Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Гомологии полиэдральных произведений и свойства коммутанта прямоугольной группы Коксетера

Курсовая работа

студентки 4–го курса
Ильясовой Марины Фаридовны.
Научный руководитель –
д.физ.-мат.н., профессор Панов Т. Е.

Москва 2018

Прямоугольные группы Коксетера играют важную роль в геометрической теории групп. С одной стороны, они являются частным случаем граф-произведения групп. Если $\mathbf{G} = (G_1, \dots, G_m)$ и Γ — граф на m вершинах, то *граф-произведение* $\mathbf{G}^\Gamma$ определяется следующим образом

$$\mathbf{G}^\Gamma = \bigstar_{k=1}^m G_k / (g_i g_j = g_j g_i \ \text{ при } g_i \in G_i, g_j \in G_j, \{i,j\} \in \Gamma),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k. Прямоугольные группы Кокстера получаются при $G_k = \mathbb{Z}_2$. С другой стороны, эти группы интересны и с геометрической точки зрения, поскольку являются группами, порожденными отражениями в гипергранях многогранников с прямыми двугранными углами.

Коммутанты групп Коксетера являются фундаментальными группами конечномерных асферических пространств (вещественных момент-угол комплексов), часто оказывающихся многообразиями. В работе [2] был получен критерий, показывающий, в каких случаях коммутант группы Коксетера является свободной группой. В данной работе изучается, в каких случаях коммутант оказывается группой с одним соотношением. Такие группы представляют интерес для изучения, поскольку являются фундаментальными группами двумерных многообразий.

Рассмотрим упорядоченное множество $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ и его подмножества $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$, где I может быть пустым или всем $[m]$. Пусть $\mathcal{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m]$, то есть такой набор подмножеств $I \subset [m]$, что для любого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества в I также содержатся в $\mathcal{K}$.

Для каждого подмножества $J \subset [m]$ рассмотрим ограничение $\mathcal{K}$ на J

$$\mathcal{K}_J = \{I \in \mathcal{K} : I \subset J\},$$

которое называется *полным подкомплексом* в комплексе $\mathcal{K}$.

Конструкция 1 (полиэдральное произведение). *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и*

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) = \{(X_1, A_1), \dots, (X_m, A_m)\}$$

— набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $pt \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \Big\{(x_1, \dots, x_m) \in \textstyle\prod_{k=1}^m X_k : x_k \in A_k \text{ при } k \notin I\Big\}$$

и определим полиэдральное произведение набора $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^I = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} \left(\prod_{i \in I} X_i \times \prod_{i \notin I} A_i\right).$$

В случае, когда все пары (X_i, A_i) одинаковы, т. е. $X_i = X$ и $A_i = A$ для всех i, используем обозначение $(X, A)^{\mathcal{K}}$ вместо $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})^{\mathcal{K}}$.

Пример 2. *Пусть* $(X, A)^{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)$, *где* D^1 *— отрезок* $[-1, 1]$, *а* S^0 *— его граница {-1,1}. Полиэдральное произведение* $(D^1, S^0)^{\mathscr{K}}$ *известно как вещественный момент-угол-комплекс и обозначается* $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$*:*

$$\mathscr{R}_{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)^{\mathscr{K}} = \bigcup_{I \in \mathscr{K}} (D^1, S^0)^I.$$

Конструкция 3 (прямоугольная группа Коксетера). *Пусть* Γ *— граф с* m *вершинами. Будем писать* $\{i, j\} \in \Gamma$, *если* $\{i, j\}$ *является ребром. Обозначим через* $F(g_1, \ldots, g_m)$ *свободную группу с* m *образующими, соответствующими вершинам графа* Γ. *Прямоугольная группа Коксетера* RC_Γ *определяется как*

$$RC_\Gamma = F(g_1, \ldots, g_m)/(g_i^2 = 1,\ g_i g_j = g_j g_i \text{ при } \{i, j\} \in \Gamma).$$

Будем обозначать прямоугольную группу Коксетера, соответствующую одномерному остову симплициального комплекса $\mathscr{K}$, *через* $RC_{\mathscr{K}}$.

