Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра высшей геометрии и топологии

Полиэдральные произведения и соотношения в коммутанте прямоугольной группы Кокстера

Курсовая работа

студентки 5−го курса
Ильясовой Марины Фаридовны.
Научный руководитель –
д.физ.-мат.н., профессор Панов Т. Е.

Москва 2019

1. Введение

Прямоугольная группа Кокстера, соответствующая графу $\mathscr{K}^1$ (или флаговому симплициальному комплексу $\mathscr{K}$), определяется как группа $RC_{\mathscr{K}}$ с образующими $g_1, \ldots, g_m$ и соотношениями $g_i^2 = 1$, $g_i g_j = g_j g_i$ при $\{i,j\} \in \mathscr{K}^1$. Прямоугольные группы Кокстера представляют интерес с геометрической точки зрения, так как они возникают из отражений в гипергранях прямоугольных многогранников, в том числе неограниченных, в пространстве Лобачевского.

Коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ прямоугольной группы Кокстера является фундаментальной группой конечномерного асферического пространства — *вещественного момент-угол комплекса* $\mathscr{R}_{\mathscr{K}} = (D^1, S^0)^{\mathscr{K}}$, часто оказывающегося многообразием. В работе [8] был получен критерий, показывающий, в каких случаях коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является свободной группой. В этой работе получен критерий единственности соотношения в коммутанте $RC'_{\mathscr{K}}$. А именно, главным результатом является доказательство эквивалентности следующих условий для флагового симплициального комплекса $\mathscr{K}$:

а) $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ — группа с одним соотношением;
б) $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$;
в) либо $\mathscr{K}$ есть p-цикл (граница p-угольника) с $p \geqslant 4$, либо $\mathscr{K}$ имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$, где Δ^q — q-симплекс.

При выполнении этих условий $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ гомеоморфен произведению $S_g \times D^{q+1}$, где S_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g = (p-4)2^{p-3} + 1$, а D^{q+1} — $(q+1)$-мерный диск.

Эквивалентность свойств а) и б) вытекает из теоремы Линдона о тождестве [7] (см. [4, Theorem 2.1]), так как группа $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ не имеет кручения.

Интересно отметить связь свойства а) со свойством *минимальной неголодовости* симплициального комплекса $\mathscr{K}$, см. [6]. Как отмечено в [3, Theorem 4.8] для флаговых комплексов $\mathscr{K}$ свойство минимальной неголодовости эквивалентно тому, что *момент-угол-комплекс* $\mathscr{Z}_{\mathscr{K}} = (D^2, S^1)^{\mathscr{K}}$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер. Для нефлаговых комплексов вещественный момент-угол-комплекс $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ не является асферическим, и его топология не определяется лишь фундаментальной группой. Естественным аналогом условия а) является условие единственности соотношения в алгебре Понтрягина (гомологиях петель) $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$. В случае, когда $\mathscr{K}$ — p-цикл, алгебра $H_*(\Omega \mathscr{Z}_{\mathscr{K}})$ изучалась в работе [2].

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathscr{K}$ — *симплициальный комплекс* на множестве $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$, то есть такой набор подмножеств $I \subset [m]$, где I может быть пустым или всем $[m]$, что для любого $I \in \mathscr{K}$ все подмножества в I также содержатся в $\mathscr{K}$.

Конструкция 2.1 (полиэдральное произведение)**.** Пусть $\mathscr{K}$ — симплициальный комплекс на множестве $[m]$ и

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_1, A_1), \ldots, (X_m, A_m)\}$$

— набор из m пар топологических пространств с отмеченными точками $pt \in A_i \subset X_i$. Для каждого подмножества $I \subset [m]$ положим

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^I = \Big\{ (x_1, \ldots, x_m) \in \prod_{k=1}^m X_k : x_k \in A_k \text{ при } k \notin I \Big\}$$

и определим *полиэдральное произведение* набора $(\mathbf{X},\mathbf{A})$, соответствующее комплексу $\mathcal{K}$, как

$$(\mathbf{X},\mathbf{A})^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(\mathbf{X},\mathbf{A})^{I}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}\left(\prod_{i\in I}X_i\times\prod_{i\notin I}A_i\right)\subset\prod_{k=1}^{m}X_k.$$

Если $X_i=X$ и $A_i=A$ для всех i, то будем использовать обозначение $(X,A)^{\mathcal{K}}$ вместо $(\mathbf{X},\mathbf{A})^{\mathcal{K}}$.

