Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

СВОЙСТВА ОТДЕЛИМОСТИ ПРОСТРАНСТВ ОРБИТ ДЕЙСТВИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТОРА, ПРОИСХОДЯЩИХ ИЗ ПРЕДВЕЕРОВ

Джафаров Анар
303 группа

Научный руководитель:
Панов Тарас Евгеньевич

2018

1. Введение

Основной целью данной работы является обобщение классической конструкции торических многообразий из вееров на ситуацию, когда конфигурации конусов в пространстве несколько более произвольные. При этом подход к определению «более произвольных конфигураций» выбран комбинаторный. Можно сформулировать два основных результата исследования:

1) Обобщение теоремы о совпадении фактор-конструкции и классической конструкции и геометрическом факторе ([1, Theorem 5.4.5]).
2) Критерий отделимости полученных многообразий.

2. Основные определения и обозначения

Раз и навсегда зафиксируем решётку (свободную абелеву группу) N ранга n и n-мерное вещественное векторное пространство $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, которое будем понимать как объемлющее для решётки N. Все рассматриваемые конусы будем считать рациональными.

Объектом исследования в данной работе будут некоторые геометрические и комбинаторные данные и порождённое ими торическое многообразие. Дадим соответствующие определения.

Определение 2.1. Предвеером будем называть пару $(S, \mathcal{K})$, где $S = \{a_1, ..., a_m\} \subset N$ — конечный набор векторов, а $\mathcal{K}$ — некоторый набор подмножеств множества $\{1, \ldots, m\}$, такой, что если $I \in \mathcal{K}$, τ — грань конуса $\mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I)$, а $J \subset I$ — набор такой, что $\tau = \mathrm{Cone}(a_j \mid j \in J)$, то $J \in \mathcal{K}$. Также будем требовать, что если $J \subsetneq I \in \mathcal{K}$, то конус $\mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I)$ не совпадает с конусом $\mathrm{Cone}(a_j \mid j \in J)$.

Замечание. Термин «предвеер» не является общепринятым и используется (насколько известно автору) только в данной работе.

Предвеер называется *симплициальным*, если для любого $I \in \mathcal{K}$ набор векторов $\{a_i \mid i \in I\}$ линейно независим. Предвеер называется *квазивеером*, если для любых $I, J \in \mathcal{K}$ пересечение конусов $\tau = \mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I) \cap \mathrm{Cone}(a_j \mid j \in J)$ — их общая грань и $\tau = \mathrm{Cone}(a_k \mid k \in I \cap J)$. Квазивеер называется *веером* если для любого $I \in \mathcal{K}$ конус $\mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I)$ — строго выпуклый.

Из выпуклой геометрии нам понадобится один технический факт, а именно лемма об отделимости ([1, Lemma 2.1.2]).

Лемма 2.2 (Об отделимости)**.** *Пусть σ_1 и σ_2 — два конуса, пересекающиеся по общей грани τ. Тогда можно выбрать $u \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$, так что*

$$\tau = \sigma_1 \cap u^\perp = \sigma_2 \cap u^\perp.$$

Это означает, что если конусы пересекаются по общей грани, их можно разделить гиперплоскостью.

Зафиксируем, помимо комбинаторной терминологии, минимально необходимую алгебро-геометрическую.

Предмногообразием мы будем называть результат склейки аффинных многообразий при помощи изоморфизмов открытых подмножеств (подробно данная конструкция описана в [2, Ch.3]). Предмногообразие X называется *отделимым*, если образ диагонального отображения $\Delta\colon X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$

замкнут в топологии Зарисского на произведении $X \times X$. В этом случае предмногообразие и называется *многообразием.*

Замечание. Предмногообразие отделимо тогда и только тогда, когда оно хаусдорфово в стандартной топологии.

Также мы будем работать с действиями алгебраических групп на алгебраических многообразиях и с факторпространствами по таким действиям. Однако в общем случае факторпространство может не оказаться даже предмногообразием, поэтому для наших целей гораздо лучше подходить к факторизации по действию группы категорно.

Пусть X — алгебраическое предмногообразие с действием аффинной алгебраической группы G. Алгебраическое предмногообазие Y называется *категорным фактором* X по действию G, если существует морфизм $\pi\colon X \to Y$ постоянный на орбитах, такой что для любого морфизма $\varphi\colon X \to Z$ постоянного на орбитах, существует морфизм $\varphi'\colon Y \to Z$, такой что $\varphi' \circ \pi = \varphi$. Это свойство описывается следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Z \\ & Z \arrow[ur, dashed, "\varphi'"] & \end{tikzcd}$$

Обозначать категорный фактор будем $X//G$.

