ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

SU-БОРДИЗМЫ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ АДАМСА–НОВИКОВА

Выполнил студент
603 группы
Черных Георгий Сергеевич

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор Панов Тарас Евгеньевич

____
подпись научного руководителя

Москва
2019 г.

Содержание

Введение

В данной работе рассматривается применение спектральной последовательности типа Адамса в комплексных кобордизмах к спектру SU-бордизмов MSU для вычисления его кольца коэффициентов — кольца специальных унитарных бордизмов Ω^{SU}. Данный подход был реализован в статье С. П. Новикова [**14**]. С помощью этого подхода можно получить все известные результаты о кручении в Ω^{SU} и образе забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$ в комплексные бордизмы, полученные геометрически Коннером и Флойдом [**6**]. При этом используются результаты о группах $c-1$-сферических бордизмов $\mathcal{W}$, введённых Коннером и Флойдом, и естественно возникающие и в подходе Новикова.

Структура работы такова.

В первом разделе мы кратко напоминаем определение и основные факты о теории комплексных кобордизмов, которая будет служить нам техническим средством для дальнейших вычислений. Все приведённые здесь результаты классические и хорошо известны.

Во втором разделе мы определяем теорию SU-бордизмов и приводим также классический результат о кольце SU-бордизмов с обращённой 2. Данный результат был получен Новиковым [**13**] методом классической спектральной последовательности Адамса вместе с вычислением кольца комплексных бордизмов.

В третьем разделе мы приводим необходимые сведения об алгебре когомологических операций A^U в комплексных кобордизмах и формулируем теорему о спектральной последовательности типа Адамса в теории комплексных кобордизмах (называемой последовательностью Адамса–Новикова).

В четвёртом разделе мы вычисляем структуру A^U-модуля $U^*(MSU)$, необходимую для вычисления начального члена спектральной последовательности.

В пятом разделе приводится вычисление спектральной последовательности для MSU. Полученная информация применяется для вычисления кручения в Ω^{SU} и гомоморфизма забывания $\Omega^{SU} \to \Omega^U$.

В шестом разделе изучается естественно возникшая ранее подгруппа $\mathcal{W} \subset \Omega^U$, в частности, вводится и полностью описывается структура кольца на ней, позволяющая описать мультипликативную структуру кольца специальных унитарных бордизмов.

В седьмом разделе резюмируются полученные данные о кольце Ω^{SU} и описываются важные классы бордизмов y_i.

В последнем разделе приводится сводка результатов о геометрических представителях в SU-бордизмах, в частности, о задаче маломерных образующих.

Работа основана на совместной статье автора с И. Ю. Лимонченко и Т. Е. Пановым [**9**].

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Тарасу Евгньевичу Панову за постановку задачи, плодотворные и продолжительные обсуждения и постоянное внимание к работе.

1. Комплексные кобордизмы

Комплексные кобордизмы будут служить нам техническим средством для вычислений, поэтому здесь мы кратко напомним основные факты о теории комплексных кобордизмов, которые будут использоваться далее.

1.1. Теория (ко)гомологий. Теория комплексных кобордизмов $U^*(\cdot)$ есть (экстраординарная) теория когомологий, определяемая с помощью спектра Тома $MU = MU(n)$, пространства $MU(n)$ в котором суть пространства Тома $T(\eta_n)$ универсальных n-мерных комплексных расслоений η_n над $BU(n)$, а связывающие отображения $\Sigma^2 MU(k) = S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$ соответствуют отображениям $BU(k) \to BU(k+1)$, классифицирующим $\eta_k \oplus \mathbb{C}$. То есть, по определению $U^n(X, pt) = \lim\limits_{k\to\infty} [\Sigma^{2k-n} X, MU(k)]$ и для двойственной теории гомологий – теории комплексных бордизмов – $U_n(X, pt) = \lim\limits_{k\to\infty} \pi_{n+2k}(X \wedge MU(k))$, где прямые пределы берутся по естественным отображениям, индуцированным структурными отображениями спектра.

Двойственная теория гомологий $U_*(\cdot)$, теория комплексных бордизмов, имеет следующую важную геометрическую интерпретацию. Напомним, что стабильно комплексная структура $c_{\mathcal{T}}$ на многообразии M (мы рассматриваем лишь компактные многообразия, но, возможно, с краем) есть комплексная структура на стабильном касательном расслоении $\mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^N$, то есть, изоморфизм вещественных расслоений

$$c_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^N \xrightarrow{\cong} \xi\,, \tag{1.1}$$

где ξ – комплексное расслоение, а изоморфизм рассматривается с точностью до комплексных изоморфизмов правой части и прибавления тривиальных комплексных слагаемых $\mathbb{C}$ к ξ. Гомотопически стабильно комплексная структура на M может быть интерпретирована как гомотопический класс поднятий $M \to BU$ отображения $M \to BO$, классифицирующего $\mathcal{T}M$. Стабильно комплексную структуру можно естественно ограничивать на край многообразия (это зависит от того, какую, внешнюю или внутреннюю, нормаль к краю выбрать, и в какое место, начало или конец, касательного к краю репера её добавить для получения касательного базиса к исходному многообразию; иными словами, нужно фиксировать изоморфизм $\mathcal{T}M|_{\partial M} = \mathcal{T}\partial M \oplus \mathbb{R}$). Наконец, для заданной стабильно комплексной структуры $c_{\mathcal{T}}$ на многообразии M можно определить противоположную стабильно комплексную структуру $-c_{\mathcal{T}}$. Это можно сделать, например, рассматривая цилиндр $M \times I$. Тогда с помощью проекции $M \times I \to M \times \{0\}$ на него переносится стабильно комплексная структура, совпадающая с исходной структурой на M на компоненте края $M \times \{0\}$. На другом же конце цилиндра $M \times \{1\}$ тогда индуцируется другая стабильно комплексная структура на M, которая и называется противоположной. Это связано с тем, что на разных концах цилиндра внешняя и внутренння нормали меняются ролями (аналогичная ситуация хорошо известна в случае с ориентацией многообразий и наблюдается со всеми подобными касательными структурами). В терминах изоморфизма (1.1) противоположную структуру можно описать следующим образом:

$$-c_{\mathcal{T}} \colon \mathcal{T}M \oplus \mathbb{R}^N \oplus \mathbb{R}^2 \xrightarrow{c_{\mathcal{T}} \oplus \tau} \xi \oplus \mathbb{C},$$

где τ – не стандартный изоморфизм (что привело бы к той же стабильно комплексной структуре), а композиция его с комплексным сопряжением. Имея противоположную структуру, можно определить понятие бордантности стабильно комплексных многообразий. Стабильно комплексное многообразие M^n называется бордантным нулю, если существует стабильно комплексное многообразие W^{n+1}, такое что $\partial W = M$, как стабильно комплексные многообразия. Тогда два стабильно комплексных многообразия M и N (одной размерности) называются бордантными, если бордантно нулю дизъюнктное объединение $M \sqcup -N$, где $-N$ обозначает многообразие с противоположной стабильно комплексной структурой. Получается отношение эквивалентности, классы по которому называются классами бордизмов стабильно комплексных многообразий и обозначаются $[M]$. Понятие бордантности естественно распространяется на сингулярные стабильно комплексные многообразия над фиксированным простарнством X, представляющие из себя непрерывные отображения $M \xrightarrow{f} X$ стабильно комплексных многообразий M в пространство X. Такое отображение $M^n \xrightarrow{f} X$ называется бордантным нулю, если существует $W^{n+1} \xrightarrow{F} X$, такое что $\partial W = M$ и $F|_{\partial M} = f$, и соответственно, два сингулярных многообразия $M \xrightarrow{f} X$ и $N \xrightarrow{g} X$ бордантны, если бордантно нулю дизъюнктное объединение $M \sqcup -N \xrightarrow{f \sqcup g} X$. Тогда оказывается, что группа $U_n(X)$ совпадает с множеством классов бордизмов сингулярных замкнутых стабильно комплексных n-мерных многообразий над X со структурой абелевой группы, индуцированной дизъюнктным объединением (обратный элемент задаётся как $-[M \xrightarrow{f} X] = [-M \xrightarrow{f} X]$).

Заметим, что абелева группа $\Omega_n^U := U_n(pt)$ состоит, по сути, просто из классов бордизмов замкнутых n-мерных стабильно комплексных многообразий.

1.2. Мультипликативная структура. Теория комплексных кобордизмов является мультипликативной теорией когомологий.

Умножения индуцируются отображениями $MU(m) \wedge MU(n) \to MU(n+m)$, соответствующими отображениям $BU(m) \times BU(n) \to BU(m+n)$, классифицирующим расслоения $\eta_m \times \eta_n$.

Соответственно мы имеем следующие обычные произведения, естественные относительно отображений пространства X:

- спаривание Кронекера
$$\langle\ ,\ \rangle \colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to U_{n-m}(pt) = \Omega_{n-m}^U$$
- $\frown$-произведение
$$\frown \colon U^m(X) \otimes U_n(X) \to U_{n-m}(X)$$
- и обычное $\smile$-произведние
$$\smile \colon U^m(X) \otimes U^n(X) \to U^{m+n}(X)$$

$\smile$-произведение превращает $U^*(X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U^n(X)$ в градуированную коммутативную алгебру над неположительно градуированным кольцом $U^*(pt) = \bigoplus_n U^n(pt)$, которое называется кольцом комплексных кобордизмов и обозначается через $\mathit{\Omega}_U$. Также рассматривается неотрицательно градуированное кольцо коэффициентов $\mathit{\Omega}^U := \pi_*(MU) = U_*(pt) = \bigoplus_n U_n(pt)$ — кольцо комплексных бордизмов. Очевидно, $\mathit{\Omega}_n^U = \mathit{\Omega}_U^{-n}$. Группы бордизмов $U_*(X)$ при этом становятся модулями над $\mathit{\Omega}^U$.

Отметим, что $\mathit{\Omega}^U$-модульная структура на $U_*(X)$ (в частности, кольцевая структура на $\mathit{\Omega}^U$) в геометрической интерпретации индуцируются произведением многообразий.

1.3. Комплексная ориентация. Теория комплексных кобордизмов является комплексно-ориетированной теорией. Это свойство можно выразить несколькими эквивалентными способами. Например, можно сказать, что существует такой элемент $x_{MU} \in \widetilde{U}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, называемый комплексной ориентацией, и задаваемый в нашем случае отображением $\mathbb{C}P^\infty = BU(1) \hookrightarrow MU(1)$, что его ограничение $i^*(x_{MU})$ на $S^2 = \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ является образующей $\widetilde{U}^*(S^0)$-модуля $\widetilde{U}^*(S^2)$.

Из наличия такого элемента (как и в любой мультипликативной теории когомологий) следует существование классов Чженя c_i^U в комплексных кобордизмах, называемых также классами Коннера–Флойда, от комплексных расслоений (со всеми обычными свойствами). При этом классифицирующие пространства $BU(n)$ и BU имеют когомологии обычного вида. В частности,

$$U^*(BU) = \Omega_U[[c_1^U, c_2^U, \ldots, c_i^U, \ldots]],$$

где равенство понимается для градуированных компонент, а c_i^U – универсальные характиристические классы Коннера–Флойда.

Кроме того, для комплексно-ориентированных теорий когомологий комплексные расслоения имеют (естественные) классы Тома (т. е. ориентируемы в данной теории когомологий), и следовательно, имеются изоморфизмы Тома

$$\varphi_\xi\colon \widetilde{U}_{*+\dim_{\mathbb{R}}\xi}(T(\xi)) \to U_*(B(\xi)) \quad \varphi^\xi\colon U^*(B(\xi)) \to \widetilde{U}^{*+\dim_{\mathbb{R}}\xi}(T(\xi))\,,$$

где ξ - комплексное расслоение с базой $B(\xi)$ и пространством Тома $T(\xi)$. Это свойство на самом деле эквивалентно комплексной ориентируемости. Нам в дальнейшем будут нужны лишь изоморфизмы

$$\varphi_*^N\colon U_{*+2N}(MU(N)) \to U_*(BU(N)) \quad \varphi_N^*\colon U^*(BU(N)) \to U^{*+2N}(MU(N)),$$

а точнее, даже лишь их предельные варианты

$$\varphi_*\colon U_*(MU) \to U_*(BU) \quad \varphi^*\colon U^*(BU) \to U^*(MU),$$

справедливые в силу того, что выполнены равенства $U_n(MU) = \varinjlim U_{n+2N}(MU(N))$, $U_n(BU) = \varinjlim U_n(BU(N))$, $U^n(MU) = \varprojlim U_{n+2N}(MU(N))$, $U^n(MU) = \varprojlim U_n(BU(N))$.

Наконец, из ориентируемости комплексных, а следовательно и стабильно комплексных расслоений, следует наличие двойственности Пуанкаре для замкнутых стабильно комплексных многообразий. Как обычно, её можно описать как $\frown$-произведение с фундаментальным классом. В теории комплексных кобордизмов оператор, так называемой, двойственности Пуанкаре–Атья

$$D_U\colon U^k(M^n) \xrightarrow{\cong} U_{n-k}(M^n), \quad x \mapsto x \frown [M^n]$$

задаётся спариванием с фундаментальным классом $[M^n] \in U_n(M^n)$, который геометрически представляется просто тождественным сингулярным многообразием $M^n \to M^n$.

В заключение, как и с каждой комплексно-ориентированной теорией, с теорией комплексных кобордизмов связана некоторая формальная группа. Рассмотрим естественное умножение $\mu\colon \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \to \mathbb{C}P^\infty$ (классифицирующее внешнее тензорное произведение универсальных расслоений). Имеем $U^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u,v]]$, $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[t]]$ (тут $t = c_1^U, u = p_1^*(c_1^U), v = p_2^*(c_1^U)$). Тогда мы получаем формальный ряд $\mu^*(t) = F_U(u,v) \in (\Omega_U[[u,v]])^2$. Несложно проверить, что данный формальный ряд является одномерной коммутативной формальной группой (градуированной степени 2) $F_U(u,v) = u + v + \sum_{k,\,l\geqslant 1} \alpha_{kl}\, u^k v^l$, $\alpha_{kl} \in \Omega_U^{-2(k+l-1)}$, называемой формальной группой комплексных кобордизмов. Из определения следует, что эта формальная группа выражает первый класс Чженя в кобордизмах (класс Коннера–Флойда) от тензорного произведения одномерных комплексных расслоений через первые классы сомножителей: $c_1^U(\eta \otimes \xi) = F_U(c_1^U(\eta), c_1^U(\xi))$.

Также мы будем через $\overline{u}$ обозначать ряд, задающий «обратный элемент» в этой формальной группе, то есть, $F_U(u, \overline{u}) = 0$. Через этот ряд выражается первый класс Коннера–Флойда от сопряжённого линейного расслоения: $\overline{c_1^U}(\xi) = c_1^U(\overline{\xi})$.

1.4. Кольцо коэффициентов. Имея классы Чженя, мы можем стандартным образом определять характеристические классы через симметрические многочлены: выражаем симметрический многочлен через элементарные симметрические многочлены, после чего вместо них подставляем классы Чженя. Таким образом определяются, в частности, классы s_ω, где ω — разбиение $(i_1, \dots, i_k)$, а характеристический класс соответствует многочлену, являющемуся симметризацией монома $t_1^{i_1} \dots t_k^{i_k}$. Сейчас нам будут наиболее важны классы s_i, соответствующие одноэлементным разбиениям, то есть, степенным суммам. Мы их сейчас рассматриваем в целочисленных когомологиях.

Положим для каждого целого $i \geqslant 1$

$$m_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i+1 \neq p^k \text{ ни для какого простого } p; \\ p, & \text{если } i+1 = p^k \text{ для некоторого простого } p \text{ и целого } k > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Следующие классические результаты Милнора и Новикова дают, в частности, полное описание кольца коэффициентов Ω^U.

Теорема 1.1 (Милнор, Новиков).

а) *Кольцо комплексных бордизмов Ω^U является полиномиальным кольцом над $\mathbb{Z}$ с одной образующей в каждой положительной чётной размерности:*

$$\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i \colon i \geqslant 1], \quad \deg a_i = 2i.$$

б) *Класс бордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной полиномиальной образующей a_i, тогда и только тогда, когда*

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i.$$

в) *Два стабильно комплексных многообразия бордантны тогда и только тогда, когда у них равны все характеристичские числа Чженя.*

В этой теореме s-числа $s_i[M]$ стабильно комплексного многообразия M определяются как характеристические числа, соответствующие классам s_i: $s_i[M] = \langle s_i(\mathcal{T}M), [M]_\mathbb{Z}\rangle$. Тут $[M]_\mathbb{Z}$ — целочисленный фундаментальный класс многообразия M (соответствующий ориентации, задаваемой стабильно комплексной структурой), а классы Чженя считаются от $\mathcal{T}M$ также посредством стабильно комплексной структуры.

Структура кольца в пункте а) данной теоремы была установлена Новиковым с помощью классической спектральной последовательности Адамса, применённой к спектру MU. Точнее говоря, изучение спектральных последовательностей Адамса по всем простым модулям даёт сначала отсутствие кручения в группах $\pi_*(MU) = \Omega^U$ и вычисляет их ранги (что было проделано Милнором), а затем из мультипликативной структуры каждой спектральной последовательности извлекается, что $\Omega^U \otimes \mathbb{Z}_p$ есть кольцо многочленов с образующими в каждой положительной чётной размерности. Отсюда уже стандартным алгебраическим рассуждением (рассмотрением неразложимых факторов) получается, что и само кольцо Ω^U также полиномиально.

2. SU-бордизмы

Вернёмся к определению стабильно комплексной структуры (1.1). Если в ней рассматривать в качестве ξ не просто комплексные, а SU-расслоения (т. е. редуцированные к специальной унитарной структурной группе), и соответственно изоморфизм $c_\mathcal{T}$ с точностью до SU-изоморфизма и прибавления тривиальных комплексных слагаемых (что не сказывается на SU-структуре расслоения), то получится определение стабильной SU-структуры на многообразии(слово «стабильная» мы в этом названии будем далее опускать). Заметим, что SU-структура на комплексном расслоении ξ равносильна тривиализации старшей внешней степени или детерминанта $\det \xi$. Гомотопически

SU-структура на многообразии M есть гомотопический класс поднятий отображения $M \to BO$, классифицирующего касательное расслоение, до отображения $M \to BSU$. Стабильно комплексное многообразие с фикисрованной SU-структурой называется SU-многообразием. Стабильно комплексное многообразие допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда его первый (целочисленный) класс Чженя равен нулю (при этом такая SU-структура единственна, если $H^1(M;\mathbb{Z}) = 0$).

Полностью аналогично комплексному случаю так определённые SU-многообразия позволяют определить группы SU-бордизмов $SU_n(X)$ пространства X. Соответствующая теория (ко)гомологий аналогично определяетсяется с помощью MSU-спектра, состоящего из пространств Тома $MSU(n)$ универсальных расслоений над $BSU(n)$ (структурные отображения аналогичны коплексному случаю). Теория SU-(ко)бордизмов также мультипликативна, а умножения также индуцируются прямой суммой расслоений. Заметим, однако, что эта теория не комплексно-ориентируема.

Далее мы иногда будем, допуская некоторую вольность речи, называть SU-многообразием стабильно комплексное многообразие с нулевым первым классом Чженя. Из контекста будет понятно, когда нам этого достаточно, а когда имеется в виду некоторая конкретная SU-структура.

Возникает вопрос о структуре кольца коэффициентов $\pi_*(MSU) = SU_*(pt) =: \varOmega^{SU}$.

Естественным отображениям $BSU(n) \to BU(n)$ соответствуют отображения пространств Тома $MSU(n) \to MU(n)$, что приводит к отображению спектров, и следовательно, к гомоморфизму "забывания"в теориях (ко)гомологий $SU^* \to U^*$. В частности, получаем гомоморфизм забывания для колец коэффициентов: $\varOmega^{SU} \to \varOmega^U$.