Недостающей гранью симплициального комплекса $\mathscr{K}$ называется подмножество $I \subset [m]$, которое само не является симплексом в $\mathscr{K}$, но любое собственное подмножество которого является симплексом в $\mathscr{K}$. Симплициальный комплекс $\mathscr{K}$ называется *флаговым*, если каждая его недостающая грань состоит из двух вершин (т. е. любой набор его вершин, попарно соединенных ребрами, является набором вершин некоторого симплекса). *Кликой* в графе Γ называется называется подможество I его вершин, попарно соединенных ребрами. Каждый флаговый комплекс $\mathscr{K}$ является *кликовым комлексом* своего одномерного остова $\Gamma = \mathscr{K}^1$, т. е. получается заполнением каждой клики в Γ симплексом.

Линейно связное пространство X называется *асферическим*, если $\pi_i(X) = 0$ для любого $i \geqslant 2$. Асферическое пространство X является пространством Эйленберга-Маклейна $K(\pi, 1)$ с $\pi = \pi_1(X)$.

Для любой группы G существует универсальное G-накрытие $EG \to BG$, тотальное пространство EG которого стягиваемо, а база BG, называемая классифицирующим пространством для G, имеет гомотопический тип $K(G, 1)$.

Коммутант группы G будем обозначать через G'.

Предложение 4 (см. [2], Следствие 3.4). *Пусть* $\mathscr{K}$ *— симплициальный комплекс на* m *вершинах. Тогда* $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ *имеет гомотопический тип* $K(\pi, 1)$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{K}$ *— флаговый, и группа* $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ *изоморфна коммутанту* $RC'_{\mathscr{K}}$.

Граф Γ называется *хордовым*, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, не являющиеся соседними в цикле).

Предложение 5 (см. [2], Следствие 4.4). *Коммутант* $RC'_{\mathscr{K}}$ *является свободной группой тогда и только тогда, когда* $\mathscr{K}^1$ *является хордовым графом.*

Пусть $(g,h)=g^{-1}h^{-1}gh$ — групповой коммутатор элементов g, h. В следующей теореме приводится явный вид минимального набора образующих конечно порожденного коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$.

Теорема 6 (см. [2], Теорема 4.5). *Пусть $RC_{\mathcal{K}}$ — прямоугольная группа Коксетера, соответствующая симплициальному комплексу $\mathcal{K}$ на m вершинах. Тогда коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]} rank\widetilde{H}_0(\mathcal{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида*

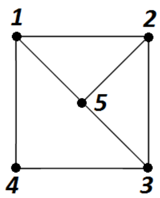
$$(g_j,g_i),\quad (g_{k_1},(g_j,g_i)),\ \ldots,\ (g_{k_1},(g_{k_2},\ldots(g_{k_{m-2}}(g_j,g_i))\ldots)),$$

где $k_1<k_2<\cdots<k_{l-2}<j>i$, $k_s\neq i$ для всех s и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathcal{K}_{k_1,\ldots,k_{l-2},j,i}$, не содержащей j.

Пример 7.

1. *Пусть $\mathcal{K}$ — цикл из $m\geqslant 4$ звеньев. Так как $\mathcal{K}^1$ не является хордовым графом, группа $RC'_{\mathcal{K}}$ не является свободной. В этом случае комплекс $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $(m-4)2^{m-3}+1$. Поэтому коммутант соответствующей группы $RC_{\mathcal{K}}$ является фундаментальной группой этой поверхности, а значит, группой с одним соотношением.*

2. *Пусть $\mathcal{K}$ — кликовый комплекс следующего графа*



на пяти вершинах. Теорема 6 дает для коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3,g_1),\ (g_4,g_2),\ (g_5,g_4),\ (g_5,(g_4,g_2)),$$

которые связаны соотношениями

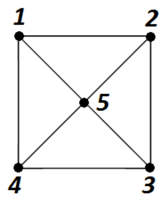
$$(g_3,g_1)^{-1}(g_4,g_2)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)=1,\quad (g_3,g_1)^{-1}(g_5,g_4)^{-1}(g_3,g_1)(g_5,g_4)=1.$$

Это легко доказать следующим образом. Так как каждый из элементов g_1 и g_3 коммутирует с элементами g_2 и g_4, то значит коммутируют и коммутаторы $(g_4,g_2)^{-1}$ и (g_3,g_1). Поэтому получаем

$$(g_3,g_1)^{-1}(g_4,g_2)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)=(g_3,g_1)^{-1}(g_3,g_1)(g_4,g_2)^{-1}(g_4,g_2)=1.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение.

