^U\partial) \to MU^*(MSU) = A^U/\Phi(\gamma(cf_1))$ есть прямое слагаемое, и его равенство нулю вытекает из следующего подсчёта размерностей.

$A^U\Delta$ – свободный модуль, изоморфный $A^U = MU^*(MU)$ (со сдвигом размерности на 4), так как у Δ есть правый обратный Ψ.

Из предыдущего следует, что $A^U\partial = A^U/Ann_L(\partial) = A^U/\Phi(\gamma(cf_1)) = MU^*(MSU)$ (со сдвигом размерности на 2).

Из этого получаем:

$$(A^U\Delta \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = (MU^{(*-4)}(MU) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = H^{(k-4)}(MU; \mathbb{Z})$$

$$(A^U\partial \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = (MU^{(*-2)}(MSU) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = H^{(k-2)}(MSU; \mathbb{Z})$$

$$(MU^*(MSU) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = H^k(MSU; \mathbb{Z})$$
$$(MU^*(MU) \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^k = H^k(MU; \mathbb{Z})$$

(так как $MU^*(MU) = H^*(MU; \mathbb{Z}) \otimes \Omega_U$ и аналогично для MSU в силу тривиальности спектральной последовательности Атья-Хирцебруха).

То есть нам надо сравнить размерности $\dim H^k(MU; \mathbb{Z}) - \dim H^{(k-4)}(MU; \mathbb{Z}) - \dim H^{(k-2)}(MSU; \mathbb{Z})$ и $\dim H^k(MSU; \mathbb{Z})$. Если они окажутся равны, то ядро будет равно нулю и пункт 1) теоремы будет доказан.

Но $H^*(MU; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ и $H^*(MSU; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_2, x_3, \ldots]$, $\deg x_i = 2i$, то есть, $\dim H^{2k}(MU; \mathbb{Z}) = p(k)$, $\dim H^{2k}(MSU; \mathbb{Z}) = \tilde{p}(k)$, где $p(k)$ – число разбиений k, а $\tilde{p}(k)$ – число разбиений без 1.

Так как $p(k) = \tilde{p}(k) + \tilde{p}(k-1) + \tilde{p}(k-2) + \ldots$, то равенство $p(k) - p(k-2) - \tilde{p}(k-1) = \tilde{p}(k)$ очевидно.

Из доказанного также следует уже и пункт 2). $\square$

Теперь можно приступить к вычислению самой спектральной последовательности.

Вычисление спектральной последовательности

Из доказанного в предыдущем пункте следует, что мы имеем свободную резольвенту A^U-модулей:

$$U^*(MSU) = A^U/(A^U\partial + A^U\Delta) \longleftarrow A^U \xleftarrow{f_0} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_1} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_2} \ldots$$

где первое отображение – факторизация, $f_0(a, b) = a\partial + b\Delta$, $f_{i \geqslant 1}(a, b) = (a\partial + b\Delta, 0)$.

Действительно, $a\partial + b\Delta = 0 \Rightarrow b = 0$ (по (1)), то есть, $a\partial = 0$, а значит, по предыдущей теореме $a = \alpha\partial + \beta\Delta$.

Применяя $\mathrm{Hom}^n(\dots, MU^*(pt))$, получаем комплекс для вычисления второго члена спектральной последовательности:

$$\Omega_U^{-n} \longrightarrow \Omega_U^{-n+2} \oplus \Omega_U^{-n+4} \longrightarrow \Omega_U^{-n+4} \oplus \Omega_U^{-n+6} \longrightarrow \dots$$

где отображения действуют, по сути, по тем же формулам: $(a, b) \mapsto (\partial(a) + \Delta(b), 0)$.

Так как Δ сюръективен на когомологиях точки, то данный комплекс квазиизоморфен своему подкомплексу

$$W^{-n} \xrightarrow{\partial} W^{-n+2} \xrightarrow{\partial} W^{-n+4} \xrightarrow{\partial} \dots$$

где $W^* = \ker\Delta \subset \Omega_U^*$ – кольцо Коннера-Флойда.

Учитывая отождествление $\Omega_U^{-n} = \Omega_n^U$ получаем в итоге комплекс:

$$W_n \xrightarrow{\partial} W_{n-2} \xrightarrow{\partial} \dots$$

Отсюда получаем следующее описание второго члена спектральной последовательности:

Утверждение 2.1
1) $E_2^{0,n} = \ker\partial \subset W_n \subset \Omega_n^U$
2) $E^{p>0,q} = H_{q-2p}(W_*, \partial)$

Отсюда сразу получаем следующее:

1) Спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ первого квадранта и зануляется при $q < 2p$ и при нечётном q.