В простейшем случае удаётся описать категорный фактор и алгебру его регулярных функций.

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие (аффинные предмногообразия всегда отделимы, поэтому не имеет смысла писать «аффинное предмногообразие») с действием алгебраической аффинной группы G и алгеброй регулярных функций $\mathbb{C}[X]$. Обозначим за $\mathbb{C}[X]^G$ подалгебру в $\mathbb{C}[X]$ функций, инвариантных относительно действия G. Если G — (например) квазитор (произведение алгебраического тора на конечную абелеву группу), то $\mathbb{C}[X]^G$ — конечнопорождена. Тогда $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$ — категорный фактор $X//G$, а морфизм π оказывется двойственным, к вложению алгебр $\mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$. Морфизм π сюръективен и устанавливает биекцию между точками $X//G$ и замкнутыми G-орбитами действия.

В случае, когда все G-орбиты замкнуты (замыкания орбиты в классической топологии и топологии Зарисского совпадают, поэтому проверку замкнутости достаточно производить в одной из них), категорный фактор совпадает с пространством орбит X/G. В этом случае это факторпространство называется *геометрическим фактором* и обозначается X/G.

3. Классическая конструкция предмногообразия $V_{(S,\mathcal{K})}$

Приведём классическую конструкцию предмногообразия $V_{(S,\mathcal{K})}$, не обосновывая её подробно. Более детальное описание построений читатель сможет найти в [2, Chapters 1-3].

Конструкция 3.1. Опишем для начала способ сопоставления конусу $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ аффинного торического многообразия V_σ. Пусть $\sigma^\vee \subset N_{\mathbb{R}}^*$ — конус, двойственный к конусу σ, и пусть $S_\sigma = \sigma^\vee \cap N^*$ — множество точек решётки N^*, попадающих в $\sigma^\vee$. Тогда S_σ оказывается полугруппой по сложению. Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}[S_\sigma]$ с базисом $\{\chi^u \mid u \in S_\sigma\}$ и умножением определённым равенством $\chi^u \cdot \chi^{u'} = \chi^{u+u'}$. Это коммутативная конечнопорождённая (напомним, что конус σ, а вслед за ним и $\sigma^\vee$ рациональны) алгебра без ненулевых нильпотентов. Аффинным торическим многообразием, соответствующим конусу σ назовём аффинное алгебраическое многообразие $V_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.

Пример 3.2. Пусть $\sigma = \mathrm{Cone}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3) \subset \mathbb{R}^3$. Тогда $\sigma^\vee = \mathrm{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3)$. Аффинная полугруппа S_σ — линейные $\mathbb{N}$-комбинации столбцов u_1, u_2, u_3 и u_4 матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Алгебра $\mathbb{C}[S_\sigma]$ изоморфна $\mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw)$, так как $u_4 = u_1 + u_2 - u_3$, то есть $u_1 + u_2 - u_3 + u_4 = 0$, что даёт в алгебре мультипликативное соотношение $\chi^{u_1+u_2-u_3-u_4} = 1$, то есть $\chi^{u_1+u_2} = \chi^{u_3+u_4}$, значит $\chi^{u_1} \cdot \chi^{u_2} - \chi^{u_3} \cdot \chi^{u_4} = 0$, и других соотношений между χ^{u_i} нет. Осталось обозначить $\chi^{u_1}, \chi^{u_2}, \chi^{u_3}, \chi^{u_4}$ за x, y, z, w. Итак $V_\sigma \simeq V(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$.

Конструкция 3.3. Пусть теперь имеется предвеер $(S, \mathcal{K})$. Эти данные задают набор конусов $\Sigma = \{\mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I) \mid I \in \mathcal{K}\}$. Зададим на $\mathcal{K}$ отношение частичного порядка включением граней. Пусть τ — грань σ, тогда $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ и включение алгебр $\mathbb{C}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$ индуцирует открытое по Зариски включение $V_\tau \hookrightarrow V_\sigma$. Это позволяет определить предмногообразие соответствующее предвееру Σ как копредел $V_{(S,\mathcal{K})} = \mathrm{colim}_{\sigma\in\Sigma} V_\sigma$.

