ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ МАЛЫХ НАКРЫТИЙ НАД ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ.

Выполнил студент
603 группы
Думаревский А.Д.

____
подпись студента

Научный руководитель:
профессор Панов Т.Е.

____
подпись научного руководителя

Москва
2018

Аннотация

Целью данной работы является доказательство когомологической жесткости малых накрытий над некоторым классом 4-мерных многогранников. Уже было доказано в работе [1], что семейство малых накрытий над 3-мерными многообразиями жестко. В этой работе мы обобщим технику для работы с некоторыми 4-мерными многообразиями.

Содержание

1 Введение.

1.1 Прямоугольные многогранники и группа Коксетера.

Обозначим через $\mathbb{H}^n$ n-мерное пространство Лобачевского, $n > 2$. Выпуклым многогранником называется непустое пересечением конечного числа полупространств в $\mathbb{H}^n$. Такие многогранники можно задать системой неравенств:

$$\{x \in \mathbb{H}^n : \langle a_i, x\rangle + b_i \geqslant 0, i = 1, \dots, m\}$$

Если среди системы неравенств нет лишних, то каждое неравенство соответсвует грани $F_i = \{x \in P : \langle a_i, x\rangle + b_i = 0\}$. Будем так же считать, что многогранник имеет размерность n, то есть размерность минимального подпространства, содержащего многогранник равна n; так же будем его называть n-многогранник. Множество всех граней обозначим за $\mathcal{F}$.

Многогранник P размерности n называется простым, если в каждой вершине сходится n ребер. В простом многограннике *k-поясом* называется циклическая последовательность $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\}(k \geqslant 3)$, если две грани пересекаются, если и только если они являются соседними в этой последовательности и никакие три грани не имеют общую вершину.

Если все углы между соседними гипергранями являются прямыми, такой многогранник называется прямоугольным. В дальнейшем будем рассматривать только прямоугольные многогранники.

Для каждой грани $F_i \in \mathcal{F}$, обозначим отражение в этой грани за g_i. Пусть G_P – группа, порожденная всеми отражениями g_i. G_P называется прямоугольной группой Коксетера, и определяется следующими соотношениями:

$$\{g_1, \dots, g_m : g_i^2 = 1, g_i g_j = g_j g_i, \text{если } F_i \cup F_j \neq \varnothing\}$$

1.2 Квазиторические многообразия.

Определение 1.1. Квазиторическое многообразие над простым n-многогранником P называется топологическое многообразие M размерности $2n$ с локально стандартным действием тора T_n и проекцией $\pi : M \to P$, слоями которой являются орбиты T_n-действия. (Действие тора T_n на M называется локально стандартным, если каждая точка $x \in M$ содержится в T_n-инвариантной окрестности, эквивариантно гомеоморфной открытому подмножеству в C_n с линейным эффективным действием тора T_n. Пространство орбит локально стандартного действия тора имеет структуру многообразия с углами. Для квазиторического многообразия M пространство орбит M/T_n гомеоморфно многограннику P.)

Каждое подмногообразие $M_i = \pi^{-1}(F_i)$ является квазиторическим подмногообразием коразмерности 2 и называется *характеристическим подмногообразием.* Оно неподвижно под действием одномерной группы $T_i \subset T$и таким образом соответсвует примитивному вектору $\lambda_i \in \mathbb{Z}^n$ (с точностью до знака, выбор которого соотвествует выбору ориентации M_i).

Имеется следующая теорема, описывающая когомологии квазиторических многообразий:

Теорема 1.2. *Пусть M – полиориентированное квазиторическое многообразие размерности $2n$ над простым n-многогранником P. Кольцо когомологий $H_*(M;\mathbb{Z})$ порождено двумерными классами $[v_i]$, двойственными к ориентированным подмногообразиям M_i, и задаётся следующим образом:*

$$H_*(V;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}[v_1, ..., v_m]/I, \deg v_i = 2,$$

где I – идеал, порожденный элементами следующих двух видов:

1. *$v_{i_1} \dots v_{i_k}$, где $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing$ в P;*

2. *$\sum\limits_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle v_i$, для любого вектора $x \in \mathbb{Z}^n$.*

Зафиксировав базис в $\mathbb{Z}^n$, можем записать вектора λ_i в матрицу:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix},$$

столбцы которой соответсвуют векторам λ_i, записанные в стандартном базисе решётки $\mathbb{Z}^n$. Матрица Λ обладает следующим свойством:

$$det(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) = \pm 1, \text{если } F_{i_1} \cup \dots \cup F_{i_n} \neq \varnothing.$$

Матрица Λ называется *характеристической матрицей.* Пара (P, Λ)называется *характеристической парой* и полностью определяет квазиторическое многообразие следующим образом:

Пусть (P, Λ) – характеристическая пара. Для каждой гиперграни $F_i \in \mathcal{F}$ обозначим через T_i одномерную подгруппу в T^n, соответсвующую i-му столбцу $\lambda_i \in \mathbb{Z}^n$ в характеристической матрице Λ. Для каждой точки $x \in P$ определим тор

$$T(x) = \prod_{i: x \in F_i} T_i,$$

где предполагается, что $T(x) = 1$, если x не содержится ни в одной гиперграни.

