**Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова**

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

СВОЙСТВО SU-ЛИНЕЙНОСТИ ОПЕРАЦИЙ ∂_k И Δ В КОМПЛЕКСНЫХ (КО-)БОРДИЗМАХ

Джафаров Анар
403 группа

Научный руководитель:
Панов Тарас Евгеньевич

2019

1. Введение

Основной целью данной работы является проверка свойства SU-линейности для операций $\partial_k : \Omega^U \to \Omega^U$ и $\Delta : \Omega^U \to \Omega^U$.

2. Комплексные бордизмы

В этом разделе приведём самое необходимое для обсуждения комплексных (ко-)бордизмов как таковых: определение теории и базовые свойства.

Обозначим за η_n универсальное комплексное n-мерное расслоение над бесконечномерным грассманианом. Оно получается из тривиального расслоения $G_n(\mathbb{C}^\infty) \times \mathbb{C}^\infty$ ограничением на подмножество тотального пространства $\{(l, x) : x \in l\}$. *Комплексная структура* на $2n$-мерном вещественном расслоении ζ может быть задана одним из трёх эквивалентных способов:

1. как класс эквивалентности изоморфизмов вещественных векторных расслоений $\zeta \to \xi$, где ξ - комплексное векторное расслоение, такие изоморфизмы эквивалентны если отличаются на композицию с изоморфизмом комплексных расслоений;
2. как гомотопический класс морфизмов $2n$-мерных векторных расслоений $\zeta \to \eta_n$;
3. как гомотопический класс поднятий отображения $X \to BO(2n)$ классифицирующего расслоение ζ до отображения $X \to BU(n)$.

Далее все многообразия предполагаются гладкими, компактными и без границы (если не обговорено обратное).
Стабильно комплексной структурой на многообразии M назовём класс эквивалентности комплексных структур в стабильном комплексном расслоении, то есть вещественных изоморфизмов

$$c_\tau : TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \to \xi$$

где отношение эквивалентности порождено добавлением тривиальных комплексных слагаемых и композицией с изоморфизмами комплексных расслоений. Согласно третьему определению комплексной структуры такой изоморфизм определяет поднятие классифицирующего отображения $M \to BO(2l)$ до отображения $M \to BU(l)$ (где $2l = \dim M + k$). Композиция c_τ с изоморфизмом комплексных расслоений приводит к гомотопии в поднятии, а добавление тривиальных слагаемых к композиции поднятия с каноническим отображением $BO(l) \to BO(l+m)$. Таким образом класс эквивалентности стабильно комплексных структур на M задаётся гомотопическим классом поднятий классифицирующего отображения $M \to BO$ до $M \to BU$.
Стабильно комплексное многообразие или *U-многообразие* есть пара (M, c_τ).

Приведём два эквивалентных подхода к определению теории комплексных (ко-)бордизмов: геометрический и гомотопический.

Конструкция 2.1. (Геометрические U-бордизмы)
Стабильно комплексное многообразие M нульбордантно, если существует стабильно комплексное многообразие W с границей, такое, что $\partial W = M$ и индуцированная на границу стабильно комплексная структура эквивалентна собственной стабильно комплексной структуре M. Индуцированная структура определяется с помощью изоморфизма $TW|_{\partial W} \cong TM \oplus \underline{\mathbb{R}}$. Этот изоморфизм зависит от выбора внутренней или внешней нормали к M в W в качестве базиса. Выберем внешнюю и получим изоморфизм:

$$TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \cong TW|_{\partial W} \oplus \underline{\mathbb{R}}^k \cong \xi$$

где ξ - комплексное расслоние задающее стабильно комплексную структуру на многообразии W.
При замене внешней нормали на внутреннюю получается другая, вообще говоря, не эквивалентная стабильно комплексная структура получаемая из изоморфизма задаваемого как

$$TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k+1} \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \xi \oplus \underline{\mathbb{C}}$$

где $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ - комплексное сопряжение. Обозначим эту структуру $-c_\tau$. Для топологической пары (X, A) и неотрицательного целого n рассмотрим пары (M, f), где M - компактное n-мерное стабильно комплексное многообразие (возможно с границей), $f : (M, \partial M) \to (X, A)$. Такая пара (M, f) нульбордантна, если существует компактное $n + 1$-мерное стабильно комплексное многообразие с границей и $F : W \to X$ такое, что:

(1) M вложено в ∂W и U-структура на M совпадает с ограничением U-структуры на ∂W.
(2) $F|_M = f$ и $F(\partial W \setminus M) \subset A$.