Замечание. Важно, что отношение частичного порядка индуцировано именно включением граней, а не произвольных конусов, потому что только в случае граней индуцированный морфизм многообразий будет открытым вложением. Поэтому если два конуса σ_1 и σ_2 пересекаются по конусу τ, не являющемуся общей гранью, то склейка V_{σ_1} и V_{σ_2} будет происходить не по V_τ, а по объединению подмногообразий, соответствующих общим граням σ_1 и σ_2.

Пример 3.4. Пусть $S = \{a_1, a_2\} \subset \mathbb{R}$, где $a_1 = e_1$, $a_2 = -e_1$, а $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Обозначим за σ_1 конус $\mathrm{Cone}(a_1)$, за σ_2 конус $\mathrm{Cone}(a_2)$ и за τ тривиальный конус состоящий из одной точки $\{0\}$. Чтобы получить многообразие $V_{(S,\mathcal{K})}$ необходимо склеить V_{σ_1} и V_{σ_2} вдоль V_τ. Обе S_{σ_1} и S_{σ_2} изоморфны $\mathbb{N}$ и дают многообразия изоморфные $\mathbb{C}$. Вопрос только в том, как именно их склеить. Двойственный к τ конус $\tau^\vee$ — вся прямая, поэтому $S_\tau \simeq \mathbb{Z}$ и $V_\tau \simeq \mathbb{C}^*$. Вложение $i_1 : S_{\sigma_1} \to S_\tau$ отправляет u_1 в e_1, а вложение $i_2 : S_{\sigma_2} \to S_\tau$ отправляет u_2 в $-e_1$, где u_1 и u_2 — образующие S_{σ_1} и S_{σ_2}, а e_1 — образующий в S_τ. Поэтому вложение $i_1^* : V_\tau \hookrightarrow V_{\sigma_1}$ есть вложение $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$ переводящее t в t, а вложение $i_1^* : V_\tau \hookrightarrow V_{\sigma_2}$ есть вложение $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$ переводящее t в $\frac{1}{t}$. Таким образом склейка даёт абстрактное алгебраическое многообразие гомеоморфное $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$.

Пример 3.5. Пусть теперь два вектора совпадают, то есть имеется $S = \{a_1, a_2\} \subset \mathbb{R}$, где $a_1 = e_1$, $a_2 = e_1$, а $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Аналогично предыдущему примеру, получаем две копии $\mathbb{C}$, которые нужно склеить по вложеному одномерному алгебраическому тору. Разница состоит в том, что в данном примере тор вкладывается одинаковыми отображениями, поэтому то, что мы получим в итоге топологически является склейкой двух плоскостей вдоль тождественного гомеоморфизма проколотых плоскостей. Результатом такой склейки является плоскость с двумя «слипшимися» точками.

Замечание. Важно обратить внимание на тот факт, что в первом случае получилось нечто «хорошее», а во втором полученное пространство даже не хаусдорфово. В конце работы будет дано объяснение этого явления.

4. Алгебраическая фактор-конструкция

Наряду с классической конструкцией $V_{(S,\mathcal{K})}$, имеет место представление торического многообразия в виде факторпространства некоторого аффинного торического многообразия по действию алгебраической абелевой группы ([1, Chapter 5.4], [2, Chapter 5.1]). Как будет видно из построения группа G будет задаваться исключительно геометрическими данными предвеера, то есть множеством S, тогда как пространство U, напротив, будет задаваться набором $\mathcal{K}$, то есть комбинаторной частью информации. Опишем это построение в предположении, что линейная оболочка векторов из S — всё пространство $N_{\mathbb{R}}$.

Конструкция 4.1. Определим сперва группу $G = G(S)$. Рассмотрим отображение $A\colon \mathbb{Z}^m \to N$, которое отображает базисные векторы $e_i \in \mathbb{Z}^m$ в $a_i \in N$. Тензорно умножим это отображение на $\mathbb{C}^*$. Получим сюръективное (напоминаем, что мы рассматриваем случай, когда линейная оболочка векторов $a_1, ..., a_m$ — всё пространство $N_{\mathbb{R}}$) отображение

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\colon (\mathbb{C}^*)^m \to \mathbb{C}^*_N$$

Это отображение явно записывается в следующем виде:

$$(t_1, ..., t_n) \mapsto (\prod_{j=1}^{m} t_j^{a_1^j}, ..., \prod_{j=1}^{m} t_j^{a_n^j}) = (\prod_{j=1}^{n} t_j^{\langle a_1, \varepsilon_j \rangle}, ..., \prod_{j=1}^{n} t_j^{\langle a_n, \varepsilon_j \rangle})$$