В отличие от $\varOmega^U$, кольцо $\varOmega^{SU}$ имеет кручение. Первый элемент кручения появляется уже в размерности 1: из того, что пространство Тома $MSU(k)$ не имеет клеток в размерностях от $2k+1$ до $2k+3$, следует, что $\varOmega_1^{SU} = \pi_1^s = \mathbb{Z}_2$. Образующая θ группы $\varOmega_1^{SU}$ представляется окружностью с нетривиальным оснащением, индуцирующим нетривиальную SU-структуру. (То же верно и для следующей размерности: $\varOmega_2^{SU} = \pi_2^s = \mathbb{Z}_2$ с образующей θ^2).

Первым структурным результатом о кольце $\varOmega^{SU}$ была теорема Новикова 1962 года. Сформулируем его в следующем виде, удобном для наших дальнейших вычислений.

Теорема 2.1 (Новиков [**13**, Приложение 1]). *$\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ представляет собой полиномиальное кольцо с одной образующей в каждой чётной размерности $\geqslant 4$:*

$$\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][y_i, i \geqslant 2], \quad \deg y_i = 2i.$$

Класс бордизмов SU-многообразия M^{2i} может быть взят в качестве $2i$-мерной образующей y_i, если и только если

$$s_i[M^{2i}] = \pm m_i m_{i-1} \quad \text{с точностью до степени двойки.}$$

Точно так же как и в случае комплексных кобордизмов, из рассматрения обычных спектральных последовательностей Адамса, только теперь по нечётным простым модулям p, следует, что $\varOmega^{SU} \otimes \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p[y_i, i \geqslant 2]$ для $p > 2$ (откуда, кроме всего прочего, следует отсутствие нечётного кручения). Отсюда уже стандартным образом получается результат про кольцо с обращённой двойкой. По поводу s-чисел образующих заметим следующее. Во-первых, s-число произведения двух стабильно комплексных многообразий равно нулю. То есть, в полиномиальном кольце мультипликативные образующие выделяются условием минимальности (по делимости) s-числа. Во-торых, с точностью до степеней двойки мы имеем

$$m_i m_{i-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \neq p^k,\ i \neq p^k - 1 \text{ ни для какого нечётного простого } p, \\ p, & \text{если } i = p^k \text{ или } i = p^k - 1 \text{ для некоторого нечётного простого } p. \end{cases}$$

В размерностях p^k-1 s-числа всех стабильно комплексных многообразий делятся на p. Необходимость дополнительного условия делимости в размерностях $2i = 2p^k$ вытекает из следующего простого наблюдения.

Предложение 2.2. *Если M^{2n} является SU-многообразием размерности $2n = 2p^k$ для некоторого простого p, то*

$$s_n[M^{2n}] = 0 \mod p.$$

Доказательство. Для $n = p^k$ мы имеем

$$s_n(M^{2n}) = x_1^n + \dots + x_n^n \equiv (x_1 + \dots + x_n)^n = c_1^n(M^{2n}) = 0 \mod p \qquad \square$$

Итак, для любого элемента $y \in \Omega^{SU}$ его s-число делится на $m_i m_{i-1}$ (в $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$). То что именно эти значения s-чисел являются минимальными и достигаются на образующих проверяется предъявлением конкретных SU-многообразий (см. [**17**][глава X]).

Заметим здесь, что, как будет видно далее, кольцо Ω^{SU} само не является полиномиальным даже по модулю кручения.

Также, аналогично случаю комплексных кобордизмов, из этого результата можно извлечь, что класс SU-бордизмов SU-многообразия определяется своими целочисленными характеристическими числами с точностью до 2-примарного кручения. Как показали Андерсон, Браун и Петерсон [**1**], характеристические числа в KO-теории вместе с обычными характеристическими числами уже полностью определяют класс SU-бордизмов.

3. Когомологические операции в комплексных кобордизмах и спектральная последовательность Адамса–Новикова

3.1. Когомологические операции. Рассмотрим (стабильные) когомологические операции в теории комплексных кобордизмов. Напомним, что так называются естественные аддитивные преобразования θ

$$\theta\colon U^*(X,A) \to U^{*+n}(X,A),$$

коммутирующие с изоморфизмами надстройки. Число $n \in \mathbb{Z}$ называется степенью операции θ. Множество всех операций образует (градуированное) кольцо по отношению к сложению и композиции; более того, оно является алгеброй над кольцом Ω_U. Эта алгебра обозначается A^U; она была описана в работах Ландвебера [**7**] и Новикова [**14**, §5].

Как и в любой теории когомологий, существует естественный изоморфизм Ω_U-модулей

$$A^U \cong U^*(MU) = \varprojlim U^{*+2N}(MU(N)),$$

то есть, когомологические операции степени n биективно соответствуют отображениям представляющего спектра MU в себя степени n.

При этом для элемента $a \in U^n(MU)$ из A^U, представленного отображением спектров $a\colon MU \to \Sigma^n MU$, соответствующая операция, которую мы обозначим через

$$a_X^*\colon U^*(X) \to U^{*+n}(X),$$

действует следующим естественным образом: для элемента $x \in U^m(X)$, представленного отображением $x\colon X \to \Sigma^m MU$, элемент $a_X^* x \in U^{m+n}(X)$ представляется композицией

$$X \xrightarrow{x} \Sigma^m MU \xrightarrow{\Sigma^m a} \Sigma^{m+n} MU.$$

Таким образом определяется левое действие алгебры A^U на группах кобордизмов пространства X, превращающее U^* в функтор со значениями в категории градуированных левых A^U-модулей.

Кроме того, ясно, что преобразование спектра также определяет операции и в гомологиях, то есть, определено действие

$$a_*^X : U_*(X) \to U_{*-n}(X)$$

алгебры A^U на группах бордизмов. Для элемента $x \in U_m(X)$, представленного отображением $x\colon \Sigma^m S \to X \wedge MU$, элемент $a_*^X x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией

$$\Sigma^{m-n} S \xrightarrow{\Sigma^{-n}x} \Sigma^{-n}(X \wedge MU) \xrightarrow{\Sigma^{-n}(1\wedge a)} X \wedge MU.$$

3.2. Связь с характеристическими классами. Как отмечалось в пункте 1.3 существуют естественные изоморфизмы Тома

$$\varphi_*\colon U_*(MU) \to U_*(BU), \quad \varphi^*\colon U^*(BU) \to U^*(MU).$$

То есть, мы получаем, что в теории комплексных кобордизмов когомологические операции из $A^U = U^*(MU)$ биективно соответствуют универсальным характеристчическим классам из $U^*(BU)$ посредством изоморфизма Тома.

Если $x \in U_m(X)$ представляется сингулярным многообразием $M^m \xrightarrow{f} X$, то $a_*^X x$ можно интерпретировать геометрически следующим образом. Пусть $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a$ — характеристический класс, соответствующий элементу a. Рассмотрим $\alpha(-\mathcal{T}M) \in U^n(M^m)$, где $\mathcal{T}M$ — касательное расслоение, а $-\mathcal{T}M$ — стабильное нормальное расслоение многообразия M. Применяя оператор двойственности Пуанкаре–Атья $D_U\colon U^n(M^m) \to U_{m-n}(M^m)$, мы получаем элемент $D_U\alpha(-\mathcal{T}M) \in U_{m-n}(M)$, представляемый сингулярным многообразием $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M$. Тогда $a_*^X x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M \xrightarrow{f} X$.

Наконец, отметим, что существует изоморфизм левых Ω_U-модулей

$$A^U = U^*(MU) \cong \Omega_U \mathbin{\widehat{\otimes}} S,$$

где $\widehat{\otimes}$ — пополненное тензорное произведение, а S — так называемая алгебра Ландвебера-Новикова, порождённая операциями $S_\omega = \varphi^*(s_\omega^U)$, соответствующими универсальным характеристическим классам $s_\omega^U \in U^*(BU)$, которые получаются из симметризации мономов $t_1^{i_1} \cdots t_k^{i_k}$, индексированных разбиениями $\omega = (i_1, \ldots, i_k)$ (ср. с началом подраздела 1.4). То есть, каждый элемент $a \in A^U$ может быть записан единственным образом в виде бесконечного ряда $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$, где $\lambda_\omega \in \Omega_U$. Этот ддитивный результат сразу следует из наличия изоморфизма Тома и того, что характеристические классы s_ω^U образуют базис в $U^*(BU)$ наравне с мономами от c_i^U. Нам будет нужно только это аддитивное описание. Мультипликативные результаты, структура алгебры Хопфа на S и правила коммутирования операций S_ω и элементов из Ω_U, описаны Ландвебером в [**7**] и Новиковым в [**14**, §5].

3.3. Точность представлений. Итак мы меем в случае $X = pt$ представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(pt)$ и $\Omega^U = U_*(pt)$. В отличие от обычных (ко)гомологий верно следующее замечательное утверждение.

Лемма 3.1 (см. [**14**, лемма 3.1 и лемма 5.2]). *Представления алгебры A^U на $\Omega_U = U^*(pt)$ и $\Omega^U = U_*(pt)$ точны.*

Замечание. На самом деле, верно следующее общее утверждение: если есть два спектра конечного типа E и F, то естественный гомоморфизм $F^*(E) \to \mathrm{Hom}^*(\pi_*(E), \pi_*(F))$ инъективен, если $\pi_*(F)$ и $H_*(E)$ не имеют кручения; подробности см. в [**16**].

Далее мы будем обозначать a_*^{pt} и a_{pt}^* просто a_* и a^*.

Кроме представления алгебры A^U на бордизмах $U_*(X)$ любого пространства X определим ещё одно представление алгебры A^U на $U_*(BU)$, которое понадобится нам для технических целей далее (см. [**14**, §5]).

Конструкция 3.2 (представление A^U на $U_*(BU)$, $a \mapsto \widetilde{a}$). Пусть $a \in U^n(MU)$ — элемент из A^U. Тогда положим

$$\widetilde{a} := \varphi_* a_*^{MU} \varphi_*^{-1} \colon U_m(BU) \to U_{m-n}(BU).$$

Геометрический смысл этой операции описывается следующим образом. Для начала заметим, что класс бордизмов $[M^m \to BU] \in U_m(BU)$ можно понимать как класс бордизмов пары $[M, \xi]$, где ξ — стабильное расслоение на M (индуцированное из BU). Элемент $a \in U^n(MU)$ определяет универсальный характеристический класс $\alpha = (\varphi^*)^{-1} a \in U^n(BU)$ и, следовательно, класс $\alpha(\xi) \in U^n(M)$. Рассмотрим двойственный по Пуанкаре–Атья класс $D_U(\alpha(\xi)) = [Y_a, f_a] \in U_{m-n}(M)$, где $Y_a \xrightarrow{f_a} M$ — сингулярное многообразие в M. Тогда

$$\widetilde{a}[M, \xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}M) - \mathcal{T}Y_a] \in U_{m-n}(BU).$$

Применяя аугментацию $\varepsilon \colon U_*(BU) \to \varOmega^U$ (индуцированную отображением в точку), мы получаем

$$\varepsilon(\widetilde{a}[M, \xi]) = [Y_a] = \big\langle (\varphi^*)^{-1} a, [M, \xi] \big\rangle \in U_{m-n}(pt) = \varOmega^U_{m-n}, \tag{3.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ обозначает кронекеровское произведение в (ко)бордизмах пространства BU.

Лемма 3.3 ([**14**, лемма 5.3]). *Представление $a \mapsto \widetilde{a}$ алгебры A^U на $U_*(BU)$ точно.*

Доказательство. Полагая $\xi = -\mathcal{T}M$ в конструкции 3.2, мы получаем

$$\widetilde{a}[M, -\mathcal{T}M] = [Y_a, -\mathcal{T}Y_a].$$

То есть, мы имеем коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\varOmega^U \arrow[r] \arrow[d, "a_*"] & U_*(BU) \arrow[d, "\widetilde{a}"] \\
\varOmega^U \arrow[r] & U_*(BU)
\end{tikzcd}$$

Здесь горизонтальные отображения суть $[M] \mapsto [M, -\mathcal{T}M]$. Они очевидно инъективны. Из этого следует, что мы можем рассматривать представление $a \mapsto a_*$ на $U_*(pt)$ как подпредставление в представлении $a \mapsto \widetilde{a}$ на $U_*(BU)$. Так как представление $a \mapsto a_*$ точно по лемме 3.1, представление $a \mapsto \widetilde{a}$ также точно. $\square$

3.4. Спектральная последовательность. Сформулируем теперь основные свойства когомологической спектральной последовательности Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах, которые мы будем использовать далее. Подробности можно найти в [**14**]; см. также [**11**], [**2**], [**4**].

Теорема 3.4 (спектральная последовательность Адамса–Новикова в комплексных кобордизмах). *Пусть X — связный спектр с конечно порождёнными и свободными от кручения целочисленными гомологиями. Тогда существует спектральная последовательность*

$$\{E_r^{p,q}, \quad d_r \colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r, q+r-1}, \quad r \geqslant 2\}$$

со следующими свойствами:

a) $E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^{p,q}_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$.

б) *Существует фильтрация*
$$\pi_n(X) = F^{0,n} \supset F^{1,n+1} \supset F^{2,n+2} \supset \ldots, \quad \bigcap_{s\geqslant 0} F^{s,n+s} = 0,$$
присоединённый биградуированный модуль которой совпадает с бесконечным членом спектральной последовательности: $E_\infty^{p,q} \cong F^{p,q}/F^{p+1,q+1}$.

в) *Краевой гомоморфизм*
$$\pi_n(X) = F^{0,n} \to E_\infty^{0,n} \to E_2^{0,n} = \mathrm{Hom}^n_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$$
совпадает с естественно определённым отображением.

Кроме того, если X *— кольцевой спектр, то спектральная последовательность мультипликативна.*

Замечание. Под естественным отображением $h\colon \pi_n(X) \to \mathrm{Hom}^n_{A^U}(U^*(X), U^*(pt))$ из пункта в) теоремы 3.4 подразумевается следующее. Если элемент $\alpha \in \pi_n(X)$ представляется отображением $f\colon \Sigma^n S \to X$, а элемент $\beta \in U^p(X)$ — отображением $g\colon X \to \Sigma^p MU$, то элемент $h(\alpha)(\beta) \in U^{p-n}(pt)$ представляется композицией
$$\Sigma^n S \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \Sigma^p MU.$$

4. Структура A^U-модуля на $U^*(MSU)$

Чтобы применить теорему 3.4 к спектру специальных унитарных бордизмов MSU, мы должны описать структуру A^U-модуля на $U^*(MSU)$. Главный результат здесь (теорема 4.5) восходит к Новикову. Мы приводим полное доказательство, восполняя некоторые технические детали, отсутствующие в **[14]**.

4.1. Предварительное описание. Рассмотрим отображение $\det\colon U \to U(1)$. Оно индуцирует отображение классифицирующих пространств $BU \to \mathbb{C}P^\infty$, которое мы также обозначим det. Напомним, что $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u]]$, где $u \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ — естественно выбранная комплексная ориентация, а также первый класс Коннера–Флойда от универсального одномерного расслоения $c_1^U(\gamma)$. Рассмотрим теперь элемент $\delta := \det^* u \in U^2(BU)$. Это некоторый универсальный характеристический класс. Из определения понятно, что на комплексных расслоениях он равен первому классу Коннера–Флойда от детерминантного расслоения: $\delta(\xi) = c_1^U(\det \xi)$. Заметим, кроме того, что $\overline{\delta}(\xi) = \delta(-\xi) = c_1^U(\overline{\det \xi})$.

Это же можно сказать другими словами следующим образом. Так как $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$, группа $H^2(X, \mathbb{Z})$ отождествляется с $[X, \mathbb{C}P^\infty]$. Тогда, имея элемент $x \in H^2(X, \mathbb{Z})$, мы можем задать его отображением $f\colon X \to \mathbb{C}P^\infty$ и получить элемент $f^*(u) \in U^2(X)$ (то есть просто взять композицию f с ориентацией $u\colon \mathbb{C}P^\infty \to MU$). Тогда мы получаем отображение $g\colon H^2(X, \mathbb{Z}) \to U^2(X)$. Это отображение не аддитивно, а точнее говоря, оно переводит сумму в целочисленных гомологиях в формальную группу в комплексных кобордизмах (так как сложение в $H^2(\cdot, \mathbb{Z})$ индуцируется умножением μ в $\mathbb{C}P^\infty$). $g(x)$ называют геометрическим кобордизмом, соответствующим когомологическому классу x. Например, для $X = BU$ первый универсальный целочисленный класс Чженя c_1 индуцируется как раз отображением $\det\colon BU \to \mathbb{C}P^\infty$, и следовательно, $g(c_1) = \delta$.

Все эти конструкции работают, очевидно, в любой комплексно-ориентируемой теории когомологий.

Нам эти наблюдения нужны по следующе причине. Естественное отображение $BSU \to BU$ индуцирует эпиморфизм $U^*(BU) \to U^*(BSU)$, ядром которого служит идеал $\mathcal{I}(\delta)$, натянутый на вышеопределённый класс δ.

Используя изоморфизмы Тома
$$\varphi^*\colon U^*(BSU) \to U^*(MSU) \quad \text{и} \quad \varphi^*\colon U^*(BU) \to U^*(MU),$$

мы получаем, что естественное отображение $MSU \to MU$ индуцирует эпиморфизм $U^*(MU) \to U^*(MSU)$ с ядром $\varphi^*(\mathcal{I}(\delta)) =: \mathfrak{I}$. Так как $U^*(MU) \to U^*(MSU)$ — отображение A^U-модулей, мы получаем

$$U^*(MSU) = A^U/\mathfrak{I} \quad \text{как } A^U\text{-модуль.} \tag{4.1}$$

Это первое описание искомой структуры A^U-модуля.

4.2. Операции Δ, ∂ и Ψ. Теперь мы определим некоторые важные операции из A^U. Напомним, что каждый характеристический класс $\alpha \in U^*(BU)$ определяет операцию $\varphi^*(\alpha) \in A^U = U^*(MU)$.

Конструкция 4.1 (операции $\Delta_{(k_1,k_2)}$). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 определим

$$\Delta_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\big((\overline{\delta})^{k_1}(\delta)^{k_2}\big) \in (A^U)^{2k_1+2k_2}.$$

Заметим, что $\overline{\delta} \in \mathcal{I}(\delta)$, поскольку степенной ряд $\overline{u}$ не имеет постоянного члена. Следовательно, $\Delta_{(k_1,k_2)} \in \mathfrak{I}$.

Соответствующая операция $\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}\colon U_*(BU) \to U_{*-2k_1-2k_2}(BU)$ (см. конструкцию 3.2) описывается геометрически следующим образом. Рассмотрим класс $[M,\xi] \in U_n(BU)$. Пусть $i_1\colon Y_1 \hookrightarrow M$ и $i_2\colon Y_2 \hookrightarrow M$ — подмногообразия коразмерности 2, двойственные к $-c_1(\xi)$ и $c_1(\xi)$ соответственно. Мы имеем $\nu(Y_1 \subset M) = \overline{(\det\xi)}|_{Y_1}$ и $\nu(Y_2 \subset M) = (\det\xi)|_{Y_2}$. Это же и подмногообразия двойственные по Пуанкаре–Атья к $c_1^U(\overline{\det\xi}) = \overline{\delta}(\xi)$ и $c_1^U(\det\xi) = \delta(\xi)$ соответственно. Двойственность Пуанкаре–Атья переводит умножение в трансверсальное пересечение, и следовательно, чтобы получить подмногообразие двойственное к $(\overline{\delta}(\xi))^{k_1}(\delta(\xi))^{k_2} \in U^{2k_1+2k_2}(M)$ осталось взять трансверальное пересечение

$$Y_{k_1,k_2} = \underbrace{Y_1\cdots Y_1}_{k_1}\cdot\underbrace{Y_2\cdots Y_2}_{k_2}.$$

с комплексной структурой в нормальном расслоении $\nu = \nu(Y_{k_1,k_2} \subset M) = (\overline{\det\xi})^{\oplus k_1} \oplus (\det\xi)^{\oplus k_2}|_{Y_{k_1,k_2}}$. Итак, мы получили

$$\widetilde{\Delta}_{(k_1,k_2)}[M,\xi] = [Y_{k_1,k_2}, \xi|_{Y_{k_1,k_2}} + \nu\,] \in U_{n-2k_1-2k_2}(BU).$$

В случае $\xi = -\mathcal{T}M$ мы получаем $(\Delta_{(k_1,k_2)})_*[M] = [M_{k_1,k_2}]$, где M_{k_1,k_2} — подмногообразие, двойственное к $(\det\mathcal{T}M)^{\oplus k_1} \oplus (\overline{\det\mathcal{T}M})^{\oplus k_2}$.