Пары (M_1, f_1) и (M_2, f_2) бордантны, если несвязное объединение $(M_1 \sqcup -M_2, f_1 \sqcup f_2)$ нульбордантно. Класс эквивалентности (M, f) по отношению бордантности называется *классом бордизма* (M, f) и обозначается $[M, f]$ либо $[M]$. Классы бордизма n-мерных многообразий образуют группу по отношению к операции несвязного объединения, которую временно обозначим за $U'_n(X, A)$ и назовём (геометрической) группой U-бордизмов пары (X, A).

Конструкция 2.2. (Гомотопические U-бордизмы) Пространство Тома универсального расслоения η_n над $BU(n)$ обозначим за $MU(n)$. Введём спектр Тома $MU = \{Y_i, \Sigma Y_i \to Y_{i+1}; i \geq 1\}$ где $Y_{2k} = MU(k)$, $Y_{2k+1} = \Sigma Y_{2k}$, отображение $\Sigma Y_{2k} \to Y_{2k+1}$ - тождественное, а $\Sigma Y_{2k+1} \to Y_{2k+2}$ определено как отображение пространств тома $\Sigma^2 MU(k) = S^2 \wedge MU(k) \to MU(k+1)$ соответствующее классифицирующему морфизму расслоений $\eta_k \oplus \underline{\mathbb{C}} \to \eta_{k+1}$. Определим (гомотопические) группы U-(ко-)бордизма:

$$U_n(X, A) = \varinjlim \pi_{2k+n}((X/A) \wedge MU(k))$$
$$U^n(X, A) = \varprojlim [\Sigma^{2k-n}(X/A), MU(k)]$$

Определим $U_n(X) := U_n(X, \emptyset)$ и будем использовать обозначение $X_+ = X/\emptyset = X \sqcup \{pt\}$. Для конечномерных клеточных пар (X, A) группа $U_n(X, A)$ изоморфна $\pi_{k+n}((X/A) \wedge MU(k))$ для достаточно большого k и аналогично для $U^n(X, A)$. Таким образом $\Omega^U_n = \Omega^{-n}_U := U_n(pt) = U^{-n}(pt) = \pi_{2k+n}(MU(k))$ для некоторого k.

Доказательство эквивалентности этих конструкций принадлежит Коннеру и Флойду и является применением идей Рене Тома, использованных для доказательства аналогичного утверждения в неориентируемом случае.

Теорема 2.3. *Обобщённые теории гомологий $U'_*(X,A)$ и $U_*(X,A)$ изоморфны для клеточных пар (X,A).*

Доказательство. Для произвольной клеточной пары (X,A) определён изоморфизм $U'_n(X,A) \cong U'_n(X/A,pt)$, а группы $U_n(X,A)$ и $U_n((X/A),pt)$ по определению вообще совпадают. Поэтому перейдём к рассмотрению случая $A = \emptyset$. Для произвольного $[M,f] \in U'_n(X)$ рассмотрим вложение $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2k+n}$. Используя изоморфизм вещественных расслоений $TM \oplus \nu \cong \underline{\mathbb{R}}^{2k+n}$ можем определить стабильно комплексную структуру на нормальном расслоении.
Определим отображение Понтрягина-Тома $S^{2k+n} \to Th(\nu)$ отождествив трубчатую окрестность M в $\mathbb{R}^{2k+n} \subset S^{2k+n}$ с тотальным пространством расслоения дисков $D(\nu)$ и отобразив дополнение до трубчатой окрестности в отмеченную точку пространства Тома $Th(\nu) = D(\nu)/S(\nu)$.
Теперь определим отображение пар $(D(\nu),S(\nu)) \to (X \times D(\eta_k), X \times S(\eta_k))$ следующим образом: отображение $D(\nu) \to X \times D(\eta_k)$ по первой координатие есть композиция $D(\nu) \to M \xrightarrow{f} X$, а по второй отображение расслоений дисков соответствующее классифицирующему отображению. Отображение с расслоениями сфер строится аналогично. Эта конструкция приводит к отображению пространств Тома $Th(\nu) \to Th(X^0 \times \eta_k) = X_+ \wedge MU(k)$, где X^0 - нульмерное расслоение $X \to X$ задаваемое тождественным отображением. Композиция отображения Понтрягина-Тома и полученного отображения даёт нам элемент группы $U_n(X)$. Обратное отображение строится так: пусть дан класс отображений $g : S^{2k+n} \to MU(k)$. Заменим g на гомотопное ему и добьёмся трансверсальности вдоль нулевого сечения $BU(k) \subset MU(k)$ и положим $M := g^{-1}BU(k)$ - n-мерное подмногообразие в S^{2k+n}. При этом имеем морфизм нормальных расслоений к $\nu(M \hookrightarrow S^{2k+n}) \to \nu(BU(k) \hookrightarrow MU(k))$ определяющий нормальную стабильно комплексную структуру на M.