Теперь положим

$$M(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ задается следующим образом:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2), \text{если } x_1 = x_2, t_1 - t_2 \in T(x).$$

Замена базиса в $\mathbb{Z}^n$ соответсвует умножению характеристической матрицы Λ слева на матрицу $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. При изменении ориентации подмногообразия M_i столбец матрицы Λ умножается на -1. Таким образом приходим к следующему определению:

Определение 1.3. Две характеристические пары (P_1, Λ_1) и (P_2, Λ_2) называются *эквивалентными,* если

1. многогранники P_1 и P_2 комбинаторно эквивалентны.

2. $\Lambda_2 = A\Lambda_1 B$, где $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, а B – диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

Отсюда следует следующее утверждение:

Теорема 1.4. *Если характеристические пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны, то для квазиторических многообразий $M(P, \Lambda)$ и $M(P', \Lambda')$ существует диффеоморфизм $f : M \to M'$ и автоморфизм торов $\theta : T^n \to T^n$,такой что*

$$f(t \cdot x) = \theta(t) \cdot f(x).$$

1.3 Малые накрытия.

Назовем эпиморфизм $\lambda : G_P \to \mathbb{Z}_2^n$ характеристической функцией, если для любых граней $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, пересекающихся в одной вершине, образы $\lambda(g_{i_1}), \dots, \lambda(g_{i_n})$ образуют базис пространства $\mathbb{Z}_2^n$.

Зафиксировав порядок граней в P и базис в $\mathbb{Z}_2^n$, можем поставить в сответствие характеристическому отображению матрицу Λ. Пару (P, Λ) назовем характеристической парой.

Пусть (P, Λ) – характеристическая пара. Для каждой гиперграни $F_i \in \mathcal{F}$ обозначим через T_i подгруппу в $\mathbb{Z}_2^n$, порожденную $\lambda(g_i)$. Для каждой точки $x \in P$ определим подгруппу

$$T(x) = \prod_{i: x \in F_i} T_i,$$

где предполагается, что $T(x) = 1$, если x не содержится ни в одной гиперграни.

Теперь положим

$$N(P, \Lambda) = P \times \mathbb{Z}_2^n / \sim,$$

где отношение эквивалентности $\sim$ задается следующим образом:

$$(x_1, t_1) \sim (x_2, t_2), \text{если } x_1 = x_2, t_1 - t_2 \in T(x).$$

Следующая теорема показывает, что всякое малое накрытие $N(P, \Lambda)$ иммет вид $\mathbb{H}^n/\mathrm{Ker}(\lambda)$

Теорема 1.5 ([2, Proposition 2.1]). *Если H – подгруппа G_P без кручения, тогда её индекс $G_P : H \geqslant 2^n$. Если индекс равен 2^n, то H – нормальная подгруппа и является ядром характеристической функции $\lambda : G_P \to \mathbb{Z}_2^n$.*

Таким образом, малое накрытие это n-мерное многообразие N над многогранником P с локально стандартным действием группы $\mathbb{Z}_2^n$ и проекцией $\pi : N \to P$, слоями которого являются орбиты $\mathbb{Z}_2^n$-действия. Аналогом характеристического подмногообразия M_i в теории квазиторических многообразий, характеристическое подмногообразие малого накрытия это: $N_i = \pi^{-1}(F_i)$.

Аналогично определению эквивалентных характеристических пар для квазиторических многообразий определяется эквивалентность характеристических пар малых накрытий, с заменой группы $GL_n(\mathbb{Z})$ на $GL_n(\mathbb{Z}_2)$.

Определение 1.6. Будем говорить, что характеристическое отображение $\Lambda : \mathbb{Z}_2^m \to \mathbb{Z}_2^n$ удовлетворяет условию поднятия, если оно получается приведением по модулю 2 из $\mathbb{Z}$-характеристической матрицы.

1.4 Когомологии малых накрытий.

По аналогии с когомологиями квазиторических многообразий определяются когомологии малых накрытий:

Теорема 1.7 ([5]). *Пусть N – малое накрытие над простым многогранником P. Кольцо когомологий $H_*(V; \mathbb{Z})$ порождено двумерными классами $[v_i]$, двойственными к характеристическим подмногообразиям V_i, и задаётся следующим образом:*

$$H_*(V; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[v_1, ..., v_m]/I, \mathrm{deg} v_i = 2,$$

где I – идеал, порожденный элементами следующих двух видов:

1. $v_{i_1} \dots v_{i_k}$, *где* $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing$ *в* P;
2. $\sum_{i=1}^{m} \langle \lambda_i, x \rangle v_i$, *для любого вектора* $x \in \mathbb{Z}_2^n$.

1.5 Симплициальные комплексы и момент-угол-комплекс.

Определение 1.8. Абстрактный симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ – это множество подмножеств $[m]$, таких, что если $X \in \mathcal{K}$ и $Y \subset X$, то $Y \in \mathcal{K}$. Мы предполагаем, что пустое множество и все одноэлементные множества тоже принадлежат $\mathcal{K}$.