2) Все чётные дифференциалы нулевые (так как меняют чётность q).

В частности, $d_2 = 0$ и $E_2 = E_3$. Этот член далее будем обозначать просто E.

$E^{1,2} = H_0(W) = \mathbb{Z}_2$ (т. к. $W_0 = \Omega_0^U = \mathbb{Z}$, $W_2 = \Omega_2^U = \mathbb{Z}$ с образующей $[\mathbb{CP}^1]$ и $\partial[\mathbb{CP}^1] = 2$).

Пусть $h \in E^{1,2}$ – образующая. По соображениям размерности это цикл всех дифференциалов (она лежит на "границе зануления"$q = 2p$).

Спектральная последовательность мультипликативна (так как спектр MSU кольцевой). В частности, определено умножение на $h\colon E^{p,q} \to E^{p+1,q+2}$. Несложно проверить, что данное отображение есть просто тождественное отображение в гомологиях $H_*(W)$, а значит, из описания второго члена получаем следующее важное

Предложение 2.2
Умножение на $h\colon E^{p,q} \to E^{p+1,q+2}$ *является изоморфизмом при* $p > 0$ *и эпиморфизм при* $p = 0$ *с ядром* $\mathrm{im}\partial \subset \ker\partial = E^{0,q}$.

В частности, имеем $E^{p,q} = hE^{p-1,q-2}$. Например, $E^{k,2k} = \{0, h^k\}$.

Рассмотрим теперь $K = 9[\mathbb{CP}^1]^2 - 8[\mathbb{CP}^2]$. Это образующая $E^{0,4}$. $d_3(K) \in E^{3,6} = \{h^3, 0\}$. Предположим, что $d_3(K) = 0$. Тогда по соображениям размерности все остальные дифференциалы на $E^{0,4}$ равны нулю ($d_{k>3}$ выходят за границу $q \geqslant 2p$) и мы получаем, что K – цикл всех дифференциалов и является образующей $E^{0,4} = E_\infty^{0,4}$. Мы тогда имеем эпиморфизм $\Omega_4^{SU} \to E_\infty^{0,4} = E^{0,4} = \ker\partial \subset W$. Но этот краевой гомоморфизм есть просто отображение забывания, которое не может быть сюръективным в размерности 4, так как род соответствующий ряду $\frac{x}{e^x-1}$ чётен для 4-мерных SU-многообразий и равен 1 для K.

Таким образом, получаем, что $d_3(K) = h^3$.

Из этого следует важное утверждение:

Теорема 2.3
$E_4^{p,q} = 0$ при $p \geqslant 3$ и $E_4 = E_\infty$.

Доказательство

Рассмотрим произвольный d_3-цикл $x \in E^{p\geqslant 3,q}$. Имеем $x = h^3 y$ и $0 = d_3(x) = \pm h^3 d_3(y)$, $d_3(y) \in E^{i>0,j}$, а так как умножение на h^3 – изоморфизм на этих элементах, получаем, что $d_3(y) = 0$. А значит, $x = h^3 y = d_3(Ky)$. То есть получаем, что $E_4^{p\geqslant 3,q} = 0$. Отсюда по соображениям размерности получаем, что $d_{i\geqslant 4} = 0$ и $E_\infty = E_4$. $\square$

Таким образом, получаем, что имеется всего один ненулевой дифференциал d_3 и один "допредельный"лист $E^{p,q}$. Бесконечный член последовательности состоит всего из трёх столбцов, причём $E_\infty^{1,*} = hE_\infty^{0,*}$, $E_\infty^{2,*} = hE_\infty^{1,*}$ (h выживает до бесконечности). По соображениям размерности, E_∞ (в рассматриваемых столбцах) есть просто $\ker d_3$. Поэтому например, по соображениям размерности $E_\infty^{k,2k} = E^{k,2k} = \{0, h^k\}$ ($k \leqslant 2$).

Таким образом, получаем в фильтрации Ω^{SU}: $F^{p,q} = F^{p+1,q+1}$ при $p \geqslant 3$. Так как пересечение равно нулю, то $F^{3,n+3} = F^{4,n+4} = \ldots = 0$ и мы получаем следующие короткие фильтрации: $\Omega_n^{SU} = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} = E_\infty^{2,n+2}$.