□

С этого момента будет обозначать обе теории $U_*(X,A)$.

Конструкция 2.4. (Произведения) Классифицирующему отображению $m+n$-мерного расслоения $\eta_m \times \eta_n$ соответствует (гомотопически ассоциативное и коммутативное) отображение пространств Тома $MU(m) \wedge MU(n) \to MU(m+n)$. Которое даёт возможность определить различные произведения:

(1) Произведение Кронекера:

$$\langle\ ,\ \rangle : U^m(X) \otimes U_n(X) \to \Omega^U_{n-m}$$

(2) $\frown$-произведение:

$$\frown : U^m(X) \otimes U_n(X) \to U_{n-m}(X)$$

(3) $\smile$-произведение:

$$\smile : U^m(X) \otimes U^n(X) \to U^(m+n)(X)$$

Пусть $\Delta : X_+ \to X_+ \wedge X_+$ - диагональное отображение. Тогда произведения определяются следующим образом:

(1) Пусть $x \in U^m(X)$, тогда $x : \Sigma^{2k-m}X_+ \to MU(l)$, и $\alpha \in U_n(X)$, тогда $\alpha : S^{2l+n} \to X_+ \wedge MU(n)$. Определим $\langle x, \alpha \rangle$ как следующую композицию: $S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2k-m}\alpha} \Sigma^{2k-m}X_+ \wedge MU(l) \xrightarrow{x \wedge id} MU(k) \wedge MU(l) \to MU(k+l)$

(2) Пусть, x и α такие же, как в определии $\langle\ ,\rangle$, определим $x \frown \alpha$ как композицию: $S^{2k+2l+n-m} \xrightarrow{\Sigma^{2k-m}} \Sigma^{2l+n}X_+ \wedge MU(l) \xrightarrow{\Sigma^{2l+n}\Delta\wedge id} X_+ \wedge \Sigma^{2l+n}X_+ \wedge MU(l) \xrightarrow{id\wedge x\wedge id} X_+ \wedge MU(k) \wedge MU(l) \to X_+ \wedge MU(k+l)$

(3) Пусть теперь $x \in U^m(X)$, а $y \in U^n(X)$, то есть $x : \Sigma^{2k-m}X_+ \to MU(k)$, а $y : \Sigma^{2l-m}X_+ \to MU(l)$, Определим $x \smile y$ композицией: $\Sigma^{2k+2l-n-m}X_+ \xrightarrow{\Sigma^{2l+2k-m-n}\Delta} \Sigma^{2k-m}X_+ \wedge \Sigma^{2l-m}X_+ \xrightarrow{x\wedge y}$ $MU(k) \wedge MU(l) \to MU(k+l)$

Определённое $\smile$-умножение превращает $U^*(X) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} U^n(X)$ в градуированное коммутативное кольцо, называемое *кольцом комплексных бордизмов пространства* X. Кольцо $\Omega^U := U_*(pt) = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} U^n(pt)$ называют просто *кольцом комплексных бордизмов.*