Конструкция 4.2 (операции $\Psi_{(k_1,k_2)}$). Для неотрицательных целых чисел k_1, k_2, положим $k = k_1 + k_2$. Пусть ξ — комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим проективизацию $p\colon \mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k) \to \mathbb{C}P^n$. Касательное расслоение к многообразию $\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C}^k)$ стабильно расщепляется:

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi\oplus\mathbb{C}^k)\oplus\mathbb{C} \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta\otimes p^*(\xi\oplus\mathbb{C}^k)) = p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta\otimes p^*\xi)\oplus\bar\eta^{\oplus k},$$

где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P(\xi\oplus\mathbb{C}^k)$, см. [**5**, теорема D.4.1]. Введём новую стабильно комплексную структуру на $\mathbb{C}P(\xi\oplus\mathbb{C}^k)$, используя изоморфизм вещественных расслоений

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\xi\oplus\mathbb{C}^k)\oplus\mathbb{R}^2 \cong p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^n \oplus (\bar\eta\otimes p^*\xi)\oplus\bar\eta^{\oplus k_1}\oplus\eta^{\oplus k_2},$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $P^{(k_1,k_2)}(\xi)$.

Мы получаем класс бордизмов $[P^{(k_1,k_2)}(\xi),p] \in U_{2n+2k}(\mathbb{C}P^n)$. Двойственный к нему класс кобордизмов $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := (D_U)^{-1}[P^{(k_1,k_2)}(\xi),p] \in U^{-2k}(\mathbb{C}P^n)$ определяет универсальный характеристический класс линейных расслоений, который мы обозначим $\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2k}(\mathbb{C}P^\infty)$.

Теперь мы можем распространить определение $\chi_{(k_1,k_2)}$ на комплексные расслоения произвольного ранга, полагая $\chi_{(k_1,k_2)}(\xi) := \chi_{(k_1,k_2)}(\det\xi)$. В результате мы получаем универсальный характеристический класс $\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2k}(BU)$ и соответствующую операцию

$$\varPsi_{(k_1,k_2)} = \varphi^*\chi_{(k_1,k_2)} \in U^{-2(k_1+k_2)}(MU) = (A^U)^{-2(k_1+k_2)}.$$

Геометрически, $(\varPsi_{(k_1,k_2)})_*[M^{2n}]$ — это класс $(2n{+}2k_1{+}2k_2)$-многообразия $[\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C}^{k_1+k_2})]$ со стабильно комплексной структурой $p^*(\mathcal{T}M)\oplus(\bar\eta\otimes p^*(\overline{\det\mathcal{T}M}))\oplus\bar\eta^{\oplus k_1}\oplus\eta^{\oplus k_2}$.

Мы будем использовать следующие обозначения для некоторых из введённых операций:

$$\partial = \varDelta_{(1,0)}, \quad \varDelta = \varDelta_{(1,1)}, \quad \varPsi = \varPsi_{(1,1)}. \tag{4.2}$$

Геометрически, $\partial_*[M]$ представляется подмногообразием, двойственным к $\det\mathcal{T}M$, $\varDelta_*[M]$ представляется подмногообразием двойственным к $\det\mathcal{T}M\oplus\overline{\det\mathcal{T}M}$, а $\Psi_*[M]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой вдоль слоёв $(\bar\eta\otimes p^*(\overline{\det\mathcal{T}M}))\oplus\bar\eta\oplus\eta$.

Операции ∂_* и $\varDelta_*$ детально изучались Коннером и Флойдом [**6**], которые обозначали их просто через ∂ и $\varDelta$.

Операции (4.2) удовлетворяют следующим алгебраическим соотношениям.

Лемма 4.3. *Выполнены равенства*

$$\partial^2 = \varDelta\partial = 0, \quad \varDelta\varPsi = \mathrm{id}, \quad \partial\varPsi = 0, \quad \varDelta[\mathbb{C}P^1]\partial = 0, \quad \partial[\mathbb{C}P^1]\partial = 2\partial.$$

Здесь $[\mathbb{C}P^1]$ обозначает операцию умножения на $[\mathbb{C}P^1]\in\varOmega_U^{-2}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.1 достаточно проверить эти соотношения на бордизмах точки $\varOmega^U$. Заметим, что $\partial_*[M]$ представляется подмногообразием, двойственным к $c_1(M)$, которое является SU-многообразием. Следовательно, $(\varDelta_{(k_1,k_2)})_*\partial_* = 0$. В частности, $\partial_*^2 = \varDelta_*\partial_* = 0$.

Равенство $\varDelta_*\varPsi_* = \mathrm{id}$ доказано в [**6**, теорема 8.1]. Равенство $\partial_*\varPsi_* = 0$ приведено в [**6**, теорема 8.2], но его доказательство содержит неточность в вычислении характеристических классов. Поэтому ниже мы приводим исправленное доказательство.

Возьмём $[M^{2n}]\in\varOmega^U_{2n}$. Тогда $\varPsi_*[M^{2n}]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой, задаваемой изоморфизмом

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C}^2)\oplus\mathbb{R}^2 \cong p^*\mathcal{T}M\oplus(\bar\eta\otimes p^*\overline{\det\mathcal{T}M})\oplus\bar\eta\oplus\eta.$$

Обозначим это стабильно комплексное многообразие через P^{2n+4}. Тогда $\partial_*\varPsi_*[M^{2n}] = \partial_*[P^{2n+4}]$ представляется подмногообразием $N^{2n+2}\subset P^{2n+4}$, двойственным к классу $c_1(P^{2n+4}) = c_1(\bar\eta)$. Мы можем взять в качестве N^{2n+2} подмногообразие $\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C})$ со стабильно комплексной структурой

$$\mathcal{T}\mathbb{C}P(\overline{\det\mathcal{T}M}\oplus\mathbb{C})\oplus R^2 \cong p^*\mathcal{T}M\oplus(\bar\eta\otimes p^*\overline{\det\mathcal{T}M})\oplus\eta.$$

Заметим, что $[N^{2n+2}]$ есть в точности $(\varPsi_{(0,1)})_*[M^{2n}]$. Для того, чтобы увидеть, что N^{2n+2} бордантно нулю, посчитаем его полный класс Чженя. Обозначим $c_i = c_i(M)$, $d = c_1(\bar\eta)$, тогда мы имеем соотношение $d^2 = p^*c_1\cdot d$. Мы получаем

$$\begin{aligned}c(N^{2n+2}) = (1+p^*c_1+\dots+p^*c_n)&(1+d-p^*c_1)(1-d)\\ &= (1+p^*c_1+\dots+p^*c_n)(1-p^*c_1)\\ &\quad = 1+p^*(c_2-c_1^2)+p^*(c_3-c_1c_2)+\dots+p^*(c_n-c_1c_{n-1})\end{aligned}$$

(это вычисление было неверно проведено в [**6**, pp. 36–37]). Отсюда $c_\omega(N^{2n+2}) = p^*c'_\omega(M^{2n})$, где $c'_i = c_i - c_1c_{i-1}$, и все характеристические числа $c_\omega[N^{2n+2}]$ равны нулю по соображениям размерности.

Равенство $\partial\varPsi = \varPsi_{0,1} = 0$ можно также получить геометрически, заметив, что стабильно комплексная структура на N^{2n+2} тривиальна на каждом слое $\mathbb{C}P^1 = S^2$

проективизации, и значит, она продолжается на ассоциированное расслоение на 3-мерные диски, краем которого будет тогда N^{2n+2}.

Покажем, что $\varDelta_*[\mathbb{C}P^1]\partial_* = 0$. Для этого рассмотрим произвольный класс $[M^{2n}]$. Пусть $\partial_*[M^{2n}] = [Y^{2n-2}]$. Надо проверить, что $\varDelta_*([\mathbb{C}P^1 \times Y^{2n-2}]) = 0$. Мы имеем $\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1 \times Y) = p^*\mathcal{T}\mathbb{C}P^1 \oplus p^*\mathcal{T}Y$, и следовательно, $\det\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1 \times Y) = p^*\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^1 \otimes p^*\mathcal{T}Y = p^*\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^1$, так как $\det\mathcal{T}Y$ тривиально. Осталось заметить, что $\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^1 \oplus \overline{\det\mathcal{T}\mathbb{C}P^1}$ тривиально, а значит, тривиально и $\det\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1 \times Y) \oplus \overline{\det\mathcal{T}(\mathbb{C}P^1 \times Y)}$. Следовательно, двойственное подмногообразие равно нулю.

В обозначениях предыдущего абзаца чтобы доказать последнее соотношение применим ∂_* к $[\mathbb{C}P^1 \times Y]$. Но $c_1(\mathbb{C}P^1 \times Y) = c_1(\mathbb{C}P^1) \otimes 1$ и двойственный класс гомологий представляется подмногообразием $2Y \subset \mathbb{C}P^1 \times Y$. Следовательно, $\partial_*(\mathbb{C}P^1 \times Y) = 2Y$.

Заметим, что последние два соотношения следуют также из результатов раздела 6, а именно, в лемме 6.5 мы докажем (независимо от того, что будет происходить в разделах 4 и 5) более общие утверждения. □

Следствие 4.4. *Если для некоторых $a, b \in A^U$ выполнено равенство $a\partial + b\varDelta = 0$, то $b = 0$.*

Доказательство. Достаточно умножить данное равенство справа на $\varPsi$ и воспользоваться предыдущими соотношениями. □

4.3. Основная теорема. Теперь мы можем сформулировать основной результат о $U^*(MSU)$, который позволит нам вычислить соответствующую спектральную последовательность Адамса–Новикова.

Теорема 4.5 ([**14**, теорема 6.1]).

а) *Ядро $\mathfrak{I}$ эпиморфизма $U^*(MU) \to U^*(MSU)$ совпадает с $A^U\varDelta + A^U\partial$. В частности, A^U-модуль $U^*(MSU)$ изоморфен $A^U/(A^U\varDelta + A^U\partial)$.*

б) *Левый аннулятор ∂ равен $A^U\varDelta + A^U\partial$.*

Доказательство. Исходное доказательство в [**14**] в некоторых моментах довольно схематично. Восполнение деталей потребовало некоторой технической работы. Доказательство будет состоять из трёх частей.

I. Покажем, что $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) = U_*(BSU)$. Другими словами, класс бордизмов $[X, \xi] \in U_m(BU)$ лежит в образе $\widetilde{\partial}$ тогда и только тогда, когда он представляется парой (X, ξ), где ξ — SU-расслоение, т. е. $c_1(\xi) = 0$.

Для доказательства включения $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) \supset U_*(BSU)$ возьмём $[X, \xi] \in U_m(BU)$ с $c_1(\xi) = 0$. Рассмотрим класс бордизмов $[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] \in U_{m+2}(BU)$, где η — тавтологическое линейное расслоение над $\mathbb{C}P^1$. Согласно определению операции $\widetilde{\partial}$ (конструкция 3.2), $\widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta] = [Y, \zeta]$, где $Y \subset X \times \mathbb{C}P^1$ — подмногообразие коразмерности 2, двойственное к $c_1(\xi \times \eta) = 1 \otimes c_1(\eta)$. Следовательно, мы можем взять $Y = X$, и тогда

$$\zeta = \xi \times \eta|_X + \mathcal{T}(X \times \mathbb{C}P^1)|_X - \mathcal{T}X = \xi$$

как стабильные расслоения. В итоге получаем, что $[X, \xi] = \widetilde{\partial}[X \times \mathbb{C}P^1, \xi \times \eta]$.

Для доказательства обратного включения $\widetilde{\partial}(U_*(BU)) \subset U_*(BSU)$ возьмём $[Y, \zeta] = \widetilde{\partial}[X, \xi]$. Мы должны показать, что класс ζ представляется SU-расслоением. Но согласно конструкции 3.2,

$$\widetilde{\partial}[X, \xi] = [Y, \xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y] \in U_{m-2}(BU),$$

где $Y \subset X$ — подмногообразие коразмерности 2 с нормальным расслоением $\nu(Y \subset X) = \overline{\det\xi}|_Y$. Тогда

$$c_1(\zeta) = c_1(\xi|_Y + \mathcal{T}X|_Y - \mathcal{T}Y) = c_1(\xi|_Y) + c_1(\nu) = c_1(\det\xi|_Y) + c_1(\overline{\det\xi}|_Y) = 0,$$

и значит, ζ — SU-расслоение.

II. Покажем, что $\mathrm{Ann}_L\partial = \varphi^*(\mathcal{I}(\delta)) = \mathfrak{I}$, где $\mathrm{Ann}_L\partial$ обозначает левый аннулятор ∂ в A^U. Пусть $a\partial = 0$ для некоторого $a \in A^U$. Тогда $\widetilde{a}\widetilde{\partial} = 0$, что по предыдущему пункту эквивалентно тому, что $\widetilde{a}|_{U_*(BSU)} = 0$. Другими словами, $\widetilde{a}[X,\xi] = [Y_a, f_a^*(\xi + \mathcal{T}X) - \mathcal{T}Y_a] = 0$ для любого SU-расслоения ξ. В частности, $[Y_a] = 0$ в $\varOmega_U$. Но согласно (3.1) $[Y_a] = \langle(\varphi^*)^{-1}a, [X,\xi]\rangle$. Отсюда следует, что $(\varphi^*)^{-1}a \in U^*(BU) = \mathrm{Hom}_{\varOmega^U}(U_*(BU), \varOmega^U)$ лежит в идеале $\mathcal{I}(\delta)$, потому что последний состоит в точности из тех гомоморфизмов $U_*(BU) \to \varOmega^U$, которые обращаются в ноль на $U_*(BSU)$, то есть, на классах бордизмов SU-расслоений. То есть, $a \in \varphi^*(\mathcal{I}(\delta)) = \mathfrak{I}$ и $\mathrm{Ann}_L(\partial) \subset \mathfrak{I}$. Для доказательства противоположного включения заметим, что $a \in \varphi^*(\mathcal{I}(\delta)) = \mathfrak{I}$ влечёт, что $a_*\partial_* = 0$ (так как $\partial_*[M]$ есть SU-многообразие). Теперь лемма 3.1 показывает, что $a\partial = 0$, и следовательно, $a \in \mathrm{Ann}_L(\partial)$.

III. Покажем теперь, что $\mathfrak{I} = A^U\varDelta + A^U\partial$.

Из следствия 4.4 вытекает, что сумма $A^U\varDelta + A^U\partial$ прямая, и далее мы будем обозначать её $A^U\varDelta \oplus A^U\partial$.

Включение $A^U\varDelta \oplus A^U\partial \subset \varphi^*(\mathcal{I}(\delta))$ следует из определения $\varDelta$ и ∂, см. конструкцию 4.1. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow A^U\varDelta \oplus A^U\partial \xrightarrow{\ i\ } \mathfrak{I} \longrightarrow \mathfrak{I}/(A^U\varDelta \oplus A^U\partial) \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

градуированных $\varOmega_U$-модулей. Обозначим

$$N = \mathfrak{I}/(A^U\varDelta \oplus A^U\partial).$$

Нам нужно показать, что $N = 0$.

Для начала покажем, что N не имеет $\varOmega_U$-кручения. Пусть $\lambda n = 0$ для ненулевого $\lambda \in \varOmega_U$ и $n = x + (A^U\varDelta + A^U\partial) \in N$, $x \in \mathfrak{I}$. То есть, $\lambda x = a\varDelta + b\partial$ для некоторых $a, b \in A^U$. Умножая справа на $\varPsi$ и используя лемму 4.3, получаем $a = \lambda x\varPsi$ и $b\partial = \lambda x - \lambda x\varPsi\varDelta = \lambda y$. Следовательно, $\widetilde{b}\widetilde{\partial} = \widetilde{\lambda}\widetilde{y}$. Далее, для класса бордизмов $[Y,\zeta] \in U_*(BSU)$ мы имеем

$$\bigl\langle(\varphi^*)^{-1}b, [Y,\zeta]\bigr\rangle = \bigl\langle(\varphi^*)^{-1}b, \widetilde{\partial}[X,\xi]\bigr\rangle = \varepsilon(\widetilde{b}\widetilde{\partial}[X,\xi]) = \varepsilon(\widetilde{\lambda}\widetilde{y}\,[X,\xi]) = \lambda\varepsilon(\widetilde{y}\,[X,\xi]),$$

где первое равенство следует из пункта I, а второе — из соотношений (3.1). Рассмотрим естественную проекцию $p\colon U^*(BU) \to U^*(BSU)$, двойственную посредством кронекеровского спаривания естественному включению $U_*(BSU) \hookrightarrow U_*(BU)$. Тогда из равенства выше вытекает, что $p((\varphi^*)^{-1}b) = \lambda w$ для некоторого $w \in U^*(BSU)$. Мы имеем $w = p(t)$ для некоторого $t \in U^*(BU)$, следовательно, $p((\varphi^*)^{-1}b - \lambda t) = 0$, и мы получаем, что $(\varphi^*)^{-1}b - \lambda t \in \mathrm{Ker}\,p = \mathcal{I}(\delta)$. Значит, $b - \lambda\varphi^*(t) \in \mathfrak{I}$ и $b\partial = \lambda\varphi^*(t)\partial$ по пункту II. В итоге получаем, что $\lambda x = a\varDelta + b\partial = \lambda(x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial)$. Так как A^U не имеет $\varOmega_U$-кручения, мы заключаем, что $x = x\varPsi\varDelta + \varphi^*(t)\partial \in A^U\varDelta \oplus A^U\partial$, и значит, $n = 0$. Что и требовалось.

Теперь рассмотрим следующие A^U-линейные отображения:

$$p_\varDelta\colon A^U \to A^U\varDelta, \quad a \mapsto 2a\varPsi\varDelta, \qquad\qquad p_\partial\colon A^U \to A^U\partial, \quad a \mapsto a[\mathbb{C}P^1]\partial.$$

Эти отображения ведут себя подобно взаимно ортогональным проекторам, а именно, они удовлетворяют следующим равенствам

$$p_\varDelta|_{A^U\varDelta} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\varDelta}, \qquad p_\varDelta|_{A^U\partial} = 0, \qquad p_\partial|_{A^U\partial} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\partial}, \qquad p_\partial|_{A^U\varDelta} = 0.$$

Это проверяется прямым вычислением с использованием леммы 4.3:

$$\begin{aligned} p_\varDelta(a\varDelta) &= 2a\varDelta\varPsi\varDelta = 2a\varDelta,\\ p_\varDelta(b\partial) &= 2b\partial\varPsi\varDelta = 0,\\ p_\partial(a\varDelta) &= a\varDelta[\mathbb{C}P^1]\partial = 0,\\ p_\partial(b\partial) &= b\partial[\mathbb{C}P^1]\partial = 2b\partial. \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем A^U-линейное отображение $p = p_\Delta + p_\partial\colon A^U \to A^U\Delta \oplus A^U\partial$, удовлетворяющее $p|_{A^U\Delta\oplus A^U\partial} = 2\,\mathrm{id}_{A^U\Delta\oplus A^U\partial}$. Теперь мы воспользуемся следующим чисто алгебраическим фактом.