где a_i^j — j-я координата вектора a_i, а ε_j — j-й базисный вектор базиса в $N^*_{\mathbb{R}}$, двойственного к базису e_i. Определим $G(S)$ как ядро гомоморфизма $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Из формулы видно (и это будет для нас важно), что элемент $t = (t_1, ..., t_m) \in (\mathbb{C}^*)^m$ лежит в G тогда и только тогда, когда для любого $u \in N^*$ имеет место:

$$\prod_{j=1}^{m} t_j^{\langle a_n, u \rangle} = 1$$

Конструкция 4.2. Теперь определим аффинное торическое многообразие $U = U(\mathcal{K})$.

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \subset S, \forall J \in \mathcal{K} I \not\subseteq J} \{z = (z_1, ..., z_m) \mid z_i = 0 \ \forall i \in I\}$$

Нам так же пригодится представление $U(\mathcal{K})$ в виде

$$U(\mathcal{K}) = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} U(I)$$

где

$$U(I)=\{z\in\mathbb{C}^m \mid z^I\neq 0\},\ z^I=\prod_{i\in I} z_i$$

Очевидно, что $U(\mathcal{K})$ инвариантно относительно диагонального действия тора $(\mathbb{C}^*)^m$, поэтому сам тор, а значит и его подгруппа $G(S)$ действуют на $U(\mathcal{K})$.

Теорема 4.3. *Пусть $(S,\mathcal{K})$ — произвольный предвеер, тогда*

а) *Предмногообразие $V_{(S,\mathcal{K})}$ изоморфно категорному фактору $U(\mathcal{K})//G(S)$.*

б) *Это предмногообразие является геометрическим фактором тогда и только тогда, когда предвеер $(S,\mathcal{K})$ симплициален.*

Замечание. Эта теорема является обобщением теоремы из [1] (Theorem 5.4.5). В пункте а) эта разница не так существенна, а в пункте б) мы говорим немного больше, а именно показываем, что веровость не играет роли в вопросе о наличии незамкнутых орбит.

Доказательство. а) Для начала убедимся, что аффинное многообразие $V_\sigma = U(I)//G$, где $\sigma=\mathrm{Cone}(a_I \mid i\in I)$ (тут важно, что набор I — единственный элемент $\mathcal{K}$, на который натянут конус σ, это обеспечивается требованием, введённым в конце определения 2.1). Координатное кольцо $\mathbb{C}[U(I)]$ изоморфно $\mathbb{C}[z_i,z_j^{-1} \mid 1\le i\le m, j\notin I]$ и порождено мономами Лорана $\prod\limits_{i=1}^m z_i^{k_i}$, где $k_i\ge 0$, при $i\in I$. Из вида группы G следует, что такой моном является инвариантным относительно её действия тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod\limits_{i=1}^m z_i^{\langle a_i,u\rangle}$ для некоторого $u\in N^*$. Условие $\langle a_i,u\rangle\ge 0$ при $i\in I$ задаёт двойственный конус $\sigma^\vee\subset N^*_\mathbb{R}$. Значит алгебра $\mathbb{C}[U(I)]^G$ изоморфна $\mathbb{C}[\sigma^\vee\cap N^*]=\mathbb{C}[V_\sigma]$ (изоморфизм переводит моном $\prod\limits_{i=1}^m z_i^{\langle a_i,u\rangle}$ в χ^u и, очевидно, функториален). Значит $U(I)//G(S)\cong V_\sigma$. Теперь необходимо показать, что установленный изоморфизм $U(I)//G(S)\cong V_\sigma$ склеивается в изоморфизм $U(\mathcal{K})//G(S)\cong V_{(S,\mathcal{K})}$. Для этого достаточно в предположении, что $I,J\in\mathcal{K}$, и $J\subset I$ показать коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} U(I)//G(S) \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & U(J)//G(S) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ V_\sigma & V_\tau \arrow[l] \end{tikzcd}$$

где τ и σ —конусы соответствующие $J,I\in\mathcal{K}$ соответственно. В терминах алгебр регулярных функций эта диаграмма выглядит так:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[U(I)]^G \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \mathbb{C}[U(J)]^G \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] \\ \mathbb{C}[V_\sigma] \arrow[r] & \mathbb{C}[V_\tau] \end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы следует из функториальности вертикальных изоморфизмов. Это завершает доказательство первой части теоремы.