Кроме того, определено действие Ω_U на $U^*(X)$ для любого X превращающее $U^*(X)$ в Ω_U-модуль. Для произвольных $x \in \Omega_U^n$ и $y \in U^m(X)$ действие x на y определяется композицией:$\Sigma^{2k+2l-m-n}X_+ = \Sigma^{2l-n}pt_+ \wedge \Sigma^{2k-m}X_+ \xrightarrow{x\wedge y} MU(l) \wedge MU(k) \to MU(k+l)$

Конструкция 2.5. (Двойственность Пуанкаре-Атьи)
Стабильно комплексное многообразие M размерности d имеет фундаментальный класс $[M] \in U_d(M)$ определяемый как класс бордизма тождественного отображения $M \to M$, умножение на который определяет изоморфизм Пуанкаре-Атьи:

$$D_U : U^k(X) \xrightarrow{\cong} U_{d-k}(X),\ x \mapsto x \frown [M].$$

Для целых $i \geq 1$ положим $m_i = 1$, если $i + 1 \neq p^k$ ни для какого простого p, и $m_i = p$, если $i + 1 = p^k$, для некоторого простого p. Структура кольца Ω^U описывается следующей теоремой Милнора и Новикова.

Теорема 2.6. *(Милнор, Новиков)*

(1) $\Omega^U \cong \mathbb{Z}[a_i : i \geq 1],\ \ deg\ a_i = 2i$

(2) *Класс бордизма стабильно комплексного $2i$-мерного многообразия M может быть взят в качестве образующей в $2i$-й размерности тогда и только тогда, когда $s_i[M] = \pm m_i$, где $s_i[M]$ - характеристическое число Милнора.*

(3) *Два стабильно комплексных многообразия комплексно бордантны тогда и только тогда, когда наборы их характеристических чисел Чженя полностью совпадают.*

Конструкция 2.7. (Формальный групповой закон геометрических кобордизмов) Пусть X - клеточный комплекс. Тогда $H^2(X) = [X, \mathbb{C}P^\infty] = [X, MU(1)] \subset U^2(X)$ при этом групповые операции на этом подмножестве не совпадают. Таким образом $x \in H^2(X)$ даёт элемент $u_x \in U^2(X)$. Элементы группы $U^2(X)$, который получаются таким образом называют *геометрическими бордизмами* пространства X.

Пусть X - k-мерное многообразие и класс $x \in H^2(X)$ двойственный по Пуанкаре к подмногообразию $M \subset X$ коразмерности 2 с комплексной структурой в нормальном расслоении. Если X стабильно комплексное многообразие, представляющее класс бордизма $[X] \in \Omega_k^U$, тогда $[M] = \varepsilon D(u_x) \in \Omega_{k-2}^U$, где D - изоморфизм Пуанкаре-Атьи, а $\varepsilon : U_{k-2}(X) \to \Omega_{k-2}^U$ - гомоморфизм аугментации.

Пусть два геометрических класса кобордизма $u, v \in U^2(X)$ соответствуют $x, y \in H^2(X)$ соответственно. Обозначим за $u +_H v$ геометрический класс кобордизма соответствующий $x + y$. Имеет место следующее соотношение в $U^2(X)$:

$$u +_H v = F_U(u, x) = u + v + \sum_{k \geq 1, l \geq 1} \alpha_{kl} u^k v^K$$

где коэффициенты $\alpha_{kl} \in \Omega^{-2(k+l-1)_U}$ не зависят от X.

Ряд $F_U(u, v) = u + v + \sum \alpha_{kl} u^k v^l$ задаёт коммутативный одномерный групповой закон называемый *групповым законом геометрических кобордизмов.*

Для финитной последовательности целых неотрицательных чисел $\omega =$ $= (\omega_1, \omega_2, ...)$ обозначим за $||\omega||$ сумму $\sum\limits_k k\omega_k$.