Лемма 4.6. *Пусть* $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ *— короткая точная последовательность R-модулей над коммутативным кольцом R. Предположим, что A не имеет n-кручения для некоторого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$, и существует такой гомоморфизм $p\colon B \to A$, что $p \circ i = n\,\mathrm{id}_A$. Тогда существует мономорфизм $s\colon nC \hookrightarrow B$.*

Доказательство. Рассмотрим $nc \in nC$. Если $nc = \pi(nb)$, то $nc = \pi(nb - i(p(b)))$ и $p(nb - i(p(b))) = np(b) - np(b) = 0$. Следовательно, существует такой элемент $x := nb - i(p(b)) \in B$, что $\pi(x) = nc$ и $p(x) = 0$. Если x' — другой такой элемент, то $\pi(x - x') = 0$, следовательно, $x - x' = i(y)$, и $0 = p(x - x') = p(i(y)) = ny$. Так как A не имеет n-кручения, $y = 0$ и $x = x'$. Таким образом, x определяется единственным образом, и мы получаем корректно определённый гомоморфизм $s\colon nC \to B$, $nc \mapsto x$, удовлетворяющий равенствам $p \circ s = 0$ и $\pi \circ s = \mathrm{id}_{nC}$. Из последнего равенства вытекает, что s инъективен. □

Применяя эту лемму к короткой точной последовательности (4.3) и отображению $p = p_\Delta + p_\partial$ (ограниченному на $\mathfrak{I}$), мы заключаем, что $2N$ вкладывается в $\mathfrak{I} \subset A^U$. Так как N не имеет 2-кручения, то сам N также вкладывается в $\mathfrak{I} \subset A^U$. Кроме того, применяя $\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}$ к (4.3), мы получаем короткую точную последовательность градуированных абелевых групп

$$0 \to \big((A^U\Delta)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}\big) \xrightarrow{i\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}} \mathfrak{I}\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z} \to N\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z} \to 0. \tag{4.4}$$

Инъективность второго отображения следует из равенства $(p\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})(i\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}) = 2\,\mathrm{id}$ и отсутствия кручения в $\big((A^U\Delta)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}\big) \oplus \big((A^U\partial)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}\big)$ (эта группа описана ниже). Заметим, что $M\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z} = M/(\Omega_U^+M)$ для любого Ω_U-модуля M, где Ω_U^+ обозначает идеал элементов ненулевой (отрицательной) степени из Ω_U.

Теперь мы, используя подсчёт размерностей, покажем, что $N\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z}$ — конечная группа (в каждой размерности).

Так как Δ имеет правый обратный Ψ, A^U-модуль $A^U\Delta$ — свободный с одной образующей в размерности 4. То есть, $(A^U\Delta)^{2k} = U^{2k-4}(MU)$. Следовательно,

$$((A^U\Delta)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})^{2k} = (U^{*-4}(MU)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})^{2k} = H^{2k-4}(MU;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{p(k-2)},$$

где $p(k)$ — количество целочисленных разбиений числа k. Кроме того,

$$\begin{aligned}(A^U\partial)^{2k} = (A^U)^{2k-2}\partial \cong (A^U)^{2k-2}/(\mathrm{Ann}_L\,\partial)^{2k-2}\\ = (A^U)^{2k-2}/(\mathfrak{I})^{2k-2} = U^{2k-2}(MSU),\end{aligned}$$

где третье равенство следует из пункта II, а последнее — из равенства (4.1). Отсюда получаем, что

$$((A^U\partial)\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})^{2k} \cong H^{2k-2}(MSU;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\widetilde{p}(k-1)},$$

где $\widetilde{p}(k)$ — число целочисленных разбиений числа k без 1. Наконец, $\mathfrak{I}\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z} = \varphi_H^*(\mathcal{I}(c_1))$, где $\varphi_H^*\colon H^*(BU,\mathbb{Z}) \to H^*(MU,\mathbb{Z})$ — изоморфизм Тома в целочисленных когомологиях, и $\mathcal{I}(c_1)$ — идеал в $H^*(BU,\mathbb{Z})$, порождённый первым универсальным классом Чженя c_1. Следовательно,

$$(\mathfrak{I}\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})^{2k} = (\varphi_H^*(\mathcal{I}(c_1)))^{2k} = \mathbb{Z}^{p(k-1)}.$$

Применяя полученные равенства к $(2k)$-ой однородной компоненте последовательности (4.4), мы получаем

$$0 \to \mathbb{Z}^{p(k-2)+\widetilde{p}(k-1)} \to \mathbb{Z}^{p(k-1)} \to (N\otimes_{\Omega_U}\mathbb{Z})^{2k} \to 0.$$

Теперь из равенства $p(k-1) = p(k-2) + \widetilde{p}(k-1)$ следует, что группы $(N \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^{2k}$ конечны.

Таким образом, мы имеем такой градуированный Ω_U-подмодуль N в A^U, что $(N \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z})^{2k}$ — конечная группа для каждого k. Мы должны показать, что $N = 0$. Рассмотрим Ω_U-линейную проекцию $p_\omega\colon A^U \to \Omega_U$, сопоставляющую элементу $a \in A^U$ его коэффициент λ_ω в представлении $a = \sum_\omega \lambda_\omega S_\omega$ в виде ряда от операций $S_\omega \in A^U$ Ландвебера–Новикова. Так как группа $N \otimes_{\Omega_U} \mathbb{Z} = N/(\Omega_U^+ N)$ конечна в кажой размерности, группа $p_\omega(N)/(\Omega_U^+ p_\omega(N))$ также конечна в кажой размерности. Нам нужно установить, что $p_\omega(N) = 0$. Мы имеем следующую алгебраическую ситуацию. Пусть R — неотрицательно (или неположительно) градуированное кольцо без кручения, и пусть $I \subset R$ — идеал такой, что группа $I/(R^+ I)$ конечна в каждой размерности. Тогда утверждается, что $I = 0$. Действительно, рассмотрим элемент $x \in I$ минимальной возможной степени. Тогда $nx \in R^+ I$ для некоторого ненулевого целого числа n. Но так как степень элемента x минимальна в I, каждый ненулевой элемент из $R^+ I$ имеет степень строго большую, чем $\deg x$. Значит, $nx = 0$. Так как R не имеет кручения, мы заключаем, что $x = 0$ и $I = 0$. Возвращаясь к нашей ситуации, мы получаем, что $p_\omega(N) = 0$ для всех ω. А значит, $N = 0$, что и требовалось.

Итак, мы показали, что $\mathfrak{I} = A^U \Delta + A^U \partial$. Вместе с равенством (4.1) и пунктом II это завершает доказательство обоих пунктов теоремы. $\square$

5. Применение спектральной последовательности к спектру MSU

5.1. Вычисление члена E_2 спектральной последовательности. Применим теперь спектральную последовательность Адамса–Новикова (теорема 3.4) к спектру SU-бордизмов $X = MSU$ ([**14**, §7]). В результате мы получим мультипликативную спектральную последовательность со вторым членом

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{A^U}^{p,q}(U^*(MSU), U^*(pt)),$$

сходящуюся к $\pi_*(MSU) = \Omega_*^{SU}$.

Из теоремы 4.5 следует, что имеется свободная резольвента левых A^U-модулей:

$$0 \longleftarrow U^*(MSU) \cong A^U/(A^U\partial + A^U\Delta) \longleftarrow A^U \xleftarrow{f_0} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_1} A^U \oplus A^U \xleftarrow{f_2} \dots$$

где $A^U \to A^U/(A^U\partial + A^U)$ — естественная проекция, $f_0(a,b) = a\partial + b\Delta$ и $f_i(a,b) = (a\partial + b\Delta, 0)$ для $i \geqslant 1$. Мы сформулируем это более аккуратно следующим образом:

Предложение 5.1. *Имеется следующая свободная резольвента левых A^U-модулей:*

$$0 \longleftarrow U^*(MSU) \longleftarrow R^0 \xleftarrow{f_0} R^1 \xleftarrow{f_1} R^2 \xleftarrow{f_2} \dots$$

где $R^0 = A^U\langle u_0\rangle$ — свободный модуль с одной образующей в размерности 0, $R^i = A^U\langle u_i, v_i\rangle$ — свободный модуль с двумя образующими, $\deg u_i = 2i$, $\deg v_i = 2i+2$, $i \geqslant 1$, и $f_{i-1}(u_i) = \partial u_{i-1}$, $f_{i-1}(v_i) = \Delta u_{i-1}$.

Доказательство. Мы имеем $f_{i-1} f_i = 0$, поскольку $\partial^2 = \Delta\partial = 0$. Точность в члене R^0 — это утверждение теоремы 4.5. Чтобы проверить точность в R^i для $i \geqslant 1$, предположим, что $0 = f_{i-1}(au_i + bv_i) = (a\partial + b\Delta)u_{i-1}$. Тогда $a\partial + b\Delta = 0$, из чего следует, что $b = 0$ и $a\partial = 0$ по следствию 4.4. Значит, $a \in \mathrm{Ann}_L \partial$, и следовательно, $a = a'\partial + b'\Delta$ по теореме 4.5 б). В итоге получаем $au_i + bv_i = au_i = f_i(a'u_{i+1} + b'v_{i+1})$, что и требовалось. $\square$

Применяя теперь функтор $\mathrm{Hom}_{A^U}^q(-, U^*(pt))$ к резольвенте из предложения 5.1 и используя изоморфизмы $\Omega_U^{-q} = \Omega_q^U$, мы получаем комплекс, гомологии которого есть члены $E_2^{*,q}$ спектральной последовательности:

$$0 \longrightarrow \Omega_q^U \xrightarrow{d^0} \Omega_{q-2}^U \oplus \Omega_{q-4}^U \xrightarrow{d^1} \Omega_{q-4}^U \oplus \Omega_{q-6}^U \xrightarrow{d^2} \dots \tag{5.1}$$

Дифференциалы действуют как $d^0(a) = (\partial a, \Delta a)$ и $d^i(a,b) = (\partial a, \Delta a)$, $i \geqslant 1$. Здесь через ∂ и Δ обозначены уже действия соответствующих операций на Ω^U; этих обозначений мы будем придерживаться и далее.

В работе [**6**] Коннер и Флойд ввели в рассмотрение группы

$$\mathcal{W}_q = \operatorname{Ker}(\Delta\colon \Omega^U_q \to \Omega^U_{q-4}).$$

К этим группам мы вернёмся в разделе 6, а пока заметим, что так как $\partial^2 = \Delta\partial = 0$, мы получаем дифференциал $\partial\colon \mathcal{W}_k \to \mathcal{W}_{k-2}$.

Предложение 5.2. *Комплекс (5.1) квазиизоморфен своему подкомплексу*

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_q \xrightarrow{\partial} \mathcal{W}_{q-2} \xrightarrow{\partial} \mathcal{W}_{q-4} \xrightarrow{\partial} \dots$$

Доказательство. Рассмотрим включение $i\colon \mathcal{W}_k \to \Omega^U_k \oplus \Omega^U_{k-2}$, $w \mapsto (w,0)$, для $w \in \operatorname{Ker}\Delta$ (в размерности ноль рассматриваем просто включение $\mathcal{W}_k \hookrightarrow \Omega^U_k$). Это отображение цепных комплексов, так как $i(\partial w) = (\partial w, 0) = (\partial w, \Delta w) = d(w,0) = di(w)$. Из определений видно, что $\ker d_0 = \ker\Delta \cap \ker\partial = \ker(\partial|_{\mathcal{W}})$, то есть, в нулевой размерности имеем совпадение гомологий комплексов. Теперь рассмотрим индуцированное включением i отображение в гомологиях в положительных размерностях. Оно инъективно, так как из $i(w) = d(a,b)$ следует, что $(w,0) = (\partial a, \Delta a)$, и значит, $w = \partial a$ для $a \in \operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{W}_*$. Чтобы доказать сюръективность, рассмотрим цикл $(a,b) \in \Omega^U_k \oplus \Omega^U_{k-2}$. Тогда $0 = d(a,b) = (\partial a, \Delta a)$. Поскольку отображение $\Delta\colon \Omega^U_{k+2} \to \Omega^U_{k-2}$ сюръективно (оно имеет правое обратное Ψ), существует элемент $b' \in \Omega^U_{k+2}$ такой, что $\Delta b' = b$. Тогда $a - \partial b' \in \operatorname{Ker}\Delta$ является ∂-циклом, и $(a,b) - i(a-\partial b') = (a,b) - (a - \partial b', 0) = (\partial b', b) = d(b', 0)$, то есть, $i(a - \partial b')$ гомологичен (a,b). ☐

Предложение 5.3. *Для члена E_2 спектральной последовательности выполнено*

а) $E_2^{0,q} = \operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W}_q \to \mathcal{W}_{q-2}) = (\operatorname{Ker}\partial) \cap (\operatorname{Ker}\Delta) \subset \Omega^U_q$;

б) $E_2^{p,q} = H_{q-2p}(\mathcal{W}_*, \partial)$ *для* $p > 0$.

в) *краевой гомоморфизм* $h\colon \Omega^{SU}_q \to E_2^{0,q}$ *совпадает с забывающим гомоморфизмом* $\Omega^{SU}_q \to \mathcal{W}_q$.

Следовательно, спектральная последовательность сконцентрирована в первом квадранте (т. е., $E_r^{p,q} = 0$ для $p < 0$ или $q < 0$), $E_r^{p,q} = 0$ для нечётных q или при $q < 2p$, и дифференциалы $d_r\colon E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$ тривиальны для чётных r.

Доказательство. Утверждения а) и б) прямо следуют из предложения 5.2. Для доказательства пункта в) напомним, что краевой гомоморфизм

$$h\colon \Omega^{SU}_q \to E_2^{0,q} = \operatorname{Hom}^q_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)$$

определяется следующим образом. Для элемента $\alpha \in \Omega^{SU}_q$, представленного отображением $f\colon S^q \to MSU$ и элемента $\beta \in U^p(MSU)$, представленного отображением $g\colon MSU \to \Sigma^p MU$ элемент $h(\alpha)(\beta) \in \Omega_U^{p-q}$ представляется композицией $g \circ f\colon S^q \to \Sigma^p MU$. Отождествление $E_2^{0,q} = \operatorname{Hom}^q_{A^U}(U^*(MSU), \Omega_U)$ с $\operatorname{Ker}(\partial\colon \mathcal{W}_q \to \mathcal{W}_{q-2})$ сопоставляет A^U-гомоморфизму $\varphi\colon U^*(MSU) \to \Omega_U^{*-q}$ элемент $\varphi(\iota)$, где $\iota \in U^0(MSU)$ — класс, представляемый каноническим отображением спектров $MSU \to MU$. Таким образом, краевой гомоморфизм представляет собой отображение $\Omega^{SU}_q \to \Omega^U_q$, $\alpha \mapsto h(\alpha)(\iota)$, что есть в точности гомоморфизм забывания, что доказывает в). Оставшиеся утверждения следуют из того, что комплекс $\mathcal{W}_*$ сконцентрирован в неотрицательных чётных размерностях. ☐

В частности, $d_2 = 0$ и $E_2 = E_3$. Мы будем обозначать этот член просто E.

5.2. Вычисление члена E_∞. Мы имеем $E^{1,2}=H_0(\mathcal{W}_*,\partial)=\mathbb{Z}_2$, так как $\mathcal{W}_0=\Omega^U_0=\mathbb{Z}$, $\mathcal{W}_2=\Omega^U_2=\mathbb{Z}$ с образующей $[\mathbb{C}P^1]$, и $\partial[\mathbb{C}P^1]=2$. Рассмотрим образующую $\theta\in E^{1,2}$. По соображениям размерности это цикл всех дифференциалов, так как она лежит на «граничной линии» $q=2p$.

Предложение 5.4. *Умножение на θ определяет изоморфизм $E^{p,q}\to E^{p+1,q+2}$ для $p>0$ и эпиморфизм $E^{0,q}\to E^{1,q+2}$ с ядром $\operatorname{Im}\partial$.*

Доказательство. Для $p>0$ отображение $E^{p,q}\xrightarrow{\cdot\theta}E^{p+1,q+2}$ есть просто тождественное отображение $H_{q-2p}(\mathcal{W}_*)\to H_{q-2p}(\mathcal{W}_*)$. Для $p=0$ гомоморфизм $E^{0,q}\to E^{1,q+2}$ есть естественная проекция $\operatorname{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}_q\to\mathcal{W}_{q-2})$ на $H_q(\mathcal{W}_*)$, и значит, его ядро есть $\operatorname{Im}\partial$. ☐

Отсюда следует, что $E^{p,q}=\theta E^{p-1,q-2}$ для $p\geqslant 1$. В частности, $E^{k,2k}=\mathbb{Z}_2$ с образующей θ^k, и значит, единственные ненулевые элементы на граничной линии $q=2p$ это $1,\theta,\theta^2,\theta^3,\dots$

Рассмотрим теперь $E^{0,4}=\operatorname{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}_4\to\mathcal{W}_2)$. Заметим, что $\partial|_{\Omega^U_4}=0$, так как единственное число Чженя для многообразий из Ω^U_2 это c_1. Следовательно, $E^{0,4}=\mathcal{W}_4$. Кроме того, $\mathcal{W}_4\cong\mathbb{Z}$ с образующей

$$K=9[\mathbb{C}P^1]^2-8[\mathbb{C}P^2]$$

(этот класс бордизмов имеет характеристические числа $c_1^2=0$ и $c_2=12$). Значит, K является образующей в $E^{0,4}=\mathbb{Z}$.

Имеется потенциально нетривиальный дифференциал $d_3\colon E^{0,4}\to E^{3,6}$, см. рис. 1.

Предложение 5.5. *Мы имеем $d_3(K)=\theta^3$.*

Доказательство. Так как $E^{3,6}=\{0,\theta^3\}$, достаточно доказать, что $d_3(K)\neq 0$. Пусть $d_3(K)=0$. Мы также имеем $d_i(K)=0$ для $i>3$, поскольку в этом случае $d_i(K)\in E^{i,i+3}$ лежит ниже граничной линии $p=2q$. Отсюда следует, что K является циклом всех дифференциалов, и значит, представляет элемент в $E^{0,4}_\infty$. Тогда $E^{0,4}_2=E^{0,4}_\infty$, откуда следует, что краевой гомоморфизм $\Omega^{SU}_4\to E^{0,4}_2$ сюръективен. Но этот гомоморфизм, согласно предложению 5.3 в), совпадает с забывающим гомоморфизмом $\Omega^{SU}_4\to\mathcal{W}_4$, который не может быть сюръективным, например, потому, что $\operatorname{td}(K)=1$, тогда как род Тодда 4-мерного SU-многообразия всегда чётен (это следует, например, из классической теоремы Рохлина о сигнатуре [**15**]). Таким образом, мы пришли к противоречию. ☐

Предложение 5.6. *Мы имеем $E^{p,q}_4=0$ для $p\geqslant 3$ и $E_4=E_\infty$.*

Доказательство. Возьмём d_3-цикл $x\in E^{p,q}$ с $p\geqslant 3$. Мы имеем $x=\theta^3y$ для некоторого $y\in E^{p-3,q-6}$ и $0=d_3x=\theta^3d_3y$. Но $d_3y\in E^{p,q-4}$, и умножение на θ^3 биективно в этой размерности согласно предложению 5.4. Значит, $d_3y=0$. Отсюда следует, что $x=\theta^3y=d_3(Ky)$. То есть, x — граница, и $E^{p,q}_4=0$ для $p\geqslant 3$. По соображениям размерности отсюда следует, что $d_i=0$ для всех $i\geqslant 4$ и $E_\infty=E_4$. ☐

Итак, мы видим, что бесконечный член спектральной последовательности состоит только из трёх столбцов, причём они равны просто $\operatorname{Ker}d_3$ по соображениям размерности. Кроме того, легко видеть, что умножение на θ так же индуцирует изоморфизм $E^{1,*}_\infty\xrightarrow{\cdot\theta}E^{2,*}_\infty$ и эпиморфизм $E^{0,*}_\infty\xrightarrow{\cdot\theta}E^{1,*}_\infty$ с ядром $\operatorname{Im}\partial$. В частности, $E^{k,2k}_\infty=E^{k,2k}=\mathbb{Z}_2$ с образующей θ^k для $k=1,2$, и $E^{k,2k}_\infty=0$ для $k\geqslant 3$.