Подмножества $I \in \mathcal{K}$ будем называть симплексами комплекса $\mathcal{K}$.

Определение 1.9. Звезда и линк вершины v есть подкомплексы соответсвенно:

$$\mathrm{star}_{\mathcal{K}}\{v\} = \{I \in \mathcal{K} : I \cup v \in \mathcal{K}\}, \qquad \mathrm{link}_{\mathcal{K}}\{v\} = \{I \in \mathcal{K} : I \cup v \in \mathcal{K}, i \notin I\}.$$

Конструкция 1.1. Каждому простому n-многограннику P с m гипергранями $F_1, \dots, F_m$ можно поставить в соответсвие симплициальный комплекс:

$$\mathcal{K}_P = \{I = \{i_1, \dots, i_k \in [m] : F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \varnothing\}.$$

$\mathcal{K}_P$ называется *двойственным комплексом* многогранника P. Вершины комплекса соответсвуют гиперграням многогранника, а пустой комплекс соответсвует самому многограннику P.

Конструкция 1.2. Пусть P и Q – 2 n-многогранника с выделенными гранями F и G соответсвенно, при этом грани F и G проективно эквивалентны. Тогда связной суммой $P\#_{F,G}Q$ назовем выпуклый многогранник, полученных (после подходящего проективного преобразования) склеиванием по этим граням.

Двойственный комплекс получается выкидыванием из $\mathcal{K}_P$, $\mathcal{K}_Q$ вершин, соответствующим этим граням и отождествлению линков этих вершин.

Связная сумма двух простых многогранников даст снова простой многогранник.

Замечание 1.10. Если многогранник – симплициальный (то есть все грани которого – симплексы), то он отождествляется с комплексом, построенном на его вершинах и содержащим все подмножества вершин, образующих грань.

Определение 1.11. Кольцом граней (кольцом Стенли-Райснера) симлициального комплекса $\mathcal{K}$ на множестве $[m]$ называется следующее факторкольцо кольца многочленов $k[v_1, \dots, v_m]$:

$$k[\mathcal{K}] = k[v_1, \dots, v_m]/(v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K})$$

Определение 1.12. Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс. Для каждого симплекса $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ положим

$$(D^2, S^1)^I = \{(x_1, \dots, x_m) \in (D^2 m) : x_i \in S^1 \text{ при } i \notin I\}$$

Момент-угол-комплекс определяется следующим образом:

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I$$

Для описания когомологий момент-угол-комплекса нам потребуется следующая алгебра:

Определение 1.13. Алгебра Кошуля (или комплекс Кошуля) – это $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^m$-градуированная алгебра $k[\mathcal{K}] \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m]$, где $k[\mathcal{K}]$ – кольцо Стенли-Райснера, а $\Lambda[u_1, \dots, u_m]$ – внешняя алгебра с соотношениями на образующих $u_i^2 = 0, u_i u_j = -u_j u_i$. А градуировка задана следующим образом:

$$\mathrm{mdeg} u_i = (-1, 2e_i), \mathrm{mdeg} v_i = (0, 2e_i).$$

На этой алгебре задан оператор дифференцирования d:

$$du_i = v_i, dv_i = 0.$$

Теорема 1.14 ([3, теорема 4.5.5])**.** $H^*(\mathcal{Z}_{\mathcal{K}}) \cong H(k[\mathcal{K}] \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m], d)$

1.6 Когомологическая жесткость.

Определение 1.15. Многогранник P называется *C-жестким*, если выполнено одно из следующих условий:

1. Не существует ни одного квазиторического многообразия M над P

2. Если дано квазиторическое многообразие M над P, квазиторическое многообразие M' над другим многогранником P' и изоморфизм колец когомологий $H_*(M) \cong H_*(M')$, то имеем комбинаторную эквивалентность $P \cong P'$.

Определение 1.16. Многогранник P называется *B-жестким*, если любой изоморфизм колец когомологий $H_*(\mathcal{Z}_P) \cong H_*(\mathcal{Z}_{P'})$ момент-угол-многообразий влечёт комбинаторную эквивалентность $P \cong P'$.

Теорема 1.17 ([1, Предложение 3.7])**.** *Если простой многогранник P является B-жёстким, то он также является C-жёстким.*

2 120-ячейник.

Возьмем 120-ячейник и все многогранники, получающиеся приклеиванием к нему и последующим многогранникам 120-ячейников по грани, изометричной додекаэдру. Обозначим этот класс многогранников как $\mathcal{D}$. Цель данной работы – доказать когомолгическую жесткость малых накрытий над каждым многогранником $P \in (D)$, характеристическая матрица которых удовлетворяет условию поднятия из определения 1.6.

Так же, в отличие от работы [1] мы будем сравнивать малые накрытия над заранее выбранным многогранником и не будем доказывать, что данный класс когомологически жесткий.

Далее мы рассмотрим комбинаторные свойства многогранников из класса $\mathcal{D}$.

Замечание 2.1. Каждому многограннику D из класса $\mathcal{D}$ можно поставить в соответсвие граф с подписанными ребрами без циклов. Вершинам графа соответсвуют склеиваемые 120-ячейники, а ребра соединяют вершины, соответсвующие склеенным многогранникам. Каждое ребро подпишем гранью, по которой происходит склейка. Будем называть такой граф *графом многогранника D*.