Пример 2.2. Пусть $(X,A)^{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)$, где D^1 — отрезок $[-1,1]$, а S^0 — его граница {-1,1}. Полиэдральное произведение $(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}$ называется *вещественным момент-угол-комплексом* и обозначается $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}=(D^1,S^0)^{\mathcal{K}}=\bigcup_{I\in\mathcal{K}}(D^1,S^0)^{I}.$$

По определению $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ является кубическим подкомплексом в кубе $(D^1)^m=[-1,1]^m$.

Конструкция 2.3 (прямоугольная группа Кокстера)**.** Пусть Γ — граф с m вершинами. Будем писать $\{i,j\}\in\Gamma$, если вершины i и j соединены ребром. Тогда *прямоугольная группа Кокстера* RC_Γ определяется как

$$RC_\Gamma=F(g_1,\ldots,g_m)/(g_i^2=1,\ g_ig_j=g_jg_i\ \text{при}\ \{i,j\}\in\Gamma),$$

где $F(g_1,\ldots,g_m)$ — свободная группа с m образующими.

Прямоугольную группу Кокстера, соответствующую одномерному остову симплициального комплекса $\mathcal{K}$, будем обозначать через $RC_{\mathcal{K}}$.

Недостающая грань симплициального комплекса $\mathcal{K}$ — такое подмножество $I\subset[m]$, которое само не является симплексом в $\mathcal{K}$, но любое собственное подмножество которого является симплексом в $\mathcal{K}$. Симплициальный комплекс $\mathcal{K}$ называется *флаговым*, если у него нет недостающих граней размерности больше один (т. е. любой набор его вершин, попарно соединенных ребрами, является набором вершин некоторого симплекса). *Кликой* в графе Γ называется называется подможество I его вершин, попарно соединенных ребрами. Для графа Γ можно определить *кликовый комлекс* этого графа — симплициальный комплекс, получающийся заполнением каждой клики в Γ симплексом. Каждый флаговый комплекс $\mathcal{K}$ является кликовым комлексом своего одномерного остова $\Gamma=\mathcal{K}^1$.

Линейно связное пространство X называется *асферическим*, если $\pi_i(X)=0$ для любого $i\geqslant 2$. Асферическое пространство X является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\pi,1)$, где $\pi=\pi_1(X)$.

Коммутант группы G будем обозначать через G'.

Предложение 2.4 (см. [8, следствие 3.4])**.** *Пусть $\mathcal{K}$ — симплициальный комплекс на m вершинах. Тогда*

а) *Группа $\pi_1(\mathcal{R}_{\mathcal{K}})$ изоморфна коммутанту $RC'_{\mathcal{K}}$;*
б) *$\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ имеет гомотопический тип $K(\pi,1)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ — флаговый комплекс.*

Граф Γ называется *хордовым*, если каждый его цикл с четырьмя и более вершинами содержит хорду (ребро, соединяющее две вершины, не являющиеся соседними в цикле). Назовем граф *p-циклом*, если он является границей p-угольника.

В [8] получен следующий критерий свободности коммутанта $RC'_{\mathcal{K}}$.