Из предложения 5.6 следует, что для фильтрации Адамса–Новикова на Ω^{SU} выполнено $F^{p,q}=0$ при $p\geqslant 3$, то есть, фильтрация состоит только из трёх членов:

$$\Omega^{SU}_n=F^{0,n}\supset F^{1,n+1}\supset F^{2,n+2}=E^{2,n+2}_\infty.$$

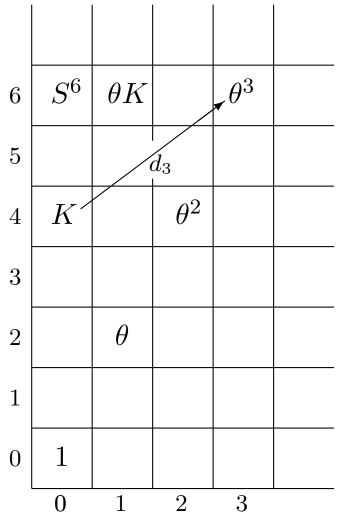

Рис. 1. Член $E_2 = E_3$ спектральной последовательности Адамса–Новикова для SU-бордизмов.

Для нечётного $n = 2k+1$ мы имеем $F^{0,2k+1}/F^{1,2k+2} = E_\infty^{0,2k+1} = 0$ и $F^{2,2k+3} = E_\infty^{2,2k+3} = 0$ согласно предложению 5.3. Следовательно,

$$\Omega^{SU}_{2k+1} = E_\infty^{1,2k+2}. \tag{5.2}$$

Для чётного $n = 2k$ мы имеем $F^{1,2k+1}/F^{2,2k+2} = E_\infty^{1,2k+1} = 0$, и значит, мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \to E_\infty^{2,2k+2} \to \Omega^{SU}_{2k} \to E_\infty^{0,2k} \to 0. \tag{5.3}$$

Пример 5.7. В малых размерностях мы имеем следующее.

- $\Omega^{SU}_0 = E_\infty^{0,0} = E^{0,0} \cong \mathbb{Z}$, так как $E_\infty^{2,2} = 0$.
- $\Omega^{SU}_1 = E_\infty^{1,2} = E^{1,2} \cong \mathbb{Z}_2$ с образующей θ.
- $\Omega^{SU}_2 = E_\infty^{2,4} \cong \mathbb{Z}_2$ с образующей θ^2, поскольку $0 = E^{0,2} = \operatorname{Ker}\partial \subset \mathcal{W}_2$ (напомним, что группа $\mathcal{W}_2$ порождена $[\mathbb{C}P^1]$ и $\partial[\mathbb{C}P^2] = 2$).
- $\Omega^{SU}_3 = E_\infty^{1,4} = \theta E_\infty^{0,2} = 0$.
- $\Omega^{SU}_4 = E_\infty^{0,4} \cong \mathbb{Z}$ с образующей $2K$. Равенство $\Omega^{SU}_4 = E_\infty^{0,4}$ следует из (5.3), так как $E_\infty^{2,6} = \theta^2 E_\infty^{0,2} = 0$. Образующей группы $E_\infty^{0,4} = \operatorname{Ker} d_3$ является $2K$, так как $d_3(K) = \theta^3$.
- $\Omega^{SU}_5 = E_\infty^{1,6} = \theta E_\infty^{0,4} = 0$, так как $\theta \cdot 2K = 0$.

5.3. Применение к вычислению кручения в Ω^{SU}. Теперь на основе полученной информации о спектральной последовательности можно уже приступить к вычислению кручения в SU-бордизмах.

Теорема 5.8.

а) *Ядро забывающего гомоморфизма $\Omega^{SU} \to \Omega^U$ состоит в точности из элементов кручения.*

б) *Каждый элемент кручения из Ω^{SU} имеет порядок 2. Более точно,*

$$\Omega^{SU}_{2k+1} = \theta\Omega^{SU}_{2k}, \quad \operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{2k} = \theta^2\Omega^{SU}_{2k-2}.$$

Доказательство. Мы имеем $\Omega^{SU}_{2k+1} = E_\infty^{1,2k+2} = \theta E_\infty^{0,2k} = \theta\Omega^{SU}_{2k}$, так как отображение $\Omega^{SU}_{2k} \to E_\infty^{0,2k}$ сюръективно. Отсюда также следует, что Ω^{SU}_{2k+1} целиком состоит из элементов 2-кручения, что даёт пункты а) и б) в нечётных размерностях.

В чётных размерностях мы воспользуемся точной последовательностью (5.3). Так как $E_\infty^{0,2k} \subset E^{0,2k} \subset \mathcal{W}_* \subset \varOmega^U$ свободно от кручения, а $E_\infty^{2,2k+2} = \theta^2 E_\infty^{0,2k-2}$ целиком состоит из 2-кручения, мы получаем $\operatorname{Tors} \varOmega^{SU}_{2k} = E_\infty^{2,2k+2} = \theta^2 E_\infty^{0,2k-2} = \theta^2 \varOmega^{SU}_{2k-2}$, что доказывает пункт б). Чтобы закончить доказательство пункта а), осталось заметить, что ядро гомоморфизма $\varOmega^{SU} \to \varOmega^U$, согласно предложению 5.3 в), совпадает с ядром гомоморфизма $\varOmega^{SU}_{2k} \to E_\infty^{0,2k}$, которое равно кручению в $\varOmega^{SU}_{2k}$ по предыдущему. $\square$

Следующая лемма даёт точную последовательность, полученную Коннером и Флойдом [**6**], которая играет ключевую роль при вычислении кручения в $\varOmega^{SU}$.

Лемма 5.9. *Имеется короткая точная последовательность $\mathbb{Z}_2$-модулей*

$$0 \to \varOmega^{SU}_{2k-1} \to H_{2k-2}(\mathcal{W}_*, \partial) \to \varOmega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varOmega^{SU}_{2k-1} = E_\infty^{1,2k} \arrow[r] & E^{1,2k} \arrow[r, "d_3^{1,2k}"] & E^{4,2k+2} \arrow[r, "d_3^{4,2k+2}"] & E^{7,2k+4} \\
 & 0 \arrow[r] & \varOmega^{SU}_{2k-5} \arrow[r] & E^{1,2k-4} \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta^3"] \arrow[r, "d_3^{1,2k-4}"] & E^{4,2k-2} \arrow[u, "\cong"', "\cdot\theta^3"]
\end{tikzcd}$$

Её строки точны согласно предложению 5.6 и (5.2). Из коммутативности диаграммы мы имеем $\operatorname{Im} d_3^{1,2k} = \operatorname{Ker} d_3^{4,2k+2} \cong \operatorname{Ker} d_3^{1,2k-4} = \varOmega^{SU}_{2k-5}$. Отсюда получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \varOmega^{SU}_{2k-1} \to E^{1,2k} \to \varOmega^{SU}_{2k-5} \to 0.$$

Осталось заметить, что $E^{1,2k} = H_{2k-2}(\mathcal{W}_*, \partial)$. $\square$

Гомологии комплекса $(\mathcal{W}_*, \partial)$ были вычислены Коннером и Флойдом.

Теорема 5.10 ([**6**, теорема 11.8]). *$H(\mathcal{W}_*, \partial)$ есть полиномиальная алгебра над $\mathbb{Z}_2$ следующего вида:*

$$H(\mathcal{W}_*, \partial) \cong \mathbb{Z}_2[\omega_2, \omega_{4k} \colon k \geqslant 2], \quad \deg \omega_2 = 4,\ \deg \omega_{4k} = 8k.$$

Замечание. Умножение в $H(\mathcal{W}_*, \partial)$ индуцировано умножением в $\varOmega^U$. Оно совпадает с умножением в члене E_2 спектральной последовательности Адамса–Новикова. В разделе 6 мы введём умножение в группе $\mathcal{W}$, которое будет индуцировать то же умножение в гомологиях.

Ввиду важности этой теоремы мы приведём её доказательство в конце раздела 6, после того, как лучше разберёмся со структурой $\mathcal{W}$.

В итоге мы получаем следующую информацию о свободной части и кручении групп $\varOmega^{SU}$:

Теорема 5.11.

а) $\operatorname{Tors} \varOmega^{SU}_n = 0$ *за исключением $n = 8k+1$ или $8k+2$, когда $\operatorname{Tors} \varOmega^{SU}_n$ есть $\mathbb{Z}_2$-модуль размерности, равной количеству разбиений числа k.*

б) $\varOmega^{SU}_{2i} / \operatorname{Tors}$ *изоморфно образу забывающего гомоморфизма $\alpha \colon \varOmega^{SU}_{2i} \to \varOmega^U_{2i}$, который равен $\operatorname{Ker}(\partial \colon \mathcal{W}_{2i} \to \mathcal{W}_{2i-2})$, если $2i \not\equiv 4 \mod 8$, и $\operatorname{Im}(\partial \colon \mathcal{W}_{2i} \to \mathcal{W}_{2i-2})$, если $2i \equiv 4 \mod 8$.*

в) *Существуют классы SU-бордизмов $w_{4k} \in \varOmega^{SU}_{8k}$, $k \geqslant 1$ такие, что любой элемент кручения из $\varOmega^{SU}$ единственным образом представляется в виде $P \cdot \theta$ или $P \cdot \theta^2$, где P — многочлен от w_{4k} с коэффициентами равными 0 или 1. Каждый элемент $w_{4k} \in \varOmega^{SU}_{8k}$ определяется из условия, что он представляет полиномиальную образующую ω_{4k} в $H_{8k}(\mathcal{W}_*, \partial)$ для $k \geqslant 2$, а $w_4 \in \varOmega^{SU}_8$ — представляет ω_2^2.*

Замечание. Единственная неоднозначность в определении w_{4k} заключается в выборе ∂-цикла из $\mathcal{W}_{8k}$, представляющего полиномиальную образующую ω_{4k} или ω_2^2 из теоремы 5.10. Коль скоро выбраны представители $w_{4k} \in \mathcal{W}_{8k}$, они уже однозначно поднимаются до $w_{4k} \in \varOmega_{8k}^{SU}$, так как забывающий гомоморфизм $\alpha\colon \varOmega_{8k}^{SU} \to \mathcal{W}_{8k}$ есть мономорфизм на $\operatorname{Ker}\partial$ в размерности $8k$, согласно утверждениям а) и б).

Доказательство теоремы 5.11. Докажем пункт а). Из теоремы 5.10 следует, что $H_{q-2p}(\mathcal{W}_*) = 0$ кроме случаев $q-2p = 8k$ или $q-2p = 8k+4$. Сначала рассмотрим случай нечётного n. Лемма 5.9 даёт точную последовательность

$$0 \to \varOmega_{8k-1}^{SU} \to H_{8k-2}(\mathcal{W}_*) \to \varOmega_{8k-5}^{SU} \to 0,$$

из которой следует, что $\varOmega_{8k-1}^{SU} = \varOmega_{8k-5}^{SU} = 0$. Также мы имеем точную последовательность

$$0 \to \varOmega_{8k+1}^{SU} \to H_{8k}(\mathcal{W}_*) \to \varOmega_{8k-3}^{SU} \to 0,$$

которая расщепляется, так как $H(\mathcal{W}_*)$ является $\mathbb{Z}_2$-модулем. То есть, $\varOmega_{8k+1}^{SU} \oplus \varOmega_{8k-3}^{SU} \cong H_{8k}(\mathcal{W}_*) \cong H_{8k+4}(\mathcal{W}_*) \cong \varOmega_{8k+5}^{SU} \oplus \varOmega_{8k+1}^{SU}$. Следовательно, $\varOmega_{8k-3}^{SU} = \varOmega_{8k+5}^{SU}$. Так как это верно для всех k, мы получаем, что $\varOmega_{8k+5}^{SU} = 0$. В итоге получаем, что единственной нетривиальной группой $\varOmega_n^{SU}$ с нечётным n остаётся $\varOmega_{8k+1}^{SU}$, и лемма 5.9 даёт изоморфизм $\varOmega_{8k+1}^{SU} \cong H_{8k}(\mathcal{W}_*)$. Теперь из теоремы 5.10 следует, что $\varOmega_{8k+1}^{SU}$ — $\mathbb{Z}_2$-модуль размерности, равной числу разбиений k.

Для чётного $n = 2m$ теорема 5.8 даёт $\operatorname{Tors}\varOmega_{2m}^{SU} = \theta\varOmega_{2m-1}^{SU}$. Согласно предыдущему абзацу, эта группа нетривиальна только при $2m = 8k+2$. Умножение на θ определяет изоморфизм

$$\varOmega_{8k+1}^{SU} = E_\infty^{1,8k+2} \xrightarrow{\cdot\theta} E_\infty^{2,8k+4} = \operatorname{Tors}\varOmega_{8k+2}^{SU}.$$

Это доказывает пункт а).

Для доказательства пункта б) напомним, что $\operatorname{Tors}\varOmega_q^{SU}$ совпадает с ядром забывающего гомоморфизма $\varOmega_q^{SU} \to \mathcal{W}_q$ по теореме 5.8 а), а сам забывающий гомоморфизм совпадает с краевым гомоморфизмом $h\colon \varOmega_q^{SU} \to E_2^{0,q}$, согласно предложению 5.3 в). Следовательно, $\varOmega^{SU}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Im} h$. Кроме того, $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker}(d_3\colon E_3^{0,*} \to E^{3,*+2})$ по предложению 5.6.

Тогда для $2i \ne 8k, 8k+4$ мы имеем

$$d_3(E^{0,2i}) = \theta^{-1} d_3(\theta E^{0,2i}) = \theta^{-1} d_3(E^{1,2i+2}) = 0$$

так как $E^{1,2i+2} = H_{2i}(\mathcal{W}_*) = 0$ по теореме 5.10. Следовательно, в этом случае получаем, что $\varOmega_{2i}^{SU}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Ker} d_3 = E^{0,2i} = \operatorname{Ker}\partial$.

Для $2i = 8k$ заметим, что

$$0 = \varOmega_{8k-3}^{SU} = E_\infty^{1,8k-2} = \operatorname{Ker} d_3^{1,8k-2} \subset E^{1,8k-2}.$$

Отсюда получаем

$$0 = \operatorname{Ker}(d_3^{1,8k-2}\theta^{-2}) = \operatorname{Ker}(\theta^{-2} d_3^{3,8k+2}) = \operatorname{Ker} d_3^{3,8k+2}. \tag{5.4}$$

А значит, $\operatorname{Im} d_3^{0,8k} \subset \operatorname{Ker} d_3^{3,8k+2} = 0$, и $\varOmega_{8k}^{SU}/\operatorname{Tors} \cong \operatorname{Ker} d_3^{0,8k} = E^{0,8k} = \operatorname{Ker}\partial$.

Осталось рассмотреть случай $2i = 8k+4$. Точная последовательность (5.3) даёт $\varOmega_{8k+2}^{SU} = E_\infty^{0,8k+4}$, так как $E_\infty^{2,8k+6} \subset E^{2,8k+6} = H_{8k+2}(\mathcal{W}_*) = 0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \varOmega_{8k+4}^{SU} = E_\infty^{0,8k+4} \arrow[r] & E^{0,8k+4} \arrow[r, "d_3^{0,8k+4}"] \arrow[d, "\cdot\theta^3"] & E^{3,8k+6} \arrow[d, "\cdot\theta^3", "\cong"'] \\
 & 0 \arrow[r] & E^{3,8k+10} \arrow[r, "d_3^{3,8k+10}"] & E^{6,8k+12}
\end{tikzcd}$$

Точность нижней строки следует из (5.4). Из этой диаграммы получаем, что

$$\Omega^{SU}_{8k+4}\cong \operatorname{Ker} d_3^{0,8k+4}=\operatorname{Ker}(E^{0,8k+4}\xrightarrow{\cdot\theta^3}E^{3,8k+10})=\operatorname{Ker}(E^{0,8k+4}\xrightarrow{\cdot\theta}E^{1,8k+6})=\operatorname{Im}\partial,$$

где два последних равенства следуют из предложения 5.4. Это завершает доказательство пункта б).

Осталось доказать пункт в). Используя только что доказанный пункт б) и теорему 5.8 б), мы можем отождествить гомоморфизм $\Omega^{SU}_{8n}\xrightarrow{\cdot\theta}\Omega^{SU}_{8n+1}$ с проекцией $\operatorname{Ker}\partial\to\operatorname{Ker}\partial/\operatorname{Im}\partial=H_{8n}(\mathcal{W}_*)$. Возьмём тогда элемент $\alpha\in\Omega^{SU}_{8n+1}$ и запишем его, согласно теореме 5.10, в виде многочлена $P(\omega_{4k})$ от ω_{4k} с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. (Чтобы не усложнять обозначения, здесь и далее в размерности 4 подразумевается ω_2^2 вместо несуществующего ω_4.) Выберем поднятия $w_{4k}\in\Omega^{SU}_{8k}=\operatorname{Ker}\partial\subset\mathcal{W}_{4k}$ классов ω_{4k}; тогда $a=P(w_{4k})$ отображается в α. Другими словами, $\alpha=P(w_{4k})\cdot\theta$, где теперь P понимается как многочлен с коэффициентами 0 и 1. Если $\alpha=Q(w_{4k})\cdot\theta$ для другого такого многочлена Q, то $P(\omega_{4k})=Q(\omega_{4k})$, откуда следует, что $P=Q$, так как ω_{4k} алгебраически независимы над $\mathbb{Z}_2$ и оба многочлена P и Q имеют коэффициенты 0 и 1. В итоге, каждый элемент Ω^{SU}_{8k+1} единственным образом представляется в виде $P\cdot\theta$, что и утверждалось. Для элементов из $\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}$ осталось всполоить, что $\Omega^{SU}_{8k+1}\xrightarrow{\cdot\theta}\operatorname{Tors}\Omega^{SU}_{8k+2}$ — изоморфизм. Это завершает доказательство теоремы. □

6. Кольцо $\mathcal{W}$

Теорема 5.11 б) связывает группу $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$ с подгруппой $\operatorname{Ker}(\partial\colon\mathcal{W}\to\mathcal{W})=(\operatorname{Ker}\partial)\cap(\operatorname{Ker}\Delta)$ в Ω^U. Хотя $\mathcal{W}=\operatorname{Ker}\Delta$ *не является* подкольцом в Ω^U, существует умножение в $\mathcal{W}$, относительно которого включение $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}\subset\mathcal{W}$ является кольцевым гомоморфизмом. Это приводит к описанию кольцевой структуры в $\Omega^{SU}/\operatorname{Tors}$. Мы рассмотрим здесь этот подход, следуя [**6**], [**18**] и [**17**].

6.1. Эквивалентные определения подгруппы $\mathcal{W}\subset\Omega^U$. Напомним определение геометрических операций $\partial\colon\Omega^U_{2n}\to\Omega^U_{2n-2}$ и $\Delta\colon\Omega^U_{2n}\to\Omega^U_{2n-4}$, см. (4.2).