2.1 Комбинаторные свойства 120-ячейника.

Мы будем работать с двойственным симплициальном комплексом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$, который соответсвует 600-ячейнику C_{600}. Необходимо найти такое подмножество $I \subset [m]$ $\{k\}$, что $\{i, j\} \in I$, $\mathcal{K}_I$ есть бесхордовый цикл и хотя бы одна компонента $\mathcal{K}_{I \setminus \{i,j\}}$ не пересекается со звездой вершины k.

Сперва отметим некоторые свойства 600-ячейника, которые понадобятся нам в дальнейшем:

1. Линк каждой вершины – икосаэдр.

2. Соответсвенно, линк ребра – пятиугольник.

3. В нем отсутствуют пустые 3- и 4-циклы.

4. Пересечение линков двух различных вершин, не соединенных ребром, может быть пустым, состоять из одной вершины или из треугольника.

Назовем точки диаметрально противоположными в икосаэдре, если они максимально удалены друг от друга. Очевидно, что все вершины имеют только одну максимально удаленную вершину.

Если k лежит в $\mathrm{star}(i)$ или в $\mathrm{star}(j)$, обозначим противоположную точку в соответсвующем икосаэдре за k^*. Если k лежит и в $\mathrm{star}(i)$ и в $\mathrm{star}(j)$, k^* будет обозначать две вершины k_1^* и k_2^*.

Далее нам потребуется следующая лемма, полученная прямым перебором:

Теорема 2.2 ([6]). *Пусть L – кратчайший путь между вершинами в $\mathcal{K}_{P\setminus\{k,k^*\}}$ и $L = \{i, p_1, \ldots, p_n, j\}$ (если таких путей несколько, теорема верна для любого из них). За NL обозначим все точки лежащие в $L \cup \{k\}$ или соседние к одной из вершин объединения.*

$$NL = \{v : v \in L \cup \{k\} \textit{или } \mathrm{star}(v) \cap L \cup \{k\} \neq \varnothing\}.$$

Тогда:

1. *$\mathcal{K}_{[m]\setminus NL}$ – связно.*

2. *$\mathcal{K}_{\{[m]\setminus NL\}\cup\{i,j\}}$ – связно, если и только если k не является противоположенной вершиной p_1 в $\mathrm{star}(i)$ и не является противоположенной p_n в $\mathrm{star}(j)$.*

Проведем между точками i, j кратчайший реберный путь $i, p_1, \ldots, p_n, j$.

Так как граф $\mathcal{K}_{\{[m]\setminus NL\}\cup\{i,j\}}$ связен, соединим в нем точки i, j кратчайшим путем $i, q_1, \ldots, q_m, j$.

Следствие 2.1. *Поскольку после построения пути $L = \{i, p_1, \ldots, p_n, j\}$, точку k можно поменять на любую не лежащую на $L \cup \mathrm{star}(i) \cup \mathrm{star}(j)$, то для любого кратчайшего пути L комплекс $\mathcal{K}_{\{[m]\setminus\{v: v\in L \textit{ или } \mathrm{star}(v)\cap L\neq\varnothing\}\}\cup\{i,j\}}$ – связно.*

Теорема 2.3. *Пусть $I = \{i, p_1, \ldots, p_n, j, q_1, \ldots, q_m\}$. Тогда $\mathcal{K}_I$ – подкомплекс, натянутый на вершины I – бесхордовый цикл и $\mathcal{K}_{I\setminus\{i,j\}\cup\{k\}}$ имеет по крайней мере 2 компоненты связности.*

Доказательство. Докажем его бесхордовость. Вершины $\{i, p_1, \ldots, p_n, j\}$ не соединены хордой в силу минимальности построенного пити. Аналогично не соединены хордой вершины $\{i, q_1, \ldots, q_m, j\}$. Между вершинами $\{p_1, \ldots, p_n\}$ и $\{q_1, \ldots, q_m\}$ не могут быть соединены ребром, потму что иначе некоторая вершина q_x лежала бы в линке некоторой вершины p_yб что невозможно по построению. Следовательно, это бесхордовый цикл.

Подкомплекс $K_{I\ \{i,j\}\cup\{k\}}$ разбивается в две несвязных компоненты $K_{\{p_1,\ldots,p_n,k\}}$ и $K_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$, следовательно, компонента $K_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$ не пересекается со $\mathrm{star}(k)$. □

Обобщим теперь теорему для произвольного многогранника из класса $\mathcal{D}$. Для этого нам потребуются следующие следствия, с помощью которых мы будем проводить искомый реберный путь по каждому 600-ячейнику в клетке.

Следствие 2.2. *Для различных вершин i, j, $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$ и различных вершин $x, y \in \mathrm{link}(i)$, $\{x, y\} \notin \mathcal{K}$, существует путь $L = \{x, p_1, \ldots, p_n, j, q_1, \ldots, q_m, y\}$ такой, что вершины соединены ребром, только если они соседние в списке. А значит $\mathcal{K}_L \cong [0, 1]$.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 2.2, положив $k = x$, проведем путь L_1 от j к y, $L_1 = \{j, q_1, \ldots, q'_m, y\}$.