Теорема 2.5 ([8, следствие 4.4]). *Коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является свободной группой тогда и только тогда, когда $\mathscr{K}^1$ является хордовым графом.*

Пусть $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$ — групповой коммутатор элементов g, h. Следующая теорема из [8] дает явный вид минимального набора образующих коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$. Напомним, что для каждого подмножества $J \subset [m]$ мы можем определить *полный подкомплекс* в комплексе $\mathscr{K}$ как

$$\mathscr{K}_J = \{I \in \mathscr{K} : I \subset J\}.$$

Теорема 2.6 ([8, теорема 4.5]). *Пусть $RC_{\mathscr{K}}$ — прямоугольная группа Кокстера, соответствующая симплициальному комплексу $\mathscr{K}$ на m вершинах. Тогда коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ имеет конечный минимальный набор образующих, состоящий из $\sum_{J\subset[m]} \operatorname{rank} \widetilde{H}_0(\mathscr{K}_J)$ вложенных коммутаторов вида*

$$(g_j, g_i),\quad (g_{k_1}, (g_j, g_i)),\ \ldots,\ (g_{k_1}, (g_{k_2}, \ldots (g_{k_{l-2}}(g_j, g_i))\ldots)),$$

где $k_1 < k_2 < \cdots < k_{l-2} < j > i$, $k_s \neq i$ для всех s и i — наименьшая вершина в некоторой связной компоненте подкомплекса $\mathscr{K}_{k_1,\ldots,k_{l-2},j,i}$, не содержащей j.

Гомологии комплекса $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ описываются следующим результатом.

Теорема 2.7 (см. [1, п. 4.5]). *Для любого $k \geqslant 0$ имеется изоморфизм*

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J).$$

3. Критерий единственности соотношения

Напомним, что *группой с одним соотношением* называется группа, для которой существует система образующих, в которых соотношение единственно.

Пусть G — группа с одним соотношением, т. е. $G = F/R$, где $F = F(x_1,\ldots,x_l)$ — свободная группа, R — наименьшая нормальная подгруппа в F, содержащая соотношение r. Рассмотрим пространство

$$Y(G) = \Big(\bigvee_{i=1}^{l} S^1_i\Big) \cup_r e^2, \tag{1}$$

полученное приклеиванием двумерной клетки к букету окружностей по слову r. По построению его гомологии описываются следущим образом.

Предложение 3.1. *Имеем $H_k(Y(G);\mathbb{Z}) = 0$ при $k \geqslant 3$ и*

$$H_2(Y(G);\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } r \in F'; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующее утверждение является одной из эквивалентных формулировок теоремы Линдона о тождестве [7].

Теорема 3.2 (см. [4, Theorem 2.1]). *Если G — группа с одним соотношением r, которое не является степенью, т. е. $r \neq u^n$ для $n > 1$, то пространство $Y(G)$ имеет гомотопический тип $K(G,1)$.*

В условиях теоремы 3.2 мы имеем $H_k(G;\mathbb{Z}) = H_k(Y(G);\mathbb{Z})$, т. е. гомологическая размерность группы G не превосходит 2.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{K}$ — флаговый симплициальный комплекс на множестве $[m]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ *— группа с одним соотношением;*
б) $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*;*

в) *либо $\mathscr{K}$ является p-циклом для $p \geqslant 4$, либо $\mathscr{K}$ имеет вид (p-цикл)$*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$, где Δ^q — q-симплекс.*

При выполнении любого из этих трех условий имеем $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}};\mathbb{Z}) = 0$ при $k \geqslant 3$.

Доказательство. В доказательстве теоремы все группы гомологий рассматриваются с коэффициэнтами в $\mathbb{Z}$.

в) $\Rightarrow$ б). (Эта импликация вытекает из импликаций, доказанных ниже, но мы приводим доказательство для иллюстрации.) Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ — множество вершин комплекса $\mathscr{K}$, образующих p-цикл, $p \geqslant 4$. Согласно теореме 2.7

$$H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J). \tag{2}$$

Так как $\mathscr{K}_I$ — p-цикл, имеем $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_I) = \mathbb{Z}$ и $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J) = 0$ при $J \neq I$, так как подкомплекс $\mathscr{K}_J$ с $J \neq I$ является стягиваемым пространством. Отсюда следует, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$.