Конструкция 6.1 (∂ и Δ, напоминание). Рассмотрим стабильно комплексное многообразие $M=M^{2n}$ с фундаментальным классом $[M^{2n}]_{\mathbb{Z}}\in H_{2n}(M;\mathbb{Z})$. Пусть $N=N^{2n-2}$ — стабильно комплексное подмногообразие, двойственное к когомологическому классу $c_1(M)=c_1(\det\mathcal{T}M)$. То есть, мы имеем включение

$$i\colon N^{2n-2}\hookrightarrow M^{2n}\quad\text{такое, что}\quad i_*([N]_{\mathbb{Z}})=c_1(M)\frown[M]_{\mathbb{Z}}\quad\text{в } H_*(M;\mathbb{Z}).$$

Ограничение $\det\mathcal{T}M$ на N является нормальным расслоением $\nu(N\subset M)$. Стабильно комплексная структура на N определяется с помощью изоморфизма $\mathcal{T}M|_N\cong\mathcal{T}N\oplus\nu(N\subset M)$. Отсюда вытекает, что $c_1(N)=0$, и значит, N является SU-многообразием.

Гомоморфизм $\partial=\Delta_{(1,0)}\colon\Omega^U_{2n}\to\Omega^U_{2n-2}$ отправляет класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов $[N]$, двойственный к $c_1(M)$, в описанном выше смысле. Эта операция корректно определена, и на языке кобордизмов записывается как $[N]=\varepsilon D_U(c_1^U(\det\mathcal{T}M))$, где $D_U\colon U^2(M)\to U_{2n-2}(M)$ — гомоморфизм двойственности Пуанкаре-Атья и $\varepsilon\colon U_{2n-2}(M)\to\Omega^U_{2n-2}$ — аугментация (из отображения M в точку). Мы имеем $\partial^2=0$, так как $c_1(N)=0$.

Аналогично, гомоморфизм $\Delta=\Delta_{(1,1)}\colon\Omega^U_{2n}\to\Omega^U_{2n-4}$ отображает класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов подмногообразия $L=L^{2n-4}$, двойственного к $\det\mathcal{T}M\oplus\overline{\det\mathcal{T}M}$. То есть, мы имеем

$$j\colon L^{2n-4}\hookrightarrow M^{2n}\quad\text{такое, что}\quad j_*([L]_{\mathbb{Z}})=-c_1^2(M)\frown[M]_{\mathbb{Z}}\quad\text{в } H_*(M;\mathbb{Z}),$$

и $[L]=\varepsilon D_U(c_1^U(\det\mathcal{T}M)c_1^U(\overline{\det\mathcal{T}M}))$.

Рассмотрим также гомоморфизмы $\partial_k=\Delta_{(k,0)}\colon\Omega^U_{2n}\to\Omega^U_{2n-2k}$, отображающие класс бордизмов $[M]$ в класс бордизмов подмногообразия $j\colon P\hookrightarrow M$, двойственного к

$(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k}$. Мы имеем $[P] = \varepsilon D_U(c_1^U(\det \mathcal{T}M)^k)$ и $j_*([P]_{\mathbb{Z}}) = c_1^k(M) \frown [M]_{\mathbb{Z}}$. Заметим, что $\partial_1 = \partial$ и логично считать, что $\partial_0 = \mathbb{1}$.

Лемма 6.2. *Пусть $[M] \in \Omega^U$ — класс бордизмов, у которого равны нулю все числа Чженя, содержащие множитель c_1^k. Тогда $\partial_k[M] = 0$.*

Доказательство. Мы имеем $\partial_k[M] = [P]$, где $j\colon P \hookrightarrow M$ — такое подмногообразие, что

$$\mathcal{T}P \oplus j^*(\det \mathcal{T}M)^{\oplus k} = j^*(\mathcal{T}M).$$

Предположим, что $c_1^k c_\omega[M] = 0$ для всех ω. Мы должны показать, что $c_\omega[P] = 0$. Вычисляя полный класс Чженя расслоения выше, мы получаем

$$c(P)(1 + j^*c_1(M))^k = j^*c(M).$$

или

$$c(P) = j^*\left(\frac{c(M)}{(1 + c_1(M))^k}\right) = j^*\,\widetilde{c}(M),$$

где $\widetilde{c}(M)$ — некоторый многочлен от классов Чженя многообразия M. Тогда для любого $\omega = (i_1, \ldots, i_p)$ мы имеем

$$\bigl\langle c_\omega(P), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle j^*\,\widetilde{c}_\omega(M), [P]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle \widetilde{c}_\omega(M), c_1^k(M) \frown [M]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = \bigl\langle c_1^k\,\widetilde{c}_\omega(M), [M]_{\mathbb{Z}}\bigr\rangle = 0.$$

□

Ранее мы определили группы $\mathcal{W}_{2n}$ как

$$\mathcal{W}_{2n} = \mathrm{Ker}(\varDelta\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n-4}).$$

Эти же группы могут быть определены в терминах характеристических чисел и геометрически, как описывается ниже. Когомологический класс $x \in H^2(M)$ называется сферическим, если он индуцируется отображением в $\mathbb{C}P^1$.

Теорема 6.3. *Следующие три группы совпадают:*

а) *группа $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}\,\varDelta$;*
б) *подгруппа в Ω^U, состоящая из тех классов бордизмов, у которых равны нулю все характеристические числа Чженя, содержащие множитель c_1^2;*
в) *подгруппа в Ω^U, состоящая из классов бордизмов, представляемых многообразием с первым классом Чженя, удовлетворяющим $c_1^2 = 0$.*
г) *подгруппа в Ω^U, состоящая из классов бордизмов, представляемых многообразием со сферическим первым классом Чженя.*

Доказательство. Следующие импликации очевидны: г) ⇒ в) ⇒ б) (здесь под номером пункта теоремы подразумевается указанное в нём свойство на элементы Ω^U, то есть, лежать в ядре оператора $\varDelta$, иметь представителя со сферическим первым классом Чженя и т. п.). Импликация б) ⇒ а) доказывается аналогично лемме 6.2. Оставшуюся импликацию а) ⇒ г) мы докажем в подразделе 6.3 (см. замечание после предложения 6.11). Но для этого нам понадобится всё-таки эквивалентность пунктов а) и б). Поэтому докажем здесь непосредственно импликацию а) ⇒ б).

По определению $\varDelta[M] = [L]$, где $j\colon L \hookrightarrow M$ — такое подмногообразие, что

$$\mathcal{T}L \oplus j^*\bigl(\det \mathcal{T}M \oplus \overline{\det \mathcal{T}M}\bigr) = j^*(\mathcal{T}M).$$

Вычислим классы Чженя:

$$c(L)(1 + j^*c_1(M))(1 - j^*c_1(M)) = j^*c(M),$$
$$c_i(L) - c_{i-2}(L) \cdot j^*c_1^2(M) = j^*c_i(M).$$

В частности, для $i = 1$ мы получаем $c_1(L) = j^*c_1(M)$, так что мы можем переписать формулу выше в виде

$$(c_i - c_1^2 c_{i-2})(L) = j^*c_i(M).$$

Для разбиения $\omega = (i_1, \dots, i_p)$ и соответствующего класса Чженя $c_\omega = c_{i_1} \cdots c_{i_p}$ мы получаем следующее соотношение на характеристические числа:

$$\big\langle (c_{i_1} - c_1^2 c_{i_1-2}) \cdots (c_{i_p} - c_1^2 c_{i_p-2})(L), [L]_{\mathbb{Z}} \big\rangle = \big\langle j^* c_\omega(M), [L]_{\mathbb{Z}} \big\rangle = \big\langle -c_1^2 c_\omega(M), [M]_{\mathbb{Z}} \big\rangle$$

Но теперь, если $\Delta[M] = [L] = 0$, то левая часть равенства выше равна нулю, и мы получаем из правой части, что каждое число Чженя многообразия M, содержащее множитель c_1^2, равно нулю.

□

Следствие 6.4. *Если $[M] \in \mathcal{W}$, то $\partial_k[M] = 0$ для всех $k \geqslant 2$.*

Доказательство. По теореме 6.3 (доказанной части) из $[M] \in \mathcal{W}$ следует, что каждое число Чженя многообразия M, содержащее в качестве множителя c_1^2, равно нулю. Но тогда тем более равно нулю каждое число Чженя, содержащее множителем c_1^k для $k \geqslant 2$. Следовательно, по лемме 6.2, $\partial_k[M] = 0$. □

Замечание. Мы видим, что лемма 6.2 соответствует импликации б) $\Rightarrow$ а). Оказывается, для операций ∂_k, $k \geqslant 2$ верно также обращение леммы 6.2, аналогичное импликации б) $\Rightarrow$ а) для Δ. Действительно, рассмотрим $\partial_k[M] = [P] \overset{j}{\hookrightarrow} M$. Аналогично теореме 6.3 мы имеем

$$\mathcal{T}P \oplus j^*\big(\det \mathcal{T}M\big)^{\oplus k} = j^*(\mathcal{T}M)$$
$$c(P)(1 + j^* c_1(M))^k = j^* c(M)$$

Получаем, что $c_1(P) + k j^* c_1(M) = j^* c_1(M)$, то есть, $c_1(P) = (1-k) j^* c_1(M)$. Умножая теперь полный класс Чженя на $(1-k)^k$, получаем:

$$c(P)((1-k) + c_1(P))^k = (1-k)^k j^* c(M),$$

то есть, $(1-k)^k j^* c_i(M) = \widetilde{c}_i(P)$ для некоторых многочленов $\widetilde{c}_i$ от классов Чженя. Отсюда уже получаем

$$\big\langle \widetilde{c}_\omega(P), [P]_{\mathbb{Z}} \big\rangle = (1-k)^k \big\langle j^* c_\omega(M), [P]_{\mathbb{Z}} \big\rangle = (1-k)^k \big\langle c_1^k c_\omega(M), [M]_{\mathbb{Z}} \big\rangle$$

Значит, если $\partial_k[M] = [P] = 0$, то все числа Чженя многообразия M, содержащие c_1^k, равны нулю после умножения на $(1-k)^k$. То есть, и сами эти числа равны нулю при $k \neq 1$.

Заметим, что аналогчиные рассуждения проходят и для всех операций $\Delta_{(k_1,k_2)}$ при $k_1 - k_2 \neq 1$.

Для операции же $\partial = \partial_1$ обращение леммы 6.2 не имеет места. Например, каждый элемент из Ω_4^U лежит в $\operatorname{Ker} \partial$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^2] \neq 0$.

6.2. Мультипликативные свойства Δ и ∂. Чтобы изучить мультипликативную структуру $\mathcal{W}$, нам нужно понять, как ведут себя операции Δ и ∂ с произведениями элементов из $\mathcal{W}$.

Лемма 6.5. *Для любых элементов $a, b \in \mathcal{W}$ выполнено*

$$\partial(ab) = a\partial b + \partial a b - [\mathbb{C}P^1]\partial a \partial b,$$
$$\Delta(ab) = -2\partial a \partial b,$$

где умножение понимается Ω^U.

Доказательство. Пусть $a = [M_1]$ и $b = [M_2]$ для некоторых стабильно комплексных многообразий. Тогда $ab = [M_1 \times M_2]$ и $\mathcal{T}(M_1 \times M_2) = p_1^*(\mathcal{T}M_1) \oplus p_2^*(\mathcal{T}M_2)$, где $p_i \colon M_1 \times M_2 \to M_i$ — естественные проекции.

Мы имеем $\det(\mathcal{T}(M_1 \times M_2)) = p_1^*(\det(\mathcal{T}M_1)) \otimes p_2^*(\det(\mathcal{T}M_2))$. Обозначим $u_i = p_i^*(c_1^U(\det(\mathcal{T}M_i))) \in U^2(M_1 \times M_2)$. Тогда по определению

$$\partial(ab) = \varepsilon D_U(c_1^U(\det(\mathcal{T}(M_1 \times M_2)))) = \varepsilon D_U(c_1^U(p_1^*(\det(\mathcal{T}M_1))) \otimes c_1^U(p_2^*(\det(\mathcal{T}M_2)))) =$$
$$= \varepsilon D_U(F_U(c_1^U(p_1^*(\det(\mathcal{T}M_1))), c_1^U(p_2^*(\det(\mathcal{T}M_2))))) = \varepsilon D_U(F_U(u_1, u_2)) = \varepsilon D_U(u_1 + u_2 +$$
$$+ \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} u_1^i u_2^j) = \varepsilon D_U(u_1) + \varepsilon D_U(u_2) + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij} \varepsilon D_U(u_1^i u_2^j).$$

Заметим, что

$$\varepsilon D_U(u_1^i) = \langle (p_1^*(c_1^U(\det(\mathcal{T}M_1))))^i, [M_1 \times M_2]\rangle = \langle (c_1^U(\det(\mathcal{T}M_1)))^i, (p_1)_*[M_1 \times M_2]\rangle =$$
$$= \langle (c_1^U(\det(\mathcal{T}M_1)))^i, [M_2]\cdot[M_1]\rangle = [M_2]\langle (c_1^U(\det(\mathcal{T}M_1)))^i, [M_1]\rangle = [M_2]\varepsilon D_U((c_1^U(\det(\mathcal{T}M_1)))^i) = [M_2]\partial_i[M_1$$

Аналогично $\varepsilon D_U(u_1^j) = [M_1]\partial_j[M_2]$. Осталось заметить, что двойственность Пуанкаре–Атья переводит произведение в пересечение, и следовательно, $\varepsilon D_U(u_1^i u_2^j) = [M_2]\partial_i[M_1] \cap [M_1]\partial_j[M_2] = \partial_i[M_1]\partial_j[M_2]$.

В итоге получаем общую формулу верную для любых $a, b \in OU$:

$$\partial(ab) = a\partial b + b\partial a + \sum_{i,j\geqslant 1} \alpha_{ij}\partial_i a \partial_j b.$$

Но если $a, b \in \mathcal{W}$, то по следствию 6.4 получаем, что $\partial_{i\geqslant 2} a = 0$, $\partial_{j\geqslant 2} b = 0$. То есть, в этом случае формула сворачивается до вида:

$$\partial(ab) = a\partial b + b\partial a + \alpha_{11}\partial a \partial b.$$

Отсюда следует первое равенство леммы, если заметить, что $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$ (см., например [**5**, теорема E.2.3]).

Аналогично доказывается и второе равенство:

$$\Delta(a \cdot b) = \varepsilon D_U(c_1^U(\det(\mathcal{T}(M_1 \times M_2)))\overline{c_1^U}(\det(\mathcal{T}(M_1 \times M_2)))) =$$
$$= \varepsilon D_U(F_U(u_1, u_2)\overline{F_U(u_1, u_2)}) = \varepsilon D_U((u_1 + u_2 + \ldots)(-u_1 - u_2 + \ldots)).$$

Последнее равенство здесь следует из того, что $\overline{u} = -u + (u^2)$. Опять же из того, что $a, b \in \mathcal{W}$ мы получаем, что $\varepsilon D_U(u_1^i u_2^j) = 0$ при $i > 1$ или $j > 1$. Значит, из всех слагаемых ненулевой вклад даёт лишь член $-2u_1u_2$, и мы получаем искомую формулу $\Delta(ab) = -2\partial a \partial b$.

□

6.3. Проекторы Коннера–Флойда и Стонга. Прямая сумма $\mathcal{W} = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathcal{W}_{2i}$ не является подкольцом в Ω^U: мы имеем $[\mathbb{C}P^1] \in \mathcal{W}_2$, но $c_1^2[\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] = 8 \neq 0$, и значит, $[\mathbb{C}P^1] \times [\mathbb{C}P^1] \notin \mathcal{W}_4$. Однако можно определить кольцевую структуру в $\mathcal{W}$, ииспользуя проекторы $\Omega^U \to \Omega^U$ с образом $\mathcal{W}$.

Начнём с проектора, который определяется алгебраически и восходит к Коннеру и Флойду [**6**]. Напомним, что в конструкции 4.2 была определена операция $\Psi\colon \Omega^U_{2n} \to \Omega^U_{2n+4}$, являющаяся правой обратной к Δ.

Предложение 6.6. *Гомоморфизм* $\rho = \mathrm{id} - \Psi\Delta\colon \Omega^U \to \Omega^U$ *является проектором, для которого* $\operatorname{Im}\rho = \mathcal{W}$, $\operatorname{Ker}\rho = \Psi(\Omega^U)$ *и* $\partial\rho = \rho\partial = \partial$.

Доказательство. Соотношение $\Delta\Psi = \mathrm{id}$ из леммы 4.3 влечёт, что $(\mathrm{id} - \Psi\Delta)^2 = \mathrm{id} - \Psi\Delta$, то есть, ρ — проектор. Из этого же соотношения вытекает, что $\Delta\rho = 0$, то есть, $\operatorname{Im}\rho \subset \operatorname{Ker}\Delta = \mathcal{W}$. Включение же $\operatorname{Im}\rho \supset \operatorname{Ker}\Delta$ вытекает из того, что $\rho|_{\mathcal{W}} = \mathrm{id}|_{\mathcal{W}}$. Равенство $\operatorname{Ker}\rho = \operatorname{Im}\Psi$ также следует из соотношения $\Delta\Psi = \mathrm{id}$. Наконец, $\partial(\mathrm{id} - \Psi\Delta) = \partial - \partial\Psi\Delta = \partial$, так как $\partial\Psi = 0$, и $(\mathrm{id} - \Psi\Delta)\partial = \partial - \Psi\Delta\partial = \partial$, так как $\Delta\partial = 0$. □

Следствие 6.7. $\operatorname{rank}\mathcal{W}_{2n} = \operatorname{rank}\Omega^U_{2n} - \operatorname{rank}\Omega^U_{2n-4}$.

Доказательство. Из предыдущего предложения следует, что $\Omega^U = \operatorname{Ker}\rho \oplus \operatorname{Im}\rho$. Мы имеем $(\operatorname{Im}\rho)_{2n} = \mathcal{W}_{2n}$ и $(\operatorname{Ker}\rho)_{2n} = \Psi(\Omega^U_{2n-4}) \cong \Omega^U_{2n-4}$, поскольку Ψ инъективно (оно имеет левое обратное Δ). ☐

Отсюда следует, что ранги у $\mathcal{W}_*$ такие же, как и у $\mathbb{Z}[x_1, x_i,\ i \geqslant 3]$, $\deg x_i = 2i$.

Используя проектор $\rho = \mathrm{id} - \Psi\Delta$, определим *скрученное произведение* элементов $a, b \in \mathcal{W}$ как

$$a * b = \rho(a \cdot b),$$

где $\cdot$ обозначает умножение в Ω^U. Геометрическое описание этого умножения даётся следующим предложением.

Предложение 6.8. *Мы имеем*

$$a * b = a \cdot b + 2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b,$$

где V^4 — многообразие $\mathbb{C}P^2$ со стабильно комплексной структурой $\mathcal{T}\mathbb{C}P^2 \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \cong \bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta$.

Доказательство. Мы должны проверить, что $\Psi\Delta(a \cdot b) = -2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b$. По лемме 6.5, $\Delta(a \cdot b) = -2\partial a \cdot \partial b$. Напомним, что, согласно конструкции 4.2, $\Psi[M]$ представляется многообразием $\mathbb{C}P(\overline{\det \mathcal{T}M} \oplus \mathbb{C}^2)$ со стабильно комплексной структурой $p^*\mathcal{T}M \oplus (\bar{\eta} \otimes p^*\overline{\det \mathcal{T}M}) \oplus \bar{\eta} \oplus \eta$. В нашем случае $[M] = -2\partial a \cdot \partial b$, и значит, расслоение $\det \mathcal{T}M$ тривиально. Следовательно, мы получаем, что класс бордизмов $\Psi\Delta(a \cdot b) = \Psi[M]$ представляется тотальным пространством тривиального расслоения $\mathbb{C}P(\mathbb{C}^3)$ над M со слоем $\mathbb{C}P^2$ со стабильно комплексной структурой $\bar{\eta} \oplus \bar{\eta} \oplus \eta$. Этот класс бордизмов есть в точности прямое произведение $[V^4] \cdot [M] = -2[V^4] \cdot \partial a \cdot \partial b$, что и требовалось. ☐

Замечание. Мы можем также взять $V^4 = \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 - \mathbb{C}P^2$ со стандартной комплексной структурой, так как это многообразие бордантно тому, что описано в предложении 6.8.