Если он пересекается со $\mathrm{star}(x)$, обозначим за q'_l ближайшую к j вершину из пересечения к вершине j. Дополним путь до цикла $L_2 = \{y, p_1, \ldots, p_n, j, q_1, \ldots, q'_m, y\}$, удовлетворяющему теореме 2.5. А затем выкинем из пути L его конец: $\{q_{l'+1}, \dots, q'_m, y\}$ и продолжим путь до y:

$$L = \{y, p_1, \dots, p_n, j, q_1, \dots, q'_l, x\}.$$

Если же путь не пересек $\mathrm{star}(x)$, тогда, в силу следствия [?] мы можем построить путь $L_2 = \{x, p_1, \dots, p_n, j\}$, чтобы $L = L_2 \cup L_1 = \{x, p_1, \dots, p_n, j, q_1, \dots, q_m, y\}$ удовлетворял условиям следствия. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть даны три различные вершины i, j, k', $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$, и точка k' соединена ребром с i, $k' \in \mathrm{link}(i)$. Пусть k'' обозначает вершину, диаметрально противоположную k' в икосаэдре $\mathrm{link}(i)$. Тогда существует путь*

$$L = \{p_1, \dots, p_n, j, q_1, \dots, q_m\}, \quad p_1 = k'', q_m \in \mathrm{link}(i) \cap \mathrm{link}(k'), L \cap \mathrm{star}(i) = \{p_1, q_m\},$$

что вершины соединены ребром, только если они соседние в списке. А значит $\mathcal{K}_L \cong [0, 1]$.

Доказательство. Проведем от точки j до $\mathrm{star}(i)$ кратчайший путь $\{j, t_1, \dots t_l\}$. Если $t_l \in \mathrm{link}(k')$ (аналогично в случае $t_l = k''$), значит, это кратчайший путь до этой точки и, в силу следствия 2.1, мы можем продолжить этот путь до безреберного пути $\{f_h, \dots, f_1, i, t_1, \dots, t_l\}$, где $f_h = k''$ (в аналогичном случае до $f_h \in \mathrm{link}(k')$). Получим искомый путь.

Если же $t_l = k'$. Тогда если $\mathrm{link}(t_{l-1}) \cap \mathrm{star}(i) \neq \{k'\}$, то мы можем поменять последнюю точку пути на другую, и новая точка $t'_l \in \mathrm{link}(k')$. Если $\mathrm{link}(t_{l-1}) \cap \mathrm{star}(i) = \{k'\}$, то, согласно теореме 2.2, положив $k = i$, построим кратчайший путь до $\mathrm{star}(i)$, удовлетворяющий условию теоремы. Очевидно, он будет длиннее на 1 вершину. Модифицируем имеющийся путь. Положим $t_{l+1} = u$, где u – любая вершина из $\mathrm{link}(k') \cap \mathrm{link}(i)$, а новой вершиной t_l возьмем любую вершину, соединяющую t_{l-1} и t_{l+1} и не равную k'. Такая существует, потому что вершины t_{l-1} и t_{l+1} лежат в икосаэдре $\mathrm{star}(k')$ на расстоянии 2.

Аналогично поступим, если $t_l \in \mathrm{link}(k'')$. Если $\mathrm{link}(t_{l-1}) \cap \mathrm{star}(i) \neq \{t_l\}$, то мы можем выбрать вершину в $\mathrm{link}(k')$ или k'' (это так, потому что любая треугольная грань икосаэдра I_+ содержит одну из этих вершин). Если $\mathrm{link}(t_{l-1}) \cap \mathrm{star}(i) = \{k'\}$, то так же положим $k = i$ и построим удлиненный путь с концом в вершине k''. $\square$

2.2 Комбинаторные свойства класса $\mathcal{D}$.

Обобщим теперь теорему для склейки двух 120-ячейников.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{K}$ обозначает двойственный симплициальный комплекс к склейке двух 120-ячейников. Тогда для любых точек $i, j, k', \{i, j\} \notin \mathcal{K}$ существует такой подкомплекс $J = \{i, p_1, \dots, p_n, j, q_1, \dots, q_m\}$, что:*

1. *$\mathcal{K}_J$ – безреберный цикл.*
2. *$\mathcal{K}_{J \setminus \{i,j\} \cup \{k\}}$ – состоит из двух компонент связности.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{K}$ соответсвует склейке двух 120-ячейников, его можно представить как объединение двух комплексов, соответсвующим каждому 120-ячейнику из которого выброшена вершина v_+ (со всеми прилегающими ребрами), соответствующая склеиваемой грани.

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{I_1 \setminus v_+} \cup \mathcal{K}_{I_2 \setminus v_+}, \qquad \mathcal{K}_{I_1} \cong \mathcal{K}_{I_2} \cong \mathcal{K}_{C_600}.$$

Обозначим $\mathrm{link}(v_+)$ за I_+. В отличие от веришины, он полностью лежит в $\mathcal{K}$.

