Свойства неарифметических групп отражений и гиперболических многообразий.

Александр Думаревский.

Пусть P — прямоугольный трехмерный многогранник в $\mathbb{H}^3$ с фиксированным порядком граней $F_1, \dots, F_m$. Пусть G — группа, порожденная отражениями в его гранях g_i, где g_i — отражение в грани F_i. Тогда G — прямоугольная группа Коксетера, задаваемая отношениями:

$$g_i^2 = e; g_i g_j = g_j g_i, \text{если } F_i, \cap, F_j \neq \varnothing.$$

Группа G действует на $\mathbb{H}^3$ дискретно с конечными стабилизаторами и фундаментальной областью P. Тогда верна следующая лемма:

Лемма 1 ([1, Лемма 3.1]). *Рассмотрим эпиморфизм $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2^3$.* Ker φ *не содержит элементов конечного порядка тогда и только тогда, когда образы отражений любых трех граней, имеющих общую вершину, линейно независимы. В этом случае группа* Ker φ *действует на* $\mathbb{H}^3$ *свободно.*

Получаем, что если φ — гомоморфизм, удовлетворяющий условиям леммы выше, $\mathbb{H}^3/\mathrm{Ker}\ \varphi$ есть трехмерное гладкое гиперболическое многообразие.

Замечание. Поскольку мы имеем дело с трехмерными многогранниками, для них существуют правильные раскраски в четыре цвета $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Поставим цвета в соответствие с элементами группы, так что α, β, γ — базис в $\mathbb{Z}_2^3$, а $\delta = \alpha + \beta + \gamma$. Тогда каждая раскраска задает отображение $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2^3$, удовлетворяющая условиям леммы.

Эпиморфизм φ раскладывается в композицию

$$G(P) \xrightarrow{ab} \mathbb{Z}_2^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{Z}_2^3,$$

где ab — гомоморфизм абелинизации. Таким образом, всякое отображение φ однозначно задает отображение Λ, где Λ можно рассматривать как линейное отображение.

Обратно, линейное отображние $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^3$ соответствует некоторому отображению φ тогда и только тогда, когда матрица отображения удовлетворяет следующему условию: для любых трех граней $F_{i_1}, F_{i_2}, F_{i_3}$, имеющих общую вершину, подматрица Λ_{i_1,i_2,i_3}, образванная столбцами $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$, имеет определитель $\det \Lambda_{i_1,i_2,i_3} = \pm 1$.

Тогда многогранник P вместе с отображением Λ однозначно задают многообразие $N(P,\Lambda) = \mathbb{H}^3/\mathrm{Ker}\ \varphi$, где φ соответствующее Λ отображение. Будем называть $N(P,\Lambda)$ гиперболическим многообразием типа Лёбеля. А пару (P,Λ) будем называть характеристической парой.

Определение 0.1. *Характерестические пары (P_1,Λ_1), (P_2,Λ_2) назовем эквивалентными, если выполняются следующие условия:*

1) P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны.

2) $\Lambda_1 = A\Lambda_2$, где $A \in GL(3, Z_2)$.

В обзоре Веснина [1] описываются условия, когда два отображения φ задают гомеоморфные многообразия.

Теорема 1 ([1, Лемма 3.11])**.** *Пусть G - неарифметическая естественно максимальная группа, порожденная отражениями в гранях прямоугольного многогранника P в $\mathbb{H}^3$, а S - группа его симметрий. Предположим, что Γ_1 и Γ_2 являются ядрами эпиморфизмов φ_1 и φ_2, удовлетворяющих условиям леммы 1. Группы Γ_1 и Γ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда существует $s \in S$ такое, что $\Gamma_1 = s^{-1}\Gamma_2 s$.*

Но следующая теорема (приведенная здесь в более слабой формулировке) позволяет ослабить условия на группу G:

Теорема 2 ([2, Теорема 5.2])**.** *Многообразия $N(P_1,\Lambda_1)$ и $N(P_2,\Lambda_2)$ изометричны тогда и только тогда, когда характеристические пары (P_1,Λ_1) и (P_2,Λ_2) эквивалентны.*

Домножение характеристической матрицы Λ на матрицу A не меняет ядра, а комбинаторная эквивалентность граней соответсвует некоторой симметрии многогранника s. Отсюда получаем результат, эквивалентный теореме Веснина, без дополнительных условий на группу G.

Теорема 3. *Гиперболические многообразия типа Лёбеля над одним фундаментальным многогранником изометричны тогда и только тогда, когда они соответсвуют одному и тому же отображению φ с точностью до замены базиса $\mathbb{Z}_2^3$ (или в случае правильной раскраски в 4 цвета переупорядочивания цветов) и сопряжением отображения некоторой симметрией многогранника.*

Список используемой литературы

[1] А. Ю. Веснин, «Прямоугольные многогранники и трёхмерные гиперболические многообразия», УМН Том 72-2 (2017), 147-190.

[2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, «Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками», УМН Том 72-2 (2017), 3-66.