Более того, так как $E_\infty^{p,q} = 0$ при нечётном q, то мы получаем следующие два случая:

$$\Omega_{2k+1}^{SU} = E_\infty^{1,2k+2} \tag{2}$$

и

$$\Omega_{2k}^{SU} = F^{0,2k} \supset E_\infty^{2,2k+2},\ F^{0,2k}/E_\infty^{2,2k+2} = E_\infty^{0,2k}$$

то есть:

$$0 \to E_\infty^{2,2k+2} \to \Omega_{2k}^{SU} \to E_\infty^{0,2k} \to 0 \tag{3}$$

В малых размерностях мы получаем, что:

0) Так как $E_\infty^{2,2} = 0$, то $\Omega_0^{SU} = E_\infty^{0,0} = E^{0,0} = \mathbb{Z}$.

1) $\Omega_1^{SU} = E_\infty^{1,2} = E^{1,2} = \{0, h\}$.

2) Мы уже отмечали, что W_2 порождено $\mathbb{CP}^1$ и $\partial\mathbb{CP}^1 = 2$. Поэтому $0 = E^{0,2} = \ker\partial \subset W_2$. Отсюда получаем, что $\Omega_2^{SU} = E_\infty^{2,4} = \{0, h^2\}$.

3) $\Omega_3^{SU} = E_\infty^{1,4} = hE_\infty^{0,2} = 0$.

Вообще, получаем следующее

Утверждение 2.4
1) $\Omega_{2k+1}^{SU} = E_\infty^{1,2k+2} = hE_\infty^{0,2k}$ состоит из 2-кручения.

2) Так как $E_\infty^{0,2k} \subset E^{0,2k} \subset W_{2k}$ не имеет кручения, то $E_\infty^{2,2k+2} = h^2 E_\infty^{0,2k-2} = h\Omega_{2k-1}^{SU} = \operatorname{Tors}\Omega_{2k}^{SU}$.

В частности, всё кручение в Ω^{SU} имеет порядок 2.

Докажем теперь теорему, позволяющую полностью вычислить кручение в SU-бордизмах.

Теорема 2.5

Имеет место следующая короткая точная последовательность

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to H_{2k-2}(W) \to \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0$$

.

Эта последовательность расщепляется, так как состоит из векторных пространств над $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство

Имеем следующее: $0 \to \Omega^{2k-1} = E^{1,2k}_\infty = \ker d_3^{1,2k} \subset E^{1,2k}$. Заметим, что $\ker d_3^{1,2k} = \ker(h^{-3}d_3^{1,2k}\colon E^{1,2k} \to E^{1,2k-4})$. Но $\operatorname{im} d_3^{1,2k} = \ker d_3^{4,2k+2} \subset E^{4,2k+2}$, так как $p \geqslant 3$. Значит, $\operatorname{im}(h^{-3}d_3^{1,2k}) = h^{-3}\operatorname{im}(d_3^{1,2k}) = h^{-3}\ker d_3^{4,2k+2} = \ker d_3^{1,2k-4} \subset$ $\subset E^{1,2k-4}$. Это в точности Ω^{SU}_{2k-5}.

Таким образом получаем:

$$0 \to \Omega^{SU}_{2k-1} \to E^{1,2k} \xrightarrow{h^{-3}d_3} \Omega^{SU}_{2k-5} \to 0$$

Так как $E^{1,2k} = H_{2k-2}(W)$, получаем требуемое. □

Воспользуемся теперь тем, что $H_n(W)$ не равно нулю только, если $n =$ $= 8k,\ 8k+4$, а в этом случае это векторные пространства над $\mathbb{Z}_2$ размерности равной количеству разбиений числа k (это было вычислено Коннером и Флойдом в [CF], см., кроме того, [Ст]).

Отсюда мы получаем:

1) $E^{p,q} \neq 0$ только при $q - 2p = 8k,\ 8k+4$

В частности, $E^{1,i} \neq 0$ лишь при $i = 8k+2,\ 8k+6$.

2) $0 \to \Omega^{SU}_{8k-1} \to H_{8k-2}(W) = 0 \to \Omega^{SU}_{8k-5} \to 0$, то есть $\Omega^{SU}_{8k-1} = \Omega^{SU}_{8k+3} = 0$.

3) Так как последовательность расщепляется, то $\Omega^{SU}_{8k+1} \oplus \Omega^{SU}_{8k-3} = H_{8k}(W) =$ $= H_{8k+4}(W) = \Omega^{SU}_{8k+5} \oplus \Omega^{SU}_{8k+1}$, и следовательно, $\Omega^{SU}_{8k-3} = \Omega^{SU}_{8k+5}$. Так как это верно для любых значений k, то $\Omega^{SU}_{8k+5} = 0$.

Из вышеизложенного получаем следующую теорему.