б) В доказательстве второй части утверждения воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.4. *Пусть есть предвеер $(S, \mathcal{K})$ и есть линейное соотношение $\sum\limits_{i \in I_+} a_i k_i = \sum\limits_{i \in I_-} a_i k_i$, где I_+ и I_- — непересекающиеся подмножества (хотя бы одно из которых непусто) некоторых $J_+, J_- \in \mathcal{K}$ (возможно, $J_+ = J_-$), и все коэффициенты $k_i > 0$, причём $I_+ \cup I_- \subset I$ для некоторого $I \in \mathcal{K}$, тогда по крайней мере одна орбита действия $G(S)$ на $U(\mathcal{K})$ незамкнута.*

Доказательство. Рассмотрим орбиту точки $z = (\underbrace{0, ..., 0}_{I_+}, 1, ..., 1) \in U(\mathcal{K})$. Понятно, что такая точка принадлежит $U(\mathcal{K})$, так как $I_+ \in \mathcal{K}$. Покажем, что орбита этой точки незамкнута.

Рассмотрим последовательность элеметнов группы $g^{(k)} = (e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_m})$, где $\alpha_i = k_i k$, для $i \in I_+$, $\alpha_i = -k_i k$, для $i \in I_-$ и $\alpha_i = 0$, для всех остальных i. Покажем, что $g^{(k)} \in G(S)$. Имеем равенство

$$\sum_{i \in I_+} a_i k_i = \sum_{i \in I_-} a_i k_i,$$

которое переписывается покоординатно в виде

$$\sum_{i \in I_+} a_i^j k_i = \sum_{i \in I_-} a_i^j k_i,$$

где a_i^j — j-я координата вектора a_i, $j = 1, ..., n$. Но $a_i^j = \langle \varepsilon_j, a_i \rangle$, поэтому

$$\sum_{i \in I_+} \langle \varepsilon_j, a_i \rangle k_i = \sum_{i \in I_-} \langle \varepsilon_j, a_i \rangle k_i$$

для любого $j = 1, ..., n$. Тогда по линейности для любого $u \in N^*$

$$\sum_{i \in I_+} \langle u, a_i \rangle k_i = \sum_{i \in I_-} \langle u, a_i \rangle k_i$$

Из последнего равенства следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\prod_{i \in I_+} e^{\langle u, a_i \rangle k_i k} = \prod_{i \in I_-} e^{\langle u, a_i \rangle k_i k}$$

Это и даёт принадлежность $g^{(k)} \in U(\mathcal{K})$.

Точки $g^{(k)} z$ имеют координаты $(\underbrace{0, ..., 0}_{I_+}, \underbrace{e^{-k_j k}}_{j \in I_-}, 1, ..., 1)$ и стремятся к точке $(\underbrace{0, ..., 0}_{I_+}, \underbrace{0, ..., 0}_{I_-}, 1, ..., 1)$ лежащей в $U(\mathcal{K})$ (так как $I_+ \cup I_- \subset I \in \mathcal{K}$), но не лежащей в орбите точки z, так как действие тора (тем более, его подгруппы) не может занулить ненулевые координаты.

Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы.

Покажем, что нарушение симплициальности хотя бы одного из конусов σ заданных предвеером $(S, \mathcal{K})$ непременно влечёт наличие незамкнутой орбиты.

Действительно, пусть $\sigma = \mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I)$ для некоторого $I \in \mathcal{K}$. Из несимплициальности σ следует, что есть нетривиальное линейное соотношение

$$\sum_{i \in I} a_i k_i = 0$$

Пусть $I_+ = \{i \mid k_i > 0\}$, а $I_- = \{i \mid k_i < 0\}$. Важно, что по крайней мере одной из множеств I_+ и I_- непусто. Перепишем полученное равенство в виде

$$\sum_{i\in I_+} a_i k_i = \sum_{i\in I_-} a_i(-k_i)$$

По лемме 4.4 из существования этого равенства следует незамкнутость некоторой орбиты.