б) $\Rightarrow$ в). Пусть $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$. Тогда в разложении (2) ровно одно из слагаемых в правой части равно $\mathbb{Z}$, а остальные равны 0. Это значит, что существует множество вершин $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, образующих p-цикл для некоторого $p \geqslant 4$ (так как $\mathscr{K}$ — флаговый). Поскольку для любого подмножества $J \subset I$ имеем $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_J) = 0$, то никакие две вершины, не являющиеся соседними в p-цикле, не соединены ребром. Если в комплексе $\mathscr{K}$ существует вершина $j \notin I$, то из того, что $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_{I\cup\{j\}}) = 0$, следует, что вершина j соединена с каждой вершиной p-цикла. Если предположить, что в комплексе $\mathscr{K}$ существует вершины $j_1, j_2 \notin I$, не соединенные ребром, то подкомплекс $\mathscr{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}$ является 4-циклом, и, значит, $\widetilde{H}_1(\mathscr{K}_{\{i_1,i_3\}\cup\{j_1,j_2\}}) = \mathbb{Z}$, а это противоречит предположению. Следовательно, все вершины комплекса $\mathscr{K}$, не входящие в множество I, соединены с каждой вершиной множества I и попарно между собой ребрами. Так как комплекс $\mathscr{K}$ — флаговый, получаем, что $\mathscr{K} = (p\text{-цикл})*\Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть сначала $\mathscr{K}$ является p-циклом. Тогда комплекс $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода $(p-4)2^{p-3}+1$ (см. [1, Proposition 4.1.8]). С другой стороны $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong RC'_{\mathscr{K}}$ согласно предложению 2.4. Поэтому $RC'_{\mathscr{K}}$ — группа с одним соотношением.

Пусть теперь $\widetilde{\mathscr{K}} = \mathscr{K} * \Delta^q$, где $\mathscr{K}$ — p-цикл. Тогда $\mathscr{R}_{\widetilde{\mathscr{K}}} = \mathscr{R}_{\mathscr{K}} \times D^{q+1}$ и $RC'_{\widetilde{\mathscr{K}}} = \pi_1(\mathscr{R}_{\widetilde{\mathscr{K}}}) = \pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = RC'_{\mathscr{K}}$ — также группа с одним соотношением.

а) $\Rightarrow$ б). Так как $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$ — асферическое конечное клеточное пространство, то группа $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ свободна от кручения (например, см. [5, предложение 2.45]). Поэтому, если $\pi_1(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = F/R$ — группа с одним соотношением r, то r не может являться степенью u^n для $n > 1$, иначе элемент u был бы конечного порядка.

Рассмотрим пространство $Y(RC'_{\mathscr{K}})$, см. (1). Согласно теореме 3.2 оно имеет гомотопичекий тип $K(RC'_{\mathscr{K}}, 1)$, а значит его группы гомологий совпадают с группами гомологий пространства $\mathscr{R}_{\mathscr{K}}$. Из предложения 3.1 следует, что группа $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}})$ равна либо $\mathbb{Z}$, либо 0. Группа $RC'_{\mathscr{K}}$ — не свободная, значит, граф $\mathscr{K}^1$ — не хордовый, то есть в нем существует бесхордовый цикл I длины $p \geqslant 4$. Поэтому в правой части разложения (2) одно из слагаемых равно $\mathbb{Z} = \widetilde{H}_1(\mathscr{K}_I)$. Следовательно, имеем $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = \mathbb{Z}$.