Рассмотрим несколько случаев расположения вершин: Если i и j лежат в одном 600-ячейнике, задача тривиальна и сводится к предыдущей. Пусть далее i лежит в $\mathcal{K}_{I_1}$, а j в $\mathcal{K}_{I_2}$.

1. k' не лежит в I_+. Без ограничения общности, будем считать, что точка k' лежит в $\mathcal{K}_{I_1}$.

   1.1. k^* не лежит в I_+.

   Тогда, пользуясь теоремой 2.5, проведем цикл J_1 в $\mathcal{K}_{I_1}$ между точками i, v_+, положив $k = k'$. Пересечение $J_1 \cap I_+$ состоит из двух точек x, y. Обозначим пояс без точки v_+ за P_1.

   Используя следствие 2.2, построим бесхордовый путь P_2 в $\mathcal{K}_2$ от x к y, проходящий через точку j. Тогда $P_1 \cup P_2$ образуют искомый цикл.

   1.2. k^* лежит в I_+.

   В этом случае k^* обозначает только одну точку, поскольку k не может лежать в пересечении линков i и j.

   Построим P_1 следующим образом: Выберем любые две точки x, y в $\mathrm{star}(k^*) \cap I_+$ не соединенные ребром. И построим искомый путь в икосаэдре $\mathrm{star}(k^*)$. Построение пути P_2 сделаем как в предыдущем случае. По построению пути (в нем нет лишних хорд) он не пересечет точку k^*. Таким образом мы построили искомый путь.

2. k' лежит в I_+.

   Обозначим за k'' точку, противоположенную k' в I_+. Наша цель – построить бесхордовый путьP_1 в $\mathcal{K}_1$, $P_1 = \{p_1, \ldots, p_n, i, q_1, \ldots, q_m\}$, чтобы во-первых $P_1 \cap I_+ = \{p_1, q_m\}$, а во вторых $p_1 = k'', q_m \in \mathrm{link}(k')$. Если построить аналогичный путь P_2 в $\mathcal{K}_2$, $P_2 = \{p'_1, \ldots, p'_{n'}, j, q'_1, \ldots, q'_{m'}\}$ и соединить $q_m, q'_{m'}$ в $\mathrm{link}(k')$, получим искомый путь.

   Построение таких путей описано в следсвии 2.3.

□

Теперь мы готовы доказать теорему для произвольного многогранника из класса $\mathcal{D}$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{K}$ обозначает двойственный симплициальный комплекс к произвольному многограннику $D \in \mathcal{D}$. Тогда для любых точек $i, j, k', \{i, j\} \notin \mathcal{K}$ существует такой подкомплекс $J = \{i, p_1, \ldots, p_n, j, q_1, \ldots, q_m\}$, что:*

1. *$\mathcal{K}_J$ – безреберный цикл.*

2. *$\mathcal{K}_{J \setminus \{i,j\} \cup \{k\}}$ – состоит из двух компонент связности.*

Доказательство. Многогранник D представляется как объединение 120-ячейников:

$$D = \bigcup D_i, D_i \cong C_{120},$$

где пересечение любых двух различных многогранников – это пустое множество или грань-додекаэдр.

Два 120-ячейника, содержащих точки i и j, соединяются какой-то цепочкой $\{D_{t_1}, \ldots, D_{t_n}\}$, в которой пересекаются только подряд идущие многогранники. Обозначим грани, по которым пересекаются соседние многогранники как $\{F_{t_1}, \ldots, F_{t_n - 1}\}$, а двойственные им вершины будем обозначать как $\{u_{t_1}, \dots, u_{t_n-1}\}$, обозначим так же $u_0 = i, u_n = j$.

Предположим грань, соответсвующая k', лежит в некотором многограннике D_{t_l} (или в пересечении многогранников D_{t_l} и $D_{t_{l+1}}$).

Мы будем одновремнно, начав с многогранника D_{t_l} (или склейки D_{t_l} и $D_{t_{l+1}}$) склеивать наш многогранник D и одновременно проводить искомый цикл.

Пусть мы склеили многогранники $\bigcup\limits_{h=a}^{b} D_{t_h}$ и провели на двойственном многограннике цикл $C_{a-1,b}$, удовлетворяющий условию, между точками u_{a-1}, u_b. Если мы не склеили все многогранники из цепочки, приклеим еще один. Пусть это будем многогранник $D_{t_{b+1}}$. Цикл $C_{a-1,b}\ u_b$ будет лежать в двойственном комплексе. Обозначим за x_b, y_b точки, лежащие в пересечении $\mathrm{star}(u_b) \cap C_{a-1,b}$.

Чтобы продолжить цикл, построим с помощью следствия 2.2 путь C' в $D_{t_{b+1}}$ между точками x_b, u_{b+1}, y_b. Объединение $C_{a-1,b}\ u_b \cup C'$ даст нам искомый цикл. Аналогичные рассуждения, если бы мы приклеивали многогранник $D_{t_{a-1}}$. После того, как мы склеили все многогранники $\{D_{t_1}, \dots, D_{t_n}\}$, приклеим оставшиеся многогранники. Может случится так, что новый многогранник D_+ приклеится по грани, через которую проходит пояс (или, на двойственном языке, соответствует вершине u_l, содержащейся в цикле). Заметим, что по построению класса $\mathcal{D}$ такая точка может быть только одна. В таком случае возьмем соседние вершины в цикле u_{l-1} и u_{l+1}, выкинем из цикла вершину u_l и на её место поставим кратчайший путь в D_+, соединяющий эти вершины. Склеив все многогранники, получим цикл, удовлетворяющий условиям теоремы.