3. *Пусть $\mathcal{K}$ — кликовый комплекс следующего графа*



на пяти вершинах. Теорема 6 дает для коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_2),$$

связанных соотношением $(g_3, g_1)^{-1}(g_4, g_2)^{-1}(g_3, g_1)(g_4, g_2) = 1$. В данном примере коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ — группа с одним соотношением.

Гомологии комплекса $\mathscr{R}_{\mathcal{K}}$ описываются следующим результатом.

Теорема 8 (см. [1], п. 4.5). *Для любого $k \geqslant 0$ имеется изоморфизм*

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J).$$

Используя эту теорему, вычислим 2-мерные группы гомологий для примеров, приведенных выше. В примере 7.2 $H_2(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. В примере 7.1 симплициальный комплекс — m-цикл, а в примере 7.3 — джойн 4-цикла и точки. В обоих случаях $H_2(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$.

Следующее утверждение обобщает примеры 7.1 и 7.3.

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $H_2(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$;

б) Либо $\mathcal{K}$ = p-цикл для $p \geqslant 4$, либо $\mathcal{K}$ = (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$.

При выполнении любого из этих двух условий имеем $H_k(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $k \geqslant 3$.

Доказательство.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $p \geqslant 4$ — множество вершин комплекса $\mathcal{K}$, образующих p-цикл. Согласно теореме 8

$$H_2(\mathscr{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J).$$

Полный подкомплекс $\mathcal{K}_I$ является p-циклом, поэтому $\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_I) = \mathbb{Z}$, а для любого $J \neq I$ полный подкомплекс $\mathcal{K}_J$ является стягиваемым пространством, поэтому $\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_I) = 0$. Таким образом, получаем, что $H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$.

а) $\Rightarrow$ б). Пусть $H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$. Тогда в представлении

$$H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J)$$

ровно одно из слагаемых в правой части равно $\mathbb{Z}$, а остальные равны 0. Это значит, что существует множество вершин $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, образующих цикл длины p для некоторого $p \geqslant 4$ (т. к. $\mathcal{K}$ — флаговый). Поскольку для любого подмножества $J \subset I$ имеем $\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_J) = 0$, то никакие две вершины, не являющиеся соседними в p-цикле, не соединены ребром. Если в комплексе $\mathcal{K}$ существует вершина $j \notin I$, то из того, что $\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_{I\cup\{j\}}) = 0$, следует, что вершина j соединена с каждой вершиной p-цикла. Если предположить, что в комплексе $\mathcal{K}$ существует вершины $j_1, j_2 \notin I$, не соединенные ребром, то подкомплекс $\mathcal{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}$ является 4-циклом, и, значит, $\widetilde{H}_1(\mathcal{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}) = \mathbb{Z}$, а это противоречит предположению. Следовательно, все вершины комплекса $\mathcal{K}$, не входящие в множество I, соединены с каждой вершиной множества I и попарно между собой ребрами. Так как комплекс $\mathcal{K}$ — флаговый, получаем, что $\mathcal{K} = (p\text{-цикл})*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$.

Докажем, что при выполнении условия пункта б) $H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = 0$ при $k \geqslant 3$. Согласно теореме 8

$$H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J).$$

Покажем, что все слагаемые в правой части равны 0 при $k \geqslant 3$. Если $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $p \geqslant 4$ — множество вершин комплекса $\mathcal{K}$, образующие p-цикл, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_I) = 0$ при $k \geqslant 3$. Так как для любого $J \neq I$ полный подкомплекс $\mathcal{K}_J$ является стягиваемым пространством, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathcal{K}_J) = 0$. Таким образом, получаем, что $H_k(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = 0$ для любого $k \geqslant 3$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что если $H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$, то фундаментальная группа $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = RC'_{\mathcal{K}}$ является группой с одним соотношением. Действительно, коммутант $RC'_{\mathcal{K}}$ для комплекса $\mathcal{K} = (p\text{-цикл})*\Delta^q$ совпадает с коммутантом $RC'_{\mathcal{K}}$ для комплекса $\mathcal{K}$, являющегося p-циклом, а этот последний коммутант есть группа с одним соотношением согласно примеру 7.1. Есть гипотеза, что верно и обратное:

Гипотеза 10. *Пусть $\mathcal{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $H_2(\mathcal{R}_{\mathcal{K}}) = \mathbb{Z}$;

б) $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ — группа с одним соотношением.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[2] Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера.* Мат. сборник 207 (2016), вып. 11, стр. 105-126.