Теорема 2.8. *(Аксиомы классов Чженя Коннера-Флойда) С каждым n-мерным U-расслоением ξ над клеточным X и с каждым ω можно связать классы кобордизма $c_\omega^U(\xi) \in U^{||\omega||}$, удовлетворяющие следующим свойствам:*

(1) $c_0^U(\xi) = 1$
(2) $c_\omega^U(g^*\xi) = g^*(c_\omega^U(\xi))$
(3) $c_\omega^U(\xi \oplus \eta) = \sum_{\alpha+\beta=\omega} c_\alpha^U(\xi) c_\beta^U(\eta)$
(4) *Пусть ξ - одномерное расслоение над X, классифицируемое отображением $X \xrightarrow{f} BU(1)$ и пусть композиция $X \xrightarrow{f} BU(1) \to MU(1)$ представляет элемент $x \in \Omega_U^2(X)$. Тогда $c_\omega^U(\xi) = \sum\limits_{i \geq 0} (c_\omega, b_i) x^i$, где c_ω - универсальный (когомологический) класс Чженя расслоения, а b_i - элементы $H_*(BU)$, в которые переходит базис в гомологиях $H_*(BU(1))$ двойственный к базису $u^j \in H^*(BU(1))$ в когомологиях $BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$.*

Замечание. В пункте (4) ненулевой вклад даёт только слагаемое с $i = ||\omega||$. Причём $c_\omega^U(\xi)$ равен $x^{||\omega||}$, если ω имеет вид $(0, 0, \ldots)$ или $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ и нулю в противном случае.

Конструкция 2.9. (Эквивалентное определение классов Коннера-Флойда) Имеем $U^*(BU) = \varprojlim U^{*+2N}(BU(N)) = \Omega^U[[c_1^U, c_2^U, \ldots, c_i^U, \ldots]]$, где c_i^U назовём универсальным i-м классом Чженя Коннера-Флойда. Положим $c_i^U(\xi) = f^*(c_i^U)$, где $f^* : X \to BU$ классифицирующее отображение расслоения ξ.

Пусть η - тавтологическое расслоение над $\mathbb{C}P^\infty$, а $\overline{\eta}$ - сопряжённое к нему. Класс $c_i^U(\overline{\eta}) \in U^{2i}(X)$ соответствует вложению $\mathbb{C}P^\infty = BU(1) \hookrightarrow MU(1)$ являющееся гомотопической эквивалентностью. Иначе говоря, $c_1^U(\overline{\eta})$ - геометрический кобордизм, соответствующий когомологическому классу $c_1(\overline{\eta})$. Тогда $c_1^U(\eta) \in U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ - степенной ряд, обратный к $u = c_1^U(\overline{\eta})$ в формальной группе F_U.

Аналогично, для комплексного одномерного расслоения ξ класс $c_1^U(\xi)$ есть геометрический кобордизм соответствующий классу $c_1(\xi)$. Формальный групповой закон кобордизмов описывает первый класс Чженя Коннера-Флойда тензорного произведения одномерных U-расслоений:

$$c_1^U(\xi \otimes \eta) = F_U(c_1^U(\xi), c_1^U(\eta))$$

Если ξ - расслоение произвольной размерности, то $c_1(\xi) = c_1(det\xi)$, поэтому геометрическим бордизмом отвечающим классу $c_1(\xi)$ является $c_1^U(det\xi)$, который вообще говоря не равен $c_1^U(\xi)$. Пусть $det : U \to U(1)$ гомоморфизм взятия определителя, а $det : BU \to BU(1) = \mathbb{C}P^\infty$ индуцированное им отображение. Определим универсальный характеристический класс $d^U = det^* u = det^* c_1^U$. Тогда $d^U(\xi) = c_1^U(det\xi)$.

3. SU-бордизмы

Опишем построение SU-теории бордизмов (несколько менее подробно, учитывая аналогичность конструкций).
Скажем, что на многообразии M задана SU-структура (специальная унитарная структура), если на M задана U-структура, и структурная группа стабильного касательного расслоения редуцируется к SU. Стабильно комплексное многообразие допускает SU-структуру тогда и только тогда, когда первый класс Чженя $c_1(M) = 0$.