В случае, когда точка k' не лежит ни в одном из многогранников $\{D_{t_1}, \dots, D_{t_n}\}$ выберем вместо k' новую точку следующим образом. На графе многогранника D выберем среди многогранников $\{D_{t_1}, \dots, D_{t_n}\}$ ближайший к многограннику D'_k, содержащему вершину k', и выберем так же ребро, ведущее к D'_k. Положим тогда $k' = k''$, где k'' соответсвует грани, которой подписано выбранное ребро.

Если $\mathrm{link}(k')$ пересекается с каким-то многогранником D_{t_h} из $\{D_{t_1}, \dots, D_{t_n}\}$, то $\mathrm{link}(k') \cap D_{t_h} \subset \mathrm{link}(k'') \cap D_{t_h}$. А приклеивание многогранников из ветви, содержащей D'_k, не меняет путь, поскольку тот не проходит через вершину k''. $\square$

3 Основные результаты.

В работе [1] когомологическая жесткость малых накрытий доказывается для многогранников из класса Погорелова $\mathcal{P}$. Мы воспользуемся этой схемой доказательства, поскольку большинство теорем работает и для нашего класса многогранников $\mathcal{D}$. В местах, где в доказательствах будут различия, мы будем специально это отмечать.

Теорема 3.1 ([1, Лемма 4.11], [4, следствие 3.4])**.** *Пусть P – 3-многогранник из класса Погорелова $\mathcal{P}$. Рассмотрим множество классов когомологий $\mathcal{T}(P) = \pm[u_i v_j] \in H^3(\mathcal{Z}_P)$, $F_i \cup F_j = \emptyset$. Тогда для любого изоморфизма колец когомологий $\varphi : H^*(\mathcal{Z}_P) \to H^*(\mathcal{Z}_{P'})$ мы имеем $\varphi(T(P)) = T(P')$.*

Условие $P \in \mathcal{P}$ используется в доказательстве теоремы для того, чтобы показать, что $P' \in \mathcal{P}$. Поскольку мы доказываем когомологическую жесткость малых накрытий над многогранниками в классе $\mathcal{D}$, то в нашем случае теорема выглядит следующим образом:

Теорема 3.2. *Пусть P, P' – многогранники из класса $\mathcal{D}$. Рассмотрим множество классов когомологий $\mathcal{T}(P) = \pm[u_i v_j] \in H^3(\mathcal{Z}_P)$, $F_i \cup F_j = \emptyset$. Тогда для любого изоморфизма колец когомологий $\varphi : H^*(\mathcal{Z}_P) \to H^*(\mathcal{Z}_{P'})$ мы имеем $\varphi(T(P)) = T(P')$.*

Для доказательства которой используется следующий результат:

Теорема 3.3 ([1, Лемма D.1], [4, лемма 3.3]). *Пусть P – трёхмерный многогранник из класса Погорелова $\mathcal{P}$ с двойственным симплициальным комплексом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_P$. Положим $R = H^*(\mathcal{Z}_P; k)$, где k – поле. В обозначениях леммы 3.1 рассмотрим k-линейную комбинацию элементов множества $\mathcal{T}(P)$:*

$$\alpha = \sum_{\{i,j\} \notin K} r_{ij}[u_i v_j],$$

в которой по крайней мере два коэффициента $r_{ij} \in \mathbf{k}$ не равны нулю. Тогда для каждой пары k, l такой, что $r_{kl} \neq 0$, имеем

$$\dim \mathrm{Ann}_R[u_k v_l] > \dim \mathrm{Ann}_R\, \alpha.$$

Замечание 3.4. Условие, что многогранник P принадлежит к классу Погорелова $\mathcal{P}$ используется в доказательстве только, чтобы воспользоваться леммой [1, Лемма A.3] (она же [4, лемма 3.2]), чтобы построить пояс в многограннике, аналогичный тому поясу, который мы построили в теореме 2.5. Таким образом эта теорема работает и в случае, если многогранник $P \in \mathcal{D}$.

Теорема 3.5 ([1, Лемма 5.1]). *В обозначениях теоремы 1.2 рассмотрим множество классов когомологий $D(M) = \pm[v_i] \in H_2(M), i = 1, \dots, m$. Если $P \in \mathcal{P}$, то для любого изоморфизма колец когомологий $\varphi : H^*(M) \to H^*(M')$ квазиторических многообразий над P и P' имеем $\varphi(D(M)) = D(M')$. Более того, множество $D(M)$ отображается биективно под действием φ.*

Замечание 3.6. Суммируя доказательство этого утверждения с вышеизложенными результатами, можно получить, что эта теорема верна, если оба многогранника P, P' лежат в $\mathcal{D}$.