Пусть предвеер симплициальный. Покажем, что орбита произвольной точки $z = (z_1, ..., z_m) \in U(\mathcal{K})$ замкнута. Пусть $g^{(k)}$ — последовательность точек группы $G(S)$, такая, что последовательность $g^{(k)}z$ сходится к $w = (w_1, ..., w_m) \in U(\mathcal{K})$. Чтобы показать, что $w \in Gz$ достаточно показать, что из последовательности $g^{(k)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (при переходе от рассмотрения последовательности к подпоследовательности будем обозначать новую последовательность так же, как исходную).

Пусть $g^{(k)} = (e^{\alpha_1^{(k)}+i\beta_1^{(k)}}, ..., e^{\alpha_m^{(k)}+i\beta_m^{(k)}})$. Так как $(e^{i\beta_1^{(k)}}, ..., e^{i\beta_m^{(k)}}) \in T^m$, где $T^m = (S^1)^m$ — компактный тор, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $(e^{i\beta_1^{(k)}}, ..., e^{i\beta_m^{(k)}})$ имеет предел. Существенная часть проверки состоит в том, чтобы разобраться с некомпактной частью группы. Переходя к рассмотрению подпоследовательности, можно считать, что $\alpha_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha_i \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Обозначим за I_+ множество $\{i \mid \alpha_i = +\infty\}$, и за I_- множество $\{i \mid \alpha_i = -\infty\}$. Из того, что $z, w \in U(\mathcal{K})$ следует, что $z_i = 0$ для $i \in I_+$ (иначе $g_i^{(k)} z_i \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$) и $w_i = 0$ (так как $g_i^{(k)} z_i \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$) для $i \in I_-$. Из симплициальности и того, что $\{a_i \mid i \in I_+\}$ и $\{a_i \mid i \in I_-\}$ — подмножества некоторых элементов из $\mathcal{K}$ следует, что наборам I_+ и I_- соответствуют конусы σ_+ и σ_- задающиеся веером $(S, \mathcal{K})$. Из того, что I_+ и I_- не пересекаются следует, что $\sigma_+ \cap \sigma_- = \{0\}$, по лемме 2.5. найдётся вектор $u \in N^*$ такой, что гиперплоскость $u^\perp \subset N_\mathbb{R}$ разделяет конусы σ_+ и σ_- ($u > 0$ на ненулевых векторах из σ_+, и $u < 0$ на ненулевых векторах из σ_-). Рассмотрим выражение:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^{(k)} \langle u, a_i \rangle$$

Из определения группы G следует, что эта сумма равна 0. С другой стороны, если предположить, что I_+ или I_- непусты, то эта сумма расходится к $+\infty$. Значит I_+ и I_- пусты и выбранная подпоследовательность сходится к некоторой точке тора. Осталось проверить, что эта точка лежит не просто в торе, а в группе G. Условие принадлежности группе G выглядит в данном случае так:

$$\prod_{i=1}^{m} e^{(\alpha_i^{(k)}+i\beta_i^{(k)})\langle u, a_i\rangle} = 1$$

Оно, очевидно, выплонено при всех k, а предельный переход сохраняет такие равенства, значит $\prod\limits_{i=1}^{m} e^{(\alpha_i+i\beta_i)\langle u, a_i\rangle} = 1$ и предельный элемент тора лежит в G.

Теорема доказана. □

Пример 4.5. Рассмотрим снова предвеер из примера 3.4.

Напомним, что $S = \{a_1 = e_1, a_2 = -e_1\} \subset \mathbb{R}$. В этом случае N^* аддитивно порождена одним элементом ε двойственном базисному элементу N. $\mid S \mid= 2$, поэтому в соответствии с явным видом группы $G(S)$, $G(S)$ — подгруппа в

$(\mathbb{C}^*)^2$, состоящая из элементов, заданных уравнением $t_1 t_2^{-1} = 1$ — диагонально вложенный одномерный тор.

Построим теперь аффинное многообразие. $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Единственное подмножество $\{1,2\}$, которое не содержится ни в одном элементе $\mathcal{K}$ — само $\{1,2\}$, поэтому $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{z_1 = 0, z_2 = 0\}$.

Тор $G(S) \simeq \mathbb{C}^*$ действует на $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^2 \backslash 0$ диагонально. Кроме того предвеер, является симплициальным, поэтому фактор геометрический. Таким образом мы получаем $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$, как этого и следовало ожидать в силу примера 3.4 и теоремы 4.3.

Пример 4.6. Протестируем теорему и на примере 3.5. Группа $G(S)$ имеет вид $G(S) = \{(t_1, t_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid t_1 \cdot t_2 = 1\} = \{(t, t^{-1}) \in (\mathbb{C}^*)^2\}$, а простраснство $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Тогда в силу симплициальности $U//G = U/G = \mathbb{C} \cup_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}$, что согласуется с примером 3.5.