Теорема 6.9. *Прямая сумма $\mathcal{W} = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathcal{W}_{2i}$ является ассоциативным коммутативным кольцом с единицей относительно умножения $*$.*

Доказательство. Мы должны только проверить, что умножение $*$ ассоциативно. Это прямое вычисление с использованием формулы из предложения 6.8. ☐

Определим теперь другой проектор π, восходящий к Стонгу (см. [**17**, Chapter VIII]) и определяемый геометрически следующим образом. Для стабильно комплексного многообразия M определим $\pi[M]$ как класс бордизмов подмногообразия $N \subset \mathbb{C}P^1 \times M$, двойственный к $\overline{\eta} \otimes \det(\mathcal{T}M)$. То есть, $\pi[M] = \varepsilon D_U(c_1^U(\overline{\eta} \otimes \det(\mathcal{T}M)))$.

Предложение 6.10. *Для любого $a \in \Omega^U$ выполнено равенство*

$$\pi(a) = a + \sum_{k \geqslant 2} \alpha_{1k} \partial_k a$$

.

Замечание. Заметим, что это утверждение однозначно расширяет изначальное геометрическое определение π до когомологической операции из $(A^U)^0$.

Доказательство. Пусть $a = [M]$. Обозначим $u = c_1^U(\overline{\eta})$, $v = c_1^U(\det(\mathcal{M}))$. Тогда

$$\pi(a) = \varepsilon D_U(c_1^U(\overline{\eta} \otimes \det(\mathcal{T}M))) = \varepsilon D_U(F_U(u, v)) = \varepsilon D_U(u) + \varepsilon D_U(v) + \\ + \sum_{i,j \geqslant 1} \alpha_{ij} \varepsilon D_U(u^i v^j) = [M] + [\mathbb{C}P^1]\partial[M] + \sum_{j \geqslant 1} \alpha_{1j} \partial_j [M].$$

В последнем равенстве мы использовали, что $\varepsilon D_U(u) = 1$ и $u^2 = 0$.

Осталось опять-таки воспользоваться равенством $\alpha_{11} = -[\mathbb{C}P^1]$.

☐

Предложение 6.11. *π является проектором на $\mathcal{W}$. При этом $\partial\pi = \pi\partial = \partial$.*

Доказательство. Согласно геометрическому определению $[N] = \pi[M]$ представляется многообразием со сферическим первым классом Чженя (он индуцируется отображением $N \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times M \to \mathbb{C}P^1$). Поэтому $\operatorname{Im}\pi \subset \mathcal{W}$. Но для $a \in \mathcal{W}$, согласно следствию 6.4, $\partial_{k\geqslant 2}a = 0$ и поэтому по предыдущему предложению $\pi a = a$. То есть, π — проектор с образом $\mathcal{W}$. Из предложения же 6.10 следует и то, что $\pi\partial = \partial$, так $\partial_k\partial = 0$.

Осталось доказать $\partial\pi = \partial$. Пусть опять же $a = [M]$, $\pi[M] = [N]$. В обозначениях предыдущего предложения: $u = c_1^U(\overline{\eta})$, $v = c_1^U(\det(\mathcal{T}M))$. Надо доказать, что $\partial[N] = \partial[M]$. Заметим, что $\det(\mathcal{T}N) = i^*(\overline{\eta})$ и $i_*[N] = D_U(c_1^U(\overline{\eta}\otimes\det(\mathcal{T}M))) = D_U(F_U(u,v)) = F_U(u,v) \frown [M\times\mathbb{C}P^1]$. Тогда следующая выкладка доказывает нужное равенство:

$$\partial[N] = \varepsilon D_U(i^*u) = \langle i^*u, [N]\rangle = \langle u, i_*[N]\rangle = \langle u, F_U(u,v) \frown [M\times\mathbb{C}P^1]\rangle =$$
$$= \langle uF_U(u,v), [M\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \langle uv, [M\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \partial[M].$$

Здесь мы использовали, что $u^2 = 0$. □

Замечание. Заметим, что, так как $\pi[M] = [M]$ для элементов $[M] \in \mathcal{W}$ и $\pi[M]$ представляется многообразием со сферическим первым классом Чженя, мы тем самым доказали импликацию а) $\Rightarrow$ г) из теоремы 6.3.

Предложение 6.12. *Проекторы ρ и π совпадают на элементах вида $a\cdot b$, $a, b \in \mathcal{W}$. Следовательно, они определяют одинаковые умножения в $\mathcal{W}$. Однако эти проекторы, вообще говоря, различны.*

Доказательство. Абсолютно аналогично доказательству леммы 6.5 проверяется, что $\partial_2(ab) = 2\partial a\partial b$ и $\partial_{i\geqslant 3}(ab) = 0$ при $a, b \in \mathcal{W}$. Тогда получаем: $\pi(ab) = ab + 2\alpha_{12}\partial\partial b$. Осталось заметить, что $\alpha_{12} = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$.

Однако эти проекторы различны. Во-первых, у них разные ядра. Например, согласно предложению 6.6 $[M^6] = \Psi[\mathbb{C}P^1]$ лежит в ядре ρ. Однако прямым вычислением можно проверить, что $c_1^3[M^6] = -2$, $c_3[M^6] = 2$ и $c_3(\pi[M^6]) = (-c_1^3 + c_3)[M^6] = 4 \neq 0$. Значит, $\pi[M^6] \neq 0$.

Во-вторых, например, $c_3(\rho[\mathbb{C}P^3]) = 68$, а $c_3(\pi[\mathbb{C}P^3]) = -60$. □

6.4. Мультипликативная структура на $\mathcal{W}$. Теперь мы готовы описать кольцевую структуру $(\mathcal{W}, *)$.

Напомним, что по теореме 1.1 класс бордизмов $[M^{2i}] \in \Omega_{2i}^U$ можно взять в качестве полиномиальной образующей кольца Ω^U, только если $s_i[M^{2i}] = \pm m_i$, где числа m_i определены в (1.2). Аналогичное описание для кольца $\mathcal{W}$ даётся в следующей теореме.

Теорема 6.13. *$\mathcal{W}$ является полиномиальным кольцом с образующими в каждой положительной чётной размерности за исключением 4:*

$$\mathcal{W} \cong \mathbb{Z}[x_1, x_i \colon i \geqslant 3], \quad x_1 = [\mathbb{C}P^1], \quad \deg x_i = 2i.$$

Полиномиальные образующие x_i выделяются условием $s_i(x_i) = \pm m_i m_{i-1}$ для $i \geqslant 3$. Граничный оператор $\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $\partial^2 = 0$ удовлетворяет равенству

$$\partial(a * b) = a * \partial b + \partial a * b - x_1 * \partial a * \partial b, \tag{6.1}$$

и полиномиальные образующие $\mathcal{W}$ можно выбрать так, что будет выполнено

$$\partial x_1 = 2, \quad \partial x_{2i} = x_{2i-1},$$

Доказательство. Мы начнём с проверки равенства (6.1):

$$\partial(a*b) = \partial\rho(ab) = \partial(ab) = a\partial b + b\partial a - [\mathbb{C}P^1]\partial a\partial b = a*\partial b + b*\partial a - [\mathbb{C}P^1]*\partial a*\partial b.$$

Здесь второе равенство содержится в предложении 6.6, третье — в лемме 6.5, а последнее также следует из леммы 6.5, так как из равенства $\Delta(ab) = -2\partial a\partial b$ для $a, b \in \mathcal{W}$ вытекает, что ab лежит в $\mathcal{W}$, и следовательно, $a*b = ab$, если $a \in \operatorname{Im}\partial$ или $b \in \operatorname{Im}\partial$.

В оставшейся части доказательства мы будем обозначать произведение элементов в $\mathcal{W}$ через $a*b$ только если оно отличается от произведения в Ω^U; в противном случае мы будем обозначать его через $a \cdot b$ или просто ab.

Теперь перейдём к доказательству основного утверждения. Мы начнём с определения классов бордизмов $b_i \in \mathcal{W}_{2i}$ для всех $i \geqslant 1$, кроме $i = 2$. Положим

$$b_i = \begin{cases} [\mathbb{C}P^1], & \text{если } i = 1, \\ \pi[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^{p+1}q}], & \text{если } i = 2^p(2q+1),\ p \geqslant 1,\ q \geqslant 1, \\ \pi[\mathbb{C}P^{2^p} \times \mathbb{C}P^{2^p}], & \text{если } i = 2^{p+1},\ p \geqslant 1, \\ \partial\, b_{i+1}, & \text{если } i \text{ нечётно и } i \geqslant 3, \end{cases}$$

где $\pi\colon \Omega^U \to \mathcal{W}$ — проектор Стонга, определённый выше. Прямой проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned} &s_i(b_i) = 1 \mod 2, \quad \text{если } i \neq 2^k - 1,\ i \neq 2^k, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^k - 1, \\ &s_i(b_i) = 2 \mod 4, \quad \text{если } i = 2^{p+1}, \\ &s_{(2^p,2^p)}(b_{2^{p+1}}) = 1 \mod 2. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Рассмотрим включение $\iota\colon \mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \to \Omega^U \otimes \mathbb{Z}_2$. Из формулы для умножения в $\mathcal{W}$ из предложения 6.8 следует, что ι является кольцевым гомоморфизмом. Из соотношений (6.2) вытекает, что существуют такие полиномиальные образующие a_i кольца $\Omega^U \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[a_i\colon i \geqslant 1]$, что $\iota(b_i) = a_i$ для $i \neq 2^{p+1}$ и $\iota(b_{2^{p+1}}) = (a_{2^p})^2 + \cdots$, где $\cdots$ обозначает разложимые элементы, соответствующие разбиениям строго меньшим $(2^p, 2^p)$ в лексикографическом порядке. Отсюда следует, что элементы $\iota(b_i)$ алгебраически независимы в полиномиальном кольце $\Omega^U \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[a_i\colon i \geqslant 1]$. Следовательно, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2$ содержит полиномиальное подкольцо $\mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3]$. Из сравнения рангов с использованием следствия 6.7 мы заключаем, что

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3].$$

Теперь заметим, что $s_i(b_i)$ является нечётнократным числу $m_i m_{i-1}$ для $i \geqslant 3$, то есть,

$$s_i(b_i) = (2q_i + 1) m_i m_{i-1}, \quad i \geqslant 3. \tag{6.3}$$

Это простая непосредственная проверка. Для чётных i это следует из (6.2) и того факта, что $s_i(b_i)$ делится на m_i, см. теорему 1.1 б). Для нечётных i мы имеем $b_i = \partial b_{i+1}$, так что b_i представляется SU-многообразием, и (6.3) следует из (6.2) и предложения 2.2.

По теореме 2.1, существуют элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, такие, что

$$s_i(y_i) = 2^{k_i} m_i m_{i-1}, \quad k_i \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Найдём теперь для целых чисел q_i из (6.3) и k_i из (6.4) такие целые β_i и γ_i, что

$$\beta_i 2^{k_i+1} + \gamma_i(2q_i + 1) = 1.$$

В этом случае γ_i обязательно нечётно, то есть $\gamma_i = 2\alpha_i + 1$ для некоторого целого α_i. Положим $x_1 = [\mathbb{C}P^1]$ и

$$x'_i = (2\alpha_i + 1) b_i + 2\beta_i y_i, \quad i \geqslant 3.$$

Тогда из вышесказанного вытекает, что $s_i(x'_i) = m_i m_{i-1}$. Искомые элементы x_i получаются из x'_i следующей модификацией:

$$x_{2i-1} = x'_{2i-1}, \quad x_{2i} = x'_{2i} - x_1\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}) b_{2i-1} - \beta_{2i-1} y_{2i-1}\big).$$

Тогда мы по-прежнему имеем

$$s_i(x_i) = m_i m_{i-1}$$

так как элементы $x_i - x_i'$ разложимы. Новые элементы x_{2i} всё ещё лежат в $\mathcal{W}$; для проверки используем второе равенство из леммы 6.5:

$$\Delta x_{2i} = \Delta x_{2i}' + 2\partial x_1 \partial\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = 0,$$

поскольку $x_{2i}' \in \mathcal{W} = \operatorname{Ker}\Delta$, $\partial b_{2i-1} = \partial^2 b_{2i} = 0$ и $\partial y_{2i-1} = 0$, так как $y_{2i-1} \in \Omega^{SU}$.

Чтобы проверить равенство $\partial x_{2i} = x_{2i-1}$, используем первое равенство из леммы 6.5:

$$\begin{aligned}\partial x_{2i} = \partial x_{2i}' - \partial x_1 \cdot \big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i}+1)\partial b_{2i}\\ - 2\big((\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1})b_{2i-1} - \beta_{2i-1}y_{2i-1}\big) = (2\alpha_{2i-1}+1)b_{2i-1} + 2\beta_{2i-1}y_{2i-1} = x_{2i-1}.\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим гомоморфизм

$$\varphi\colon \mathcal{R} = \mathbb{Z}[x_1, x_i\colon i \geqslant 3] \to \mathcal{W},$$

отправляющий полиномиальную образующую x_i в соответствующий элемент из $\mathcal{W}$, определённый выше. Заметим, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}_2$ отправляет x_i в b_i по модулю разложимых элементов. Как мы видели, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2[b_1, b_i\colon i \geqslant 3]$, откуда следует, что $\varphi \otimes \mathbb{Z}_2$ — изоморфизм. Так как $\mathcal{R}$ и $\mathcal{W}$ состоят из свободных групп конечного ранга в каждой размерности, φ — инъективен, и $\varphi(\mathcal{R}_n) \subset \mathcal{W}_n$ является подгруппой конечного нечётного индекса в каждой размерности.

Теперь мы покажем, что $\varphi\colon \mathcal{R} \to \mathcal{W}$ становится сюръективным после тензорного умножения на $\mathbb{Z}[\frac12]$. Отсюда будет следовать, что φ — изоморфизм.

Заметим, что для любого $\alpha \in \mathcal{W}$ мы имеем

$$\partial(x_1 * \alpha) = \partial x_1 \cdot \alpha + x_1 \cdot \partial\alpha - x_1 \cdot \partial x_1 \cdot \partial\alpha = 2\alpha - x_1\partial\alpha.$$

Значит, $\alpha = \frac12\partial(x_1 * \alpha) + \frac12 x_1\partial\alpha$ в $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$. Следовательно, $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ порождён 1 и x_1 как модуль над $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12] \subset \mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ (заметим, что $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ — подкольцо в $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$, согласно формуле из предложения 6.8). Более того, этот модуль свободен, так как из $0 = a + x_1 b$, $a, b \in \Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ следует, что $0 = \partial(a + x_1 b) = \partial x_1 \cdot b = 2b$, и следовательно, $b = 0$ и $a = 0$. То есть,

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12] = \Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac12]\langle 1, x_1\rangle.$$

Рассмотрим теперь следующие элементы из $\varphi(\mathcal{R}) \subset \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} &y_2 = 2x_1 * x_1 = \partial(x_1 * x_1 * x_1), && \\ &y_{2i} = \partial(x_1 * x_{2i}) = 2x_{2i} - x_1 x_{2i-1}, && i \geqslant 2, \\ &y_{2i-1} = x_{2i-1} = \partial(x_{2i}), && i \geqslant 2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

На самом деле эти элементы содержатся в Ω^{SU}, так как лежат в $\operatorname{Im}\partial$. Кроме того,

$$\begin{aligned} &s_2(y_2) = 2s_2(x_1 \cdot x_1 + 8[V^4]) = -16 s_2(\mathbb{C}P^2) = -48 = -8m_2m_1, && \\ &s_{2i}(y_{2i}) = 2s_{2i}(x_{2i}) = 2m_{2i}m_{2i-1}, && i \geqslant 2, \\ &s_{2i-1}(y_{2i-1}) = s_{2i-1}(x_{2i-1}) = m_{2i-1}m_{2i-2}, && i \geqslant 2, \end{aligned} \tag{6.6}$$

и следовательно, y_i являются полиномиальными образующими кольца $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ по теореме 2.1. Отсюда получаем, что $\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\frac12] = \Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]\langle 1, x_1\rangle \subset \varphi\big(\mathcal{R} \otimes \mathbb{Z}[\frac12]\big)$. То есть, $\varphi \otimes \mathbb{Z}[\frac12]$ является эпиморфизмом, что завершает доказательство.

Осталось заметить, что из формулы для умножения $*$ из предложения 6.8 следует, что разложимость элементов относительно умножения $*$ и умножения $\cdot$ равносильна в размерностях $\geqslant 6$. И значит, полиномиальные образующие кольца $\mathcal{W}$ также детектируются своими s-числами.

□

6.5. Вычисление кольца гомологий $H(\mathcal{W},\partial)$. Здесь мы докажем сформулированную выше теорему 5.10. Доказательство использует полученные в разделе 6 факты о $\mathcal{W}$, но, конечно, не зависит от результатов раздела 5, доказанных с помощью теоремы 5.10.

Теорема. *$H(\mathcal{W}_*,\partial)$ есть полиномиальная алгебра над $\mathbb{Z}_2$ следующего вида:*

$$H(\mathcal{W}_*,\partial)\cong\mathbb{Z}_2[\omega_2,\omega_{4k}\colon k\geqslant 2],\quad \deg\omega_2=4,\ \deg\omega_{4k}=8k.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что одно и то же умножение в гомологиях индуцируется и обычным умножением $\cdot$ в Ω^U, и умножением $*$ в $\mathcal{W}$.

Во-вторых, из формулы $\partial([\mathbb{C}P^1]x)=2x$ при $\partial x=0$ следует, что группы гомологий $H_*(\mathcal{W},\partial)$ состоят из 2-кручения.

Посчитаем сначала кольцо гомологий $H(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)$. Теперь мы знаем, что $\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2[b_i,\,i\neq 2]$, $\partial b_{2i}=b_{2i-1}$, $\partial b_1=0$ (по модулю 2), $\partial(xy)=x\partial y+y\partial x+b_1\partial x\partial y$.

Так как $\partial(b_1)=0$, то $\partial(b_1x)=b_1\partial x$, а значит, идеал I, натянутый на b_1 в $\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2$ замкнут относительно действия ∂. Обозначим через F факторкольцо $\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2/I=\mathbb{Z}_2[b_i,\,i\geqslant 3]$. Из короткой точной послдедовательности

$$0\to I\to\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2\to F\to 0$$

получаем длинную точную последовательность в кольцах гомологий

$$\ldots\longrightarrow H_{2i}(I)\longrightarrow H_{2i}(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H_{2i}(F)\longrightarrow H_{2i-2}(\mathcal{I})\longrightarrow\ldots$$

Так как $F=\mathbb{Z}_2[b_i,\,i\geqslant 3]$ есть тензорное произведение дифференциальных $\mathbb{Z}_2$-алгебр $F_i=\mathbb{Z}_2[b_{2i},b_{2i-1}]$, $\partial b_{2i}=b_{2i-1}$, $i\geqslant 2$ и $H_*(F_i)=\mathbb{Z}_2[b_{2i}^2]$, мы получаем, что $H_*(F)=\mathbb{Z}_2[b_{2i}^2,\,i\geqslant 2]$.