Теорема 3.7. *Пусть $M = M(P, \Lambda)$ и $M' = M(P', \Lambda')$ – квазиторические многообразия над трёхмерными простыми многогранниками P и $'P'$ соответственно. Пусть многогранники P и P' лежат в классе $\mathcal{D}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *имеем изоморфизм колец когомологий $\varphi : H(M) \xrightarrow{\cong} H(M')$;*
2. *имеем диффеоморфизм $M \cong M'$;*
3. *имеем эквивалентность характеристических пар $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$.*

Доказательство. Импиликация (2) => (1) очевидна. Импликация (3) => (2) следует из теоремы 1.4. Докажем импликацию (1) => (3).

В силу теоремы 3.5 имеем $\varphi([v_i]) = \pm[v'_{\sigma(i)}]$, где σ – некоторая перестановка на множестве граней. Перенумеровав грани и домножив матрицу Λ справа на матрицу B можем предполагать, что $\varphi([v_i]) = [v_i)']$. Получаем, что $F_{i_1} \cap \dots F_{i_k} = \varnothing \Leftrightarrow [v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_k}] = 0 \Leftrightarrow [v'_{i_1} \cdot \dots \cdot v'_{i_k}] \Leftrightarrow F'_{i_1} \cap \dots F'_{i_k} = \varnothing$. Отсюда следует, что комплексы KP и KP' изоморфны, т.е. многогранники P и P' комбинаторно эквивалентны.

Теперь рассмотрим $(3 \times m)$-матрицы Λ и Λ'. Мы можем предполагать, что $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \neq \varnothing$ в P и $F'_1 \cap F'_2 \cap F'_3 \cap F'_4 \neq \varnothing$ в P'; этого всегда можно добиться перенумеровкой граней многогранников. Далее, умножив матрицы Λ и Λ' слева на соответствующие матрицы из $GL_4(Z)$, мы можем предполагать, что

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{14} & \dots & \lambda_{1m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda_{24} & \dots & \lambda_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda_{34} & \dots & \lambda_{3m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_{44} & \dots & \lambda_{4m} \end{pmatrix}, \Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda'_{14} & \dots & \lambda'_{1m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda'_{24} & \dots & \lambda'_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda'_{34} & \dots & \lambda'_{3m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda'_{44} & \dots & \lambda'_{4m} \end{pmatrix},$$

Теперь матричные элементы $\lambda_{jk}, 5 \leq k \leq m$, являются коэффициентами в разложении элементов $[v_j], 1 \leq j \leq 4$, по базису $[v_5], \ldots, [v_m]$ группы $H_2(M)$. То же имеет место и для матричных элементов λ'_{jk}. Так как $\varphi([v_i]) = v'_i$, отсюда следует, что $\lambda_{jk} = \lambda'_{jk}$. Итак, характеристические пары (P, Λ) и (P', Λ') эквивалентны. Теорема доказана. □

Теорема 3.8. *Пусть $N = N(P, \Lambda)$ и $N' = N(P', \Lambda')$ – малые накрытия над многогранниками P и $'P'$ из класса $\mathcal{D}$. Пусть Λ и Λ' удовлетворяет условию поднятия из определения 1.6. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *имеем изоморфизм колец когомологий $\varphi : H(N, \mathbb{Z}_2) \overset{\cong}{\to} H(N', \mathbb{Z}_2)$;*
2. *имеем изоморфизм фундаментальных групп $\pi(N) \cong \pi(N')$;*
3. *имеем диффеоморфизм $N \cong N'$;*
4. *имеем эквивалентность $\mathbb{Z}_2$-характеристических пар $(P, \Lambda) \sim (P', \Lambda')$.*

Доказательство. Импиликации (2) => (1) и (3) => (2) очевидны. Импликация (4) => (3) следует из вещественной версии теоремы 1.4. Докажем импликацию (1) => (3). По условию теоремы, можем считать (P, Λ) и (P', Λ') $\mathbb{Z}$-характеристическими парами.

Рассмотрим соответствующие квазиторические многообразия $M = M(P, \Lambda)$ и $M' = M(P', \Lambda')$. Так как кольцо $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ получается из $H^*(N; \mathbb{Z}_2)$ удвоением градуировки, мы имеем изоморфизм колец Н$H^*(M; \mathbb{Z}_2) \overset{\cong}{\to} H^*(M'; \mathbb{Z}_2)$. Тогда эквивалентность характеристических пар следует из прошлой теоремы (с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак Когомологическая жёсткость многообразий, задаваемых трёхмерными многогранниками. *УМН.*, т. 72, вып. 2.

[2] Garrison and Scott. Small covers of the dodecahedron and the 120-cell, *American mathematical society.*, Volume 131, Number 3, Pages 963–971.

[3] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, Toric topology, Math. Surveys Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp.

[4] F. Fan, J. Ma, X. Wang, B-Rigidity of flag 2-spheres without 4-belt, 2015, 11 pp., arXiv: 1511.03624.

[5] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions, Duke Math. J., 62:2 (1991), 417–451.

[6] `https://github.com/sahdoum/diploma_600_cell_belt`