Докажем теперь, что при выполнении условия пункта в) группы гомологий $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = 0$ при $k \geqslant 3$. Согласно теореме 2.7

$$H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) \cong \bigoplus_{J\subset[m]} \widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J).$$

Покажем, что все слагаемые в правой части равны 0 при $k \geqslant 3$. Если $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$, $p \geqslant 4$ — множество вершин комплекса $\mathscr{K}$, образующие p-цикл, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_I) = 0$ при $k \geqslant 3$. Так как для любого $J \neq I$ полный подкомплекс $\mathscr{K}_J$ является стягиваемым пространством, то $\widetilde{H}_{k-1}(\mathscr{K}_J) = 0$. Таким образом, получаем, что $H_k(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}) = 0$ для любого $k \geqslant 3$. □

4. Примеры

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теорему 3.3.

Пример 4.1.
1. Пусть $\mathscr{K}$ — цикл из $m \geqslant 4$ звеньев. В доказательстве теоремы 3.3 мы показали, что коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ является группой с одним соотношением. Используя теорему 2.7, получаем, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

2. Пусть $\mathscr{K}$ — кликовый комплекс графа на рис. 1 а). Теорема 2.6 дает для

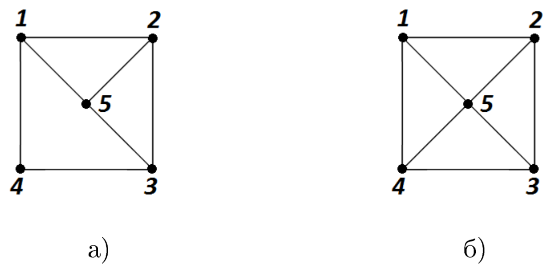

Рис. 1.

коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_2),\ (g_5, g_4),\ (g_5, (g_4, g_2)),$$

которые связаны соотношениями

$$(g_3, g_1)^{-1}(g_4, g_2)^{-1}(g_3, g_1)(g_4, g_2) = 1, \quad (g_3, g_1)^{-1}(g_5, g_4)^{-1}(g_3, g_1)(g_5, g_4) = 1.$$

Это легко доказать следующим образом. Так как каждый из элементов g_1 и g_3 коммутирует с элементами g_2 и g_4, то значит коммутируют и коммутаторы $(g_4, g_2)^{-1}$ и (g_3, g_1). Поэтому получаем

$$(g_3, g_1)^{-1}(g_4, g_2)^{-1}(g_3, g_1)(g_4, g_2) = (g_3, g_1)^{-1}(g_3, g_1)(g_4, g_2)^{-1}(g_4, g_2) = 1.$$

Аналогично доказывается и второе соотношение. Используя теорему 2.7, получаем, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3. Пусть $\mathscr{K}$ — кликовый комплекс графа на рис. 1 б). Теорема 2.6 дает для коммутанта $RC'_{\mathscr{K}}$ следующую систему порождающих:

$$(g_3, g_1),\ (g_4, g_2),$$

связанных соотношением $(g_3, g_1)^{-1}(g_4, g_2)^{-1}(g_3, g_1)(g_4, g_2) = 1$. В данном примере коммутант $RC'_{\mathscr{K}}$ — группа с одним соотношением. Из теоремы 2.7 следует, что $H_2(\mathscr{R}_{\mathscr{K}}; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Список литературы

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[2] Я. А. Верёвкин. *Алгебры Понтрягина некоторых момент-угол комплексов.* Дальневост. матем. журн., 16:1 (2016), 9–23

[3] J. Grbic, T. Panov, S. Theriault, J. Wu. *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes.* Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no. 9, 6663–6682.

[4] E. Dyer, A. T. Vasquez. *Some small aspherical spaces.* J. Austral. Math. Soc. 16 (1973), 332–352.

[5] А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Издательство МЦНМО, Москва, 2011.

[6] И. Ю. Лимонченко. "Семейства минимально неголодовских комплексов и полиэдральные произведения", Дальневост. матем. журн., 15:2 (2015), 222–237

[7] R. C. Lyndon. *Cohomology theory of groups with a single defining relation.* Ann. of Math. (2) 52 (1950), 650–665.

[8] Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Кокстера.* Мат. сборник 207 (2016), вып. 11, стр. 105–126.