Конструкция 3.1. (SU-бордизмы) Геометрический подход переносится на специально-унитарный случай практически дословно, приведём определение, использующее гомотопический подход. Для этого потребуется определение MSU-спектра. Пространство Тома тавтологического расслоения $\widetilde{\eta}_n$ над $BSU(n)$ обозначается $MSU(n)$. Спектр Тома $MSU = \{Z_i, \Sigma Z_i \to Z_{i+1}; i \geq 1\}$ где $Z_{2k} = MSU(k)$, $Z_{2k+1} = \Sigma Y_{Zk}$, отображение $\Sigma Z_{2k} \to Z_{2k+1}$ - тождественное, а $\Sigma Z_{2k+1} \to Z_{2k+2}$ определено как отображение пространств тома $\Sigma^2 MSU(k) = S^2 \wedge MSU(k) \to MSU(k+1)$ соответствующее классифицирующему морфизму расслоений $\widetilde{\eta}_k \oplus \underline{\mathbb{C}} \to \widetilde{\eta}_{k+1}$. Тогда:

$$SU_n(X, A) = \varinjlim \pi_{2k+n}((X/A) \wedge MSU(k))$$
$$SU^n(X, A) = \varprojlim [\Sigma^{2k-n}(X/A), MSU(k)]$$

Определим кольцо специальных унитарных бордизмов $\Omega^{SU} := SU_*(pt)$.

4. Операции в комплексных кобордизмах

Стабильной операцией θ степени n в комплексных кобордизмах называется семейство аддитивных отображений:

$$\theta : U^k(X, A) \to U^{k+n}(X, A)$$

определённое для клеточных пар (X, A), которое функториально и коммутирует с изоморфизмом надстройки.

Конструкция 4.1. (Операции и характеристические классы)
Имеет место изоморфизм Ω^U-модулей:

$$A^U \cong U^*(MU) := \varprojlim U^{*+2N}(MU(N)).$$

Для элемента $a \in U^n(MU)$ представленного отображением спектра $a : MU \to \Sigma^n MU$ обозначим соответствующую ему операцию за $a^* : U^*(X) \to U^{*+n}(X)$. Для заданного $x \in U^m(X)$ представленного отображением $x \to \Sigma^m MU$ элемент $a^*x \in U^{m+n}(X)$ задаётся композицией:

$$X \xrightarrow{x} \Sigma^m MU \to \Sigma^m a \Sigma^{m+n} MU.$$

Таким образом мы определили левое действие A^U на $U^*(X)$, превращающее U^* в функтор в категорию градуированных левых A^U модулей. Аналогичным образом определим действие A^U на группах бордизмов. Для данного элемента $x \in U_m(X)$, представленного отображением $x : \Sigma^m S \to X \wedge MU$, элемент $a_*x \in U_{m-n}(X)$ представляется композицией:

$$\Sigma^{m-n} S \xrightarrow{\Sigma^{-n} x} \Sigma^{-n}(X \wedge MU) \xrightarrow{\Sigma^{-n}(id \wedge a)} X \wedge MU.$$

Имеют место следующие изоморфизмы Тома:

$$\varphi_*^N : U_{n+2N}(MU(N)) \to U_n(BU(N)),\ \varphi_N^* : U^n(BU(N)) \to U^{n+2N}(MU(N))$$

которые порождают стабильные изоморфизмы в пределах:

$$\varphi_* : U_n(MU) \to U_n(BU),\ \varphi^* : U^n(BU) \to U^n(MU)$$

из чего следует, что каждый характеристический класс Коннера-Флойда $\alpha \in U^n(BU)$ определяет операцию $\alpha = \varphi^*(\alpha) \in U^n(MU)$, и наоборот.

Если $x \in U_m(X)$ представлен многообразием $M \xrightarrow{f} X$, то a_*x может быть геометрически описан следующим образом. Пусть $\alpha = (\varphi^*)^{-1}(a)$. Рассмотрим класс $\alpha(-TM) \in U^n(M)$, где TM - касательное расслоение, а $-TM$ стабильное нормальное расслоение M. Двойственный по Пуанкаре-Атья класс $D_U\alpha(-TM) \in U_{m-n}(M)$ представлен некоторым классом бордизма $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M$. Тогда $a_*x \in U_{m-n}(X)$ представлен композицией $Y_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} M \xrightarrow{f} M$. Действие A^U на Ω_U и Ω^U задаёт линейные представления.

Лемма 4.2. *Представления A^U в Ω_U и Ω^U точны.*

Помимо представления A^U в бордизмах $U_*(X)$ для всех X, имеется другое представление A^U в $U_*(BU)$ описываемое следующим образом.