Теорема 2.6

Кручение Ω^{SU} *сосредоточено в размерностях* $8k+1$ *и* $8k+2$ *и представляет собой векторные пространства над* $\mathbb{Z}_2$ *размерности равной количеству разбиений числа* k. $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+1} = \Omega^{SU}_{8k+1}$, $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2} = h\Omega^{SU}_{8k+1}$.

Покажем теперь чему равен образ забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU}_{2k} \to E^{0,2k}_\infty =$ $= \ker d_3 \subset \ker \partial \subset W_{2k}$, который изоморфен $\Omega^{SU}_{2k}/\mathrm{Tors}$.

Теорема 2.7

Образ гомоморфизма забывания $\Omega^{SU}_{2i} \to W_{2i}$ *равен* $\ker\partial$ *при* $2i \neq 8k+4$ *и равен* $\operatorname{im}\partial$ *при* $2i = 8k+4$.

Доказательство

Образ гомоморфизма забывания есть $\ker d_3$.

При $2i \neq 8k,\ 8k+4$ имеем $d_3(E^{0,2i}) = h^{-1}d_3(hE^{0,2i}) = h^{-1}d_3(E^{1,2i+2}) = 0$, то есть $\ker d_3 = E^{0,2i} = \ker\partial$.

Поскольку $0 = \Omega^{SU}_{8k-3} = \ker d_3^{1,8k-2} \subset E^{1,8k-2}$, то равно нулю и $\ker(d_3^{1,8k-2}h^{-2}) = \ker(h^{-2}d_3^{3,8k+2}) = \ker d_3^{3,8k+2}$. А значит, $\operatorname{im} d_3^{0,8k} \subset \ker d_3^{3,8k+2} = 0$, то есть $\ker d_3 = E^{0,8k} = \ker \partial$.

Осталось рассмотреть размерность $8k+4$.

В этом случае Ω^{SU}_{8k+4} равно $E_\infty^{0,8k+4}$ (из (3) так как $E_\infty^{2,8k+6} \subset E^{2,8k+6} = 0$), то есть вкладывается в $\ker\partial \subset W_{8k+4}$ и образ равен $\ker d_3^{0,8k+4} = \ker(h^3 d_3^{0,8k+4}) = \ker(d_3^{3,8k+10}h^3)$. Но мы видели, что $d_3^{3,8k+10} = d_3^{3,8(k+1)+2}$ инъективен. Значит, $\ker(d_3^{3,8k+10}h^3) = \ker h = \operatorname{im}\partial \subset W$. □

Заключительные замечания

Дальнейшее изучение может быть проведено с привлечением большей информации о начальном члене. Например, зная мультипликативную структуру $H_*(W)$, а именно, что это кольцо изоморфно $\mathbb{Z}_2[c_4, c_{8k}]$ (см. [Ст]), можно получить следующее.

$\operatorname{Tors}\Omega^{SU} = \bigoplus \Omega^{SU}_{8k+1} \oplus h\Omega^{SU}_{8k+1}$. Замечая, что $\Omega^{SU}_{8k+1} = E_\infty^{1,8k+2} = hE_\infty^{0,8k} = h\Omega^{SU}_{8k}$ (из (3) так как опять же $E_\infty^{2,8k+2} = 0$), получаем, что $\operatorname{Tors}\Omega^{SU} = \bigoplus h\Omega^{SU}_{8k} \oplus h^2\Omega^{SU}_{8k}$.

Теперь осталось заметить, что ядро умножения на h есть в точности $\operatorname{im}\partial$, $\Omega^{SU}_{8k} = \ker\partial$, и (из вышесказанного) $H_{8*}(W) = \mathbb{Z}_2[x_{8i}]$.

Отсюда получаем, что $\operatorname{Tors}\Omega^{SU} = (h+h^2)\mathbb{Z}_2[V_{8i}]$.

Кроме того, зная образ гомоморфизма забывания, то есть, по сути, $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$, можно описать его как подкольцо в W, относительно "подкрученного"умножения (так как W не является подкольцом в Ω^U, см. [Ст]). (Заметим, впрочем, что образ гомоморфизма забывания лежит в $\ker\partial$ которое является подкольцом в Ω^U).

Список литературы

[B] Bousfield A. K. *The localization of spectra with respect to homology*

[CF] Conner P. E., Floyd E. E. *Torsion in SU-bordism*

[Мищ] Мищенко А. С. *О спектральных последовательностях типа Адамса*

[Нов] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов*

[Ст] Стонг Р. *Заметки по теории кобордизмов*