Пример 4.7. Приведём также пример, когда предвеер не является симплициальным. Пусть $S = \{a_1 = e_1, a_2 = e_1\} \subset \mathbb{R}$, а в качестве $\mathcal{K}$ возьмём полный набор подмножеств S. Тогда $V_{(S,\mathcal{K})}$ есть просто $\mathbb{C}$, группа G устроена так же, как в примере 4.6, а именно: $G(S) = \{(t, t^{-1}) \in (\mathbb{C}^*)^2\}$, а $U(\mathcal{K}) = \mathbb{C}^2$, тогда пространство орбит действия $G(S)$ на $U(K)$ не хаусдорфово (орбита $\{0\} \times \mathbb{C}^*$ не замкнута), то есть отлично от $\mathbb{C}$.

5. Условие квазивеера и хаусдорфовость

Утверждение из [1] (Lemma 5.1.4]) говорит, что если набор конусов образует веер (на самом деле это доказательство проходит и в случае квазивеера), то соответствующее ему предмногообразие оказывается отделимым. В процессе написания данной работы эта идея была развита и был получен критерий отделимости для предмногообразий полученых из предвееров.

Теорема 5.1. *Алгебраическое предмногообразие $V_{(S,\mathcal{K})}$ отделимо тогда и только тогда, когда $(S, \mathcal{K})$ — квазивеер.*

Замечание. Доказательство хаусдорфовости в случае веера из [1] на самом деле проходит и при наличии нестрого выпуклых конусов, поэтому в этой теореме важнее часть «только тогда».

Доказательство. В соответствии с определением топологии Зарисского на $V_{(S,\mathcal{K})}$ ([2, Ch.3]), замкнутость вложения $\Delta\colon X \to X \times X,\ x \mapsto (x, x)$ эквивалентна тому, что если конусы $\sigma_1 = \mathrm{Cone}(a_i \mid i \in I)$ и $\sigma_2 = \mathrm{Cone}(a_j \mid j \in J)$, а $\tau = \mathrm{Cone}(a_k \mid k \in K \subset I \cap J)$ — одна из общих граней, то диагональное вложение $V_\tau \to V_{\sigma_1} \times V_{\sigma_2}$ замкнуто. Нетрудно показать, что это эквивалентно сюръективности двойственного гомоморфизма алгебр $\mathbb{C}[V_{\sigma_1}] \otimes \mathbb{C}[V_{\sigma_2}] \to \mathbb{C}[V_\tau]$, а это, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = \tau^\vee$ (но $\sigma_1^\vee \subset \tau^\vee$ и $\sigma_2^\vee \subset \tau^\vee$, поэтому это тоже самое, что $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee \supseteq \tau^\vee$). Но $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee$ всегда (это равенство прокомментировано ниже), поэтому интересующая нас сюръективность имеется тогда и только тогда, когда $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \tau$ и $K = I \cap J$.

Как и обещали, поясним равенство $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee$. Пусть $\sigma_1 = \bigcap\limits_m H^+_{u_m}$, а $\sigma_2 = \bigcap\limits_n H^+_{v_n}$, тогда $\sigma_1^\vee = \mathrm{Cone}(u_m)$, $\sigma_2^\vee = \mathrm{Cone}(v_n)$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \bigcap\limits_m H^+_{u_m} \cap \bigcap\limits_n H^+_{v_n}$, значит $(\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \mathrm{Cone}(u_m, v_n) = \mathrm{Cone}(u_m) + \mathrm{Cone}(v_n) = \sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee$. $\square$

Итак, мы видим, что немного обобщив конструкцию на предвеера, мы хоть и допустили построение новых алгебраических предмногообразий, но сохранить при этом даже хаусдорфовость (напомним, что для алгебраичесих многообразий хаусдорфовость в классической топологии эквивалентна отделимости) не удаётся.

Итогом работы можно считать установление следующего соответствия:

Произвольные предвееры $\to$ Торические предмногообразия
Квазивееры $\Leftrightarrow$ Отделимые торические предмногообразия
Симплициальные вееры $\Leftrightarrow$ Торические многообразия, с геометрическим фактором

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.*
[2] D. Cox, J. Little, H. Schenck. *Toic Varieties.*