Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра высшей геометрии и топологии

Курсовая работа

АЛГЕБРА ЛАНДВЕБЕРА-НОВИКОВА

Джафаров Анар
503 группа

Научный руководитель:
Панов Тарас Евгеньевич

2020

1. Введение

Целью данной работы является описание важных в теории кобордизмов алгебр Ландвебера-Новикова, являющихся, в некотором смысле, "структурообразующими" подалгебрами в алгебрах когомологических операций в теориях O-, U- и Sp-кобордизмов.

2. Предварительные сведения

2.1. **Обозначения.** Для начала введём в использование некоторые обозначения. Обсуждение всех трёх случаев когомологических теорий будет вестись параллельно, так как специфика конкретной структурной группы использоваться не будет. Поэтому все три линейные группы ($O(n)$, $U(n)$ и $Sp(n)$) будем обозначать за $G(n)$. Основное поле (или тело) обозначим за $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, и положим $d = \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{K} = 1,\ 2,\ 4$. При работе с $G(n)$-расслоениями мы будем использовать характеристические классы Штифеля-Уитни, Чженя и Понтрягина соответственно, их обозначим за $e_i(\xi) \in H^{di}(X)$ (для $G(n)$-расслоения $\xi \to X$). И наконец в качестве коэффициентного кольца в когомологиях будем брать $R = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ соответственно.

2.2. **Классифицирующие пространства.** Напомним теперь, как устроено классифицирующее $G(n)$-расслоение. Обозначим за $G_{r,s}(\mathbb{K})$ грассманиан r-мерных подпространств в $\mathbb{K}^{r+s}$, а за $BG(r) = G_{r,\infty}(\mathbb{K}) = \varinjlim G_{r,s}(\mathbb{K})$ - бесконечномерный грассманиан r-мерных подпространств в $\mathbb{K}^{\infty}$. Тогда тавтологические расслоения над конечномерными грассманианами в пределе дают тавтологическое расслоение над бесконечномерным, которое и классифицирует все r-мерные расслоения:

$$\begin{array}{ccccccc}
\xi_{r,s} & \longrightarrow & \xi_{r,s+1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & \xi_r \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
G_{r,s} & \longrightarrow & G_{r,s+1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & G_{r,\infty} = BG(r)
\end{array}$$

Также нам пригодится понятие пространства Тома расслоения $\xi \to X$:

$$MG(r) = {D(\xi(r))}\big/{S(\xi(r))}.$$

2.3. **Когомологии грассманианов.** Помимо расслоений $\xi_{r,s}$ рассмотрим расслоения $\eta_{r,s}$, такие, что $\xi_{r,s} \oplus \eta_{r,s}$ - тривиальны. Их можно определить как ортогональные дополнения к $\xi_{r,s}$ в тривиальных расслоениях.

Тогда, полагая $e_i = e_i(\xi_{r,s})$, $\bar{e}_j = e_j(\eta_{r,s})$, получаем (из формулы Уитни):

$$\sum_{i+j=k} e_i \bar{e}_j = 0,\ 0 < k \leq r+s, \tag{1}$$

и в качестве образующих в $H^*(G_{r,s}(\mathbb{K}))$ можно выбрать e_i, $\bar{e}_j$ ($i \leq r$, $j \leq s$). Все соотношения в когомологиях грассманианов порождаются соотношениями (1).

2.4. **Пополненное тензорное произведение.** Также нам понадобится понятие пополненного тензорного произведения, содержательное в случае, когда перемножаемые градуированные модули имеют неограниченные градуировки "с разных сторон":

Определение 2.1. Пусть $M^* = \sum\limits_{i \leq 0} M^i$ и $N^* = \sum\limits_{i \geq 0} N^i$ - градуированные абелевы группы:

(1) $(M^* \hat{\otimes} N^*)^k = \prod_{i+j=k} M^i \otimes N^j$
(2) $M^* \hat{\otimes} N^* = \bigoplus\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (M^* \hat{\otimes} N^*)^k$ - пополненное тензорное произведение.

Предложение 2.2. *Выполнено* $\varprojlim (M^* \hat{\otimes} N^*_\alpha) = M^* \hat{\otimes} (\varprojlim N^*_\alpha)$.

3. Теории кобордизмов

Здесь мы будем использовать гомотопический подход к определению кобордизмов в категории конечных клеточных пар:

$$H^n(X, A; MG) = \varinjlim [\Sigma^{dk-n}({}^{X}\!/\!_{A}), MG(k)].$$

Обозначим коэффициентное кольцо за $\Omega^*_G = H^*(pt; MG)$.