Так как $\partial(b_{2i}^2+b_1b_{2i-1}b_{2i})=0$, то мы имеем циклы $h_{4i}=b_{2i}^2+b_1b_{2i-1}b_{2i}$ из $\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2$, переходящие в b_{2i}^2 при проекции на F. Значит, отображение в гомологиях $H_*(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)\to H_*(F)$ отображает подкольцо $\mathbb{Z}_2[h_{4i},\,i>1]$ изоморфно на $H_*(F)$, и следовательно, длинная точная последовательность в гомологиях расщепляется на короткие точные послдедовательности (которые расщепляются, так как состоят из векторных пространств над $\mathbb{Z}_2$)

$$0\to H_{2i}(I)\longrightarrow H_{2i}(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H_{2i}(F)\to 0$$

Более того, из $b_1\partial x=\partial b_1x$ сдедует, что $H_*(I)$ вкладывается в $H_*(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)$ в качестве $b_1H_*(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)$. Отсюда уже и из короткой точной последовательности выше мы получаем, что $H_*(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2[b_1,h_{4i},\,i\geqslant 2]$.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$0\to\mathcal{W}\xrightarrow{\cdot 2}\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2\to 0$$

Она даёт длинную точную последовательность в гомологиях

$$\ldots\longrightarrow H_{2i}(\mathcal{W})\xrightarrow{\cdot 2}H_{2i}(\mathcal{W})\longrightarrow H_{2i}(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H_{2i-2}(\mathcal{W})\longrightarrow\ldots$$

Так как $H_*(\mathcal{W})$ состоит из 2-кручения, то умножение на 2 в длинной точной последовательности есть нулевое отображение, и мы получаем короткие точные последовательности:

$$0\to H_{2i}(\mathcal{W})\longrightarrow H_{2i}(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)\longrightarrow H_{2i-2}(\mathcal{W})\to 0$$

Вспомним теперь, что b_i на самом деле представляются элементами $\mathcal{W}$. Более того, мы имеем циклы b_1^2 и $b_{2i}^2-b_1b_{2i-1}b_{2i}$ в $\mathcal{W}$. Обозначим их классы гомологий через ω_2, ω_{4i}. Тогда они переходят в алгебраически независимые элементы b_1^2 и h_{4i} в $H_*(\mathcal{W}\otimes\mathbb{Z}_2)$. Значит, $H(\mathcal{W})$ содержит полиномиальное подкольцо $\mathbb{Z}_2[\omega_2,\omega_{4i},\,i\geqslant 2]$.

Наконец из сравнения размерностей в короткой точной последовательности выше мы получаем, что $H(\mathcal{W})$ на самом деле совпадает с $\mathbb{Z}_2[\omega_2,\omega_{4i},\,i\geqslant 2]$.

□

7. Кольцевая структура Ω^{SU}

Забывающий гомоморфизм $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ является гомоморфизмом колец; это следует из предложения 6.8, так как $\partial\alpha(x) = 0$ для всех $x \in \Omega^{SU}$. Следовательно, кольцо $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$ отождествляется с некоторым подкольцом в $\mathcal{W}$ (описанным как подгруппа в теореме 5.11).

Заметим, что из теоремы 6.13 следует, что

$$\mathcal{W} \otimes \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_1, x_{2k-1}, 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}\colon k \geqslant 2], \tag{7.1}$$

где $x_1^2 = x_1 * x_1$, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$ для $k \geqslant 2$ являются ∂-циклами.

Для каждого целого числа $n \geqslant 3$ обозначим

$$g(n) = \begin{cases} 2m_nm_{n-1}, & \text{если } n > 2 \text{ чётно;} \\ m_nm_{n-1}, & \text{если } n > 2 \text{ нечётно;} \\ -48, & \text{если } n = 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Эти числа присутствуют в формулах (6.6). Например, $g(3) = 6$, $g(4) = 20$. Для $n > 2$ число $g(n)$ может принимать следующие значения: 1, 2, 4, p, $2p$, $4p$, где p — нечётное простое число.

Теорема 7.1. *Существуют неразложимые элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$, $i \geqslant 2$, с минимальными s-числами $s_i(y_i) = g(i)$. Гомоморфизм забывания $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ отображает эти элементы следующим образом:*

$$y_2 \mapsto 2x_1^2, \quad y_{2k-1} \mapsto x_{2k-1}, \quad y_{2k} \mapsto 2x_{2k} - x_1x_{2k-1}, \quad k \geqslant 2,$$

где x_i — полиномиальные образующие кольца $\mathcal{W}$. В частности, кольцо $\Omega^{SU} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][y_i\colon i \geqslant 2]$ вкладывается в (7.1) в качестве полиномиального подкольца, порождённого элементами x_1^2, x_{2k-1} и $2x_{2k} - x_1x_{2k-1}$.

Доказательство. Элементы $y_i \in \Omega^{SU}_{2i}$ уже были определены в (6.5), и их s-числа даются формулами (6.6). Мы должны только проверить, что s-число элемента y_i является минимально возможным среди всех элементов из Ω^{SU}_{2i}.

Для y_{2k-1} число $m_{2k-1}m_{2k-2}$ является минимальным возможным среди всех элементов из $\mathcal{W}_{4k-2}$ по теореме 6.13, и следовательно, оно также минимально и для элементов из $\Omega^{SU}_{4k-2} \subset \mathcal{W}_{4k-2}$. (Как мы уже замечали, разложимость в $\mathcal{W}$ относительно умножения $*$ равносильна разложимости в Ω^U в размерностях > 4; это следует из предложения 6.8.)

Для $y_2 = 2x_1^2$ мы имеем $\Omega^{SU}_4 = \mathrm{Im}\,\partial = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle$, где $y_2 = 2K$ в обозначениях примера 5.7.

Рассмотрим теперь y_{2k} для $k \geqslant 2$. Мы имеем $s_{2k}(y_{2k}) = 2m_{2k}m_{2k-1}$. Возьмём любой элемент $a \in \Omega^{SU}_{4k} \subset (\mathrm{Ker}\,\partial)_{4k}$. Из (7.1) следует, что $\mathrm{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ состоит из таких $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$-многочленов от x_1^2, x_{2i-1}, $2x_{2i} - x_1x_{2i-1}$, которые имеют целые коэффициенты как многочлены от переменных x_i. Запишем

$$a = \lambda(2x_{2k} - x_1x_{2k-1}) + b,$$

где $\lambda \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ и b — разложимый элемент из $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][x_1^2, x_{2i-1}, 2x_{2i} - x_1x_{2i-1}]$. Тогда b не содержит слагаемого x_1x_{2k-1}, и следовательно, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Значит, $s_{2k}(a) = 2\lambda s_{2k}(x_{2k}) = \lambda \cdot 2m_{2k}m_{2k-1}$, и $2m_{2k}m_{2k-1}$ является минимальным возможным s-числом в Ω^{SU}_{4k}. □

Напомним, что согласно теореме 5.8 а) образ забывающего гомоморфизма $\alpha\colon \Omega^{SU} \to \mathcal{W}$ изоморфен $\Omega^{SU}/\,\mathrm{Tors}$. По теореме 5.11 б), $\Omega^{SU}_{2i}/\,\mathrm{Tors}$ изоморфно $\mathrm{Ker}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ для $2i \not\equiv 4 \mod 8$ и изоморфно $\mathrm{Im}(\partial\colon \mathcal{W} \to \mathcal{W})$ для $2i \equiv 4 \mod 8$. Комбинируя это с теоремой 7.1, мы получаем описание $\Omega^{SU}/\,\mathrm{Tors}$ как подкольца в $\mathcal{W}$. Наконец, мультипликативная структура в кручении описывается теоремой 5.11 в).

Собирая всю эту информацию вместе, мы, в принципе, получаем полное описание кольца Ω^{SU}. Однако, как замечено у Стонга в конце главы X в [**17**], внутреннее строение этого кольца чрезвычайно сложно. Например, в размерностях $\leqslant 10$ мы имеем следующие нетривиальные градуированные компоненты кольца Ω^{SU}, описанные в терминах элементов x_i и y_i из теоремы 7.1:

$$\Omega_0^{SU} = \mathbb{Z}, \quad \Omega_1^{SU} = \mathbb{Z}_2\langle\theta\rangle, \quad \Omega_2^{SU} = \mathbb{Z}_2\langle\theta^2\rangle,$$

$$\Omega_4^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle,\ y_2 = 2x_1^2, \quad \Omega_6^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle,\ y_3 = x_3, \quad \Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{4}y_2^2, y_4\rangle,\ y_4 = 2x_4 - x_1x_3,$$

$$\Omega_9^{SU} = \mathbb{Z}_2\langle\theta x_1^4\rangle, \quad \Omega_{10}^{SU} = \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{2}y_2y_3, y_5\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle\theta^2 x_1^4\rangle,\ y_5 = x_5.$$

Мы имеем

$$y_2 = 2x_1^2 = 2\bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)$$

как классы U-бордизмов. В размерности 8 мы имеем

$$\tfrac{1}{4}y_2^2 = x_1^4 = \bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)\times\bigl(9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]\bigr)$$

как классы U-бордизмов, так как $x_1^2 = 9[\mathbb{C}P^1]\times[\mathbb{C}P^1] - 8[\mathbb{C}P^2]$ является ∂-циклом. Кроме того, элемент $\frac{1}{4}y_2^2 = x_1^4$ может быть также выбран в качестве w_4 в теореме 5.11 в). Мы видим, что 8 является первой размерностью, в которой $\Omega^{SU}/\mathrm{Tors}$ отличается от кольца полиномов, так как квадрат 4-мерной образующей y_2 делится на 4. Кроме того, произведение 4- и 6- мерных образующих делится на 2.

8. Геометрические представители

Возникает вопрос о нахождении у классов бордизмов в Ω_{2i}^{SU} с минимальными s-числами $g(i)$ (которые можно взять в качестве y_i) хороших геометрических представителей.

В данном направлении получены следующие результаты.

8.1. Общие результаты.

Теорема 8.1 (Лю, Панов [**10**]). *Существуют квазиторические SU-многообразия M^{2i}, $i \geqslant 5$, с $s_i(M^{2i}) = g(i)$. Эти квазиторические SU-многообразия имеют минимально возможные характеристические числа s_i и представляют полиномиальные образующие в кольце $\Omega^{SU}\otimes\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.*

Замечание. Заметим, что в размерностях меньше $i < 5$ любое квазиторическое SU-многообразие представляет ноль в Ω^U.

Теорема 8.2 (Лимонченко, Лю, Панов [**8**]). *Классы SU-бордизмов с минимальными s-числами могут быть получены как линейные (целочисленные комбинации) гиперповерхностей Калаби–Яу в торических многообразиях $\mathbb{C}P^{i_1}\times\ldots\times\mathbb{C}P^{i_k}$ (гиперповерхности двойственны к первому классу Чженя).*

Эти результаты порождают в свою очередь вопросы:

Вопрос 8.3. *Какие классы бордизмов из Ω^{SU} в размерностях $i \geqslant 5$ могут быть представлены квазиторическими многообразиями?*

Вопрос 8.4. *Какие классы бордизмов из Ω^{SU} могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу?*

8.2. Маломерные представители. Здесь мы опишем геометрические представители Калаби–Яу для образующих y_i кольца SU-бордизмов в комплексной размерности $i \leqslant 4$.

Напомним из раздела 7, что имеют место соотношения

$$\Omega_4^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_2\rangle, \quad \Omega_6^{SU} = \mathbb{Z}\langle y_3\rangle, \quad \Omega_8^{SU} = \mathbb{Z}\langle \tfrac{1}{4}y_2^2, y_4\rangle,$$

где значения s-чисел образующих задаются формулами

$$s_2(y_2) = -48, \quad s_3(y_3) = m_3m_2 = 6, \quad s_4(y_4) = 2m_4m_3 = 20.$$

Пример 8.5. Образующая y_2 s-числом -48 даётся (как легко проверить) гиперповерхностью, двойственной к c_1, в $\mathbb{C}P^3$ или $(\mathbb{C}P^1)^3$. Это многообразия Калаби–Яу. В первом случае это стандартная $K3$-поверхность, заданная уравнением $z_0^4+z_1^4+z_2^4+z_3^4 = 0$.

С другой стороны, аддитивная образующая $-y_2 \in \Omega_4^{SU}$ с s-числом 48 не может быть представлена компактной комплексной поверхностью. Этот результат был получен в [**12**, Теорема 3.2.5], используя классификацию комплексных поверхностей.

Пример 8.6. Элемент y_3 с s-числом 6 представляется сферой S^6 с (любой) почти комплексной структурой, так как в этом случае $s_3[S^6] = 3c_3[S^6] = 6$. (Заметим, что это автоматически SU-многообразие, так как $H^2(S^6, \mathbb{Z}) = 0$).

Пример 8.7. Здесь мы покажем, что образующая $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$ с s-числом -20 представляется грассманианом $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ двумерных плоскостей $\mathbb{C}^4$ с подправленной стабильно комплексной структурой.

Пусть γ — тавтологическое двумерное расслоение над $Gr_2(\mathbb{C}^4)$, и пусть $\gamma^\perp$ — расслоение ортогональных двумерных плоскостей. Тогда мы имеем $\mathcal{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$ и

$$\mathcal{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \oplus \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp \oplus \gamma) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \underline{\mathbb{C}}^4) \cong \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma} \oplus \overline{\gamma}.$$

Таким образом, стандартная комплексная структура на $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ задаётся изоморфизмом стабильных расслоений

$$\mathcal{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 4\overline{\gamma} - \overline{\gamma}\gamma,$$

где мы обозначили $4\overline{\gamma} = \overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}\oplus\overline{\gamma}$ и $\overline{\gamma}\gamma = \overline{\gamma}\otimes\gamma = \mathrm{Hom}(\gamma,\gamma)$. Мы изменим стабильно комплексную структуру на следующую:

$$\mathcal{T} Gr_2(\mathbb{C}^4) \cong 2\overline{\gamma} + 2\gamma - \overline{\gamma}\gamma$$

и обозначим полученное стабильно комплексное многообразие через $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$. Заметим, что $c_1(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) = 0$, так что $\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)$ является SU-многообразием. Оно имеет то же кольцо когомологий, что и грассманиан,

$$H^*(Gr_2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2]/(c_1^3 = 2c_1c_2,\ c_2^2 = c_1^2c_2),$$

где $c_i = c_i(\gamma)$. Старшая группа когомологий $H^8(Gr_2(\mathbb{C}^4)) \cong \mathbb{Z}$ порождена классом $c_1^2c_2$.

Теперь вычислим класс $s_4(\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)) = 2s_4(\overline{\gamma}) + 2s_4(\gamma) - s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Мы имеем

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4,$$

откуда

$$s_4(\overline{\gamma}) = s_4(\gamma) = c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 2c_2^2 = 2c_1^2c_2 - 4c_1^2c_2 + 2c_1^2c_2 = 0.$$

Остаётся вычислить $s_4(\overline{\gamma}\gamma)$. Используя принцип расщепления, запишем $\gamma = \eta_1 + \eta_2$ для некоторых линейных расслоений η_1, η_2 и вычислим

$$\begin{aligned} c(\overline{\gamma}\gamma) &= c((\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_2)(\eta_1 + \eta_2)) = c(\overline{\eta}_1\eta_2 + \overline{\eta}_2\eta_1) = c(\overline{\eta}_1\eta_2)c(\overline{\eta_2}\eta_1) \\ &= (1 - c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2))(1 - c_1(\eta_2) + c_1(\eta_1)) = 1 - c_1(\eta_1)^2 - c_1(\eta_2)^2 + 2c_1(\eta_1)c_1(\eta_2) \\ &= 1 - (c_1(\eta_1) + c_1(\eta_2))^2 + 4c_1(\eta_1)c_1(\eta_2) = 1 - c_1(\gamma)^2 + 4c_2(\gamma). \end{aligned}$$

Следовательно, $c_1(\overline{\gamma}\gamma) = c_3(\overline{\gamma}\gamma) = c_4(\overline{\gamma}\gamma) = 0$ и

$$s_4(\overline{\gamma}\gamma) = 2c_2(\overline{\gamma}\gamma)^2 = 2(4c_2 - c_1^2)^2 = 2(16c_2^2 - 8c_1^2c_2 + c_1^4) = 20c_1^2c_2.$$

Отсюда получаем $s_4[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = -20$ и $[\widetilde{Gr}_2(\mathbb{C}^4)] = -y_4 \in \Omega_8^{SU}$.

Наконец, в заключение, сформулируем теорему, показывающую, что в размерностях $i = 3$ и 4, в отличие от размерности 2, оба элемента $\pm y_i$ могут быть представлены многообразиями Калаби–Яу.

Теорема 8.8 ([**9**, теорема 13.5]).

а) *В комплексной размерности 3, оба класса SU-бордизмов y_3 и $-y_3$ могут быть представлены трёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева (см. [**3**]), из торических многообразий Фано над 4-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = 2$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = 1.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_3 \in \Omega_6^{SU}$, если $\chi(M) = -2$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) = -1.$$

б) *В комплексной размерности 4, оба класса SU-бордизмов y_4 и $-y_4$ могут быть представлены четырёхмерными многообразиями Калаби–Яу. Эти многообразия M можно получить, используя конструкцию Батырева, из торических многообразий Фано над 5-мерными рефлексивными многогранниками. Такое M представляет класс $y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 282$ или, эквивалентно,*

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 39.$$

Аналогично, M представляет класс $-y_4 \in \Omega_8^{SU}$, если $\chi(M) = 294$ или, эквивалентно,

$$h^{1,1}(M) - h^{2,1}(M) + h^{3,1}(M) = 41.$$

Список литературы

[1] Anderson, D. W.; Brown, E. H., Jr.; Peterson, F. P. *SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant.* Ann. of Math. (2) 83 (1966), 54–67.

[2] Baas, Nils A. *On the convergence of the Adams spectral sequences.* Math. Scand. 27 (1970), 145–150.

[3] Batyrev, Victor V. *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties.* J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 3, 493–535.

[4] Botvinnik, Boris I. *Manifolds with singularities and the Adams–Novikov spectral sequence.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 170. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[5] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric topology.* Math. Surv. and Monogr., 204. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[6] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Torsion in SU-bordism.* Mem. Amer. Math. Soc. 60, 1966.

[7] Landweber, Peter S. *Cobordism operations and Hopf algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967), 94–110.

[8] Лимонченко И. Ю., Лю Ж., Панов Т. Е. *Гиперповерхности Калаби–Яу и SU-бордизмы.* Тр. МИАН, 302 (2018), 287–295.

[9] Лимонченко И. Ю., Панов Т. Е., Черных Г. С. *SU-бордизмы: структурные результаты и геометрические представители.* Успехи Мат. Наук, 74 (2019), вып. 3, принято к печати; arXiv:1903.07178.

[10] Lü, Zhi; Panov, Taras. *On toric generators in the unitary and special unitary bordism rings.* Algebr. Geom. Topol 16 (2016), no. 5, 2865–2893.

[11] Мищенко А. С. *Спектральные последовательности типа Адамса.* Матем. заметки, 1:3 (1967), 339–346.

[12] Mosley, John. E. *In search of a class of representatives for SU-bordism using the Witten genus.* Thesis (Ph.D.)–University of Kentucky, 2016.

[13] Новиков С. П. *Гомотопические свойства комплексов Тома.* Матем. сб., 57(99):4 (1962), 407–442.

[14] Новиков С. П. *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 31:4 (1967), 855–951.

[15] Рохлин В. А. *Новые результаты теории четырехмерных многообразий.* ДАН СССР, 84 (1952), 221–224.

[16] Rudyak, Yuli B. *On Thom spectra, orientability, and cobordism.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[17] Stong, Robert. *Notes on Cobordism Theory.* Math. Notes, 7. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1968. [Русский перевод: Стонг Р., *Заметки по теории кобордизмов,* «Мир», Москва, 1973.]

[18] Wall, C. T. C. *Addendum to a paper of Conner and Floyd.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), 171–175.