Конструкция 4.3. Пусть $a \in U^n(MU)$ - элемент A^U. Определим

$$\widetilde{a} := \varphi_* a_* \varphi_*^{-1} : U_m(BU) \to U_{m-n}(BU).$$

Геометрически это описывается следующим образом. Пусть $[M, \xi] \in U_M(BU)$ класс бордизма, где ξ расслоение, классифицируемое отображением $f : M \to BU$ (это означает, что $\xi = f^*(\eta)$, где η - тавтологическое расслоение над BU). Элемент $a \in U^n(MU)$ определяет универсальный характерестический класс $\alpha = (\varphi^*)^{-1}a \in U^n(BU)$ и класс $\alpha(\xi) \in U^n(M)$. Рассмотрим двойственный по Пуанкаре-Атья класс $D_U(\alpha(\xi)) = [Y_\alpha, f_\alpha] \in U_{m-n}(M)$. Тогда $\widetilde{a}[M, \xi] = [Y_\alpha, f_\alpha^*(\xi + TM) - TY_\alpha] \in U_{m-n}(BU)$.
Применяя гомоморфизм аугментации $\varepsilon : U_*(BU) \to \Omega^U$ получаем:

$$\varepsilon(\widetilde{a}[M, \xi]) = [Y_\alpha] = \langle (\varphi^*)^{-1}a, [M, \xi] \rangle \in \Omega^U_{m-n}.$$

Лемма 4.4. *Представление A^U в $U_*(BU)$ определяемое отображением $a \mapsto \widetilde{a}$ точно.*

5. Операции ∂_k и Δ

Конструкция 5.1. Пусть k_1, k_2 целые неотрицательные числа, определим

$$\Delta_{(k_1,k_2)} = \varphi^*((\overline{d}^U)^{k_1}(d^U)^{k_2}) \in (A^U)^{2k_1+2K_2}.$$

В частности введём обозначения: $\partial_k = \Delta_{(k,0)}$ и $\Delta = \Delta_{(1,1)}$.
Геометрически, $\partial_k[M]$ представлен подмногообразием, двойственным к $c_1(detTM)^k = c_1(M)^k$, а $\Delta[M]$ представлен многообразием, двойственным к $c_1(\overline{detTM})c_1(detTM) = -c_1^2(M)$.

Существует вложение $f : \Omega^{SU} \to \Omega^U$, что приводит к определению SU-линейных операций. Скажем, что операция a SU-линейна, если $a_*(xy) = xa_*(y)$ если $x \in f(\Omega^{SU}) \subset \Omega^U$, а $y \in \Omega^U$.

Лемма 5.2. *(Проверка SU-линейности)*
Операции ∂_k и Δ являются SU-линейными.

Доказательство. $\partial_k[M]$ есть подмногообразие M, двойственное к классу $c_1^k(M)$. Пусть $M = M_1 \times M_2$ и пусть $Y \subset M_2$ подмногообразие, двойственное $c_1(M_2)$. В таком случае (отождествляя $c_1(M_i)$ и $p^*(c_1(M_i))$) имеем $c_1(M) = c_1(M_1) + c_1(M_2)$. Предположим, что $[M_1] \in f(\Omega^U)$, тогда $c_1(M_1) = 0$ и $c_1^k(M) = c_1^k(M_2)$. При этом подмногообразие $M_1 \times M_2$ двойственное к классу $c_1(M_2)$ имеет вид $M_1 \times Y$. А его k-кратное трансверсальное пересечение даёт в точности $M_1 \times (Y \cap Y \cap \ldots \cap Y)$ то есть класс $[M_1]\partial_k[M_2]$. Итак, SU-линейность ∂_k доказана. Доказательство SU-линейности для Δ аналогично, так как $\Delta[M]$ есть подмногообразие, двойственное к $-c_1^2(M)$. □

Список литературы

[1] Georgiy Chernykh; Ivan Limonchenko; Taras Panov *SU-bordism: structure results and geometric representatives.*

[2] Conner, Pierre E.; Floyd, Edwin E. *Torsion in SU-bordism.*

[3] Адамс Дж. Ф. *Стабильные гомотопии и обобщённые гомологии*