Для $G(n)$-расслоения $\xi \to X$, классифицирующее расслоение отображение $\xi \to \xi_n$ индуцирует отображение пространств Тома $Th\xi \to MG(n)$, которое задаёт класс Тома $u_\xi \in \overline{H}^{dn}(Th(\xi); MG)$. Класс Тома, в свою очередь, задаёт изоморфизм Тома $\varphi : H^k(X; MG) \to \overline{H}^{k+dn}(Th\xi; MG)$ по правилу $x \mapsto x \cdot u_\xi$.

Также нам понадобится отображение $\mu : H^*(\ ; MG) \to H^*(\ ; R)$. Определим его с помощью отображения спектров. Для этого нам необходимо отобржание $MU(k) \to K(R, dk)$, которое задаётся классом из $\overline{H}^{dk}(MU(k))$ или по (классическому) изоморфизму Тома из $H^0(BU(k))$, в качестве которого выберем единицу $1 \in H^0(BU(k))$.

Теория кобордизмов, вообще говоря, отлична от классической теории когомологий, однако при определённых условиях вычисление кобордизмов сводится к вычислению когомологий. Приведём соответствующее утверждение.

Предложение 3.1. *Если $H^*(X, A; R)$ - свободный R-модуль и $K^* \subset H^*(X, A; MG)$ изоморфно отображается на $H^*(X, A; R)$ посредством μ, то $\Omega^*_G \otimes K^* \to H^*(X, A; MG)$ - изоморфизм Ω^*_G-модулей.*

4. Когомологические операции и характеристические классы

4.1. **Определения.**

Определение 4.1. Характеристический класс γ степени i в G-кобордизмах — это сопоставление G-расслоению $\xi \to X$ класса $\gamma(\xi) \in H^i(X; MG)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

(1) естественность: если $f : \xi \to \eta$ - морфизм расслоений, то $\gamma(\xi) = f^*(\gamma(\eta))$;
(2) стабильность: $\gamma(\xi \oplus 1) = \gamma(\xi)$.

Пусть $\mathcal{B}^*$ - соответствующая градуированная алгебра относительно поточечного сложения и умножения.

Определение 4.2. Операция θ степени i в G-кобордизмах — это семейство естественных отображений, определённых для всех пар и коммутирующих с надстройкой:

$$\theta : H^k(X, A; MG) \to H^{k+i}(X, A; MG).$$

Пусть $\mathcal{A}^*$ - соответствующая градуированная алгебра относительно поточечного сложения и композиции.

Обе алгебры легко наделяются структурой Ω^*_G-модуля благодаря тому, что Ω^*_G вкладывается в кобордизмы любой клеточной пары.

4.2. **Аддитивная структура $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{B}^*$.** В действительности, эти алгебры отличаются лишь умножением, аддитивно, они устроены одинаково. Чтобы это показать, определим отображение $\Psi : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$. Пусть $\theta \in \mathcal{A}^*$ - операция, а $\xi \to X$ - G-расслоение, тогда:

$$\Psi(\theta)(\xi) = \varphi^{-1}\theta\varphi(1),$$

где φ - изоморфизм Тома.

Теорема 4.3. $\Psi : \mathcal{A}^* \to \mathcal{B}^*$ *- изоморфизм Ω^*_G-модулей.*

Доказательство. Построим обратное отображение $\Phi : \mathcal{B}^* \to \mathcal{A}^*$.
Сперва определим $\Phi(\gamma)$ на классах Тома G-расслоений: $\Phi(\gamma) \cdot u_\xi = \varphi(\gamma(\xi))$. Пусть $\alpha \in H^n(X, A; MG)$ задаётся отображением $f : \Sigma^{dk-n}({X}/{A}) \to MG(k)$, тогда $\sigma^{dk-n}\alpha$ задаётся тем же самым отображением, но как элемент $H^{dk}(\Sigma^{dk-n}X, \Sigma^{dk-n}A, MG))$, то есть $\Sigma^{dk-dk}({\Sigma^{dk-n}X}/{\Sigma^{dk-n}A}) \to MG(k)$. При этом, в силу конечности рассматриваемых комплексов, образ этого отображения лежит в $Th\xi_{k,s} \subset MG(k)$ для достаточно большого s, поэтому f пропускается через отображение $Th\xi_{k,s} \hookrightarrow MG(k)$, которое задаёт класс Тома $u_{\xi_{k,s}}$, таким образом получаем, что $\sigma^{dk-n}\alpha = f^*(u_{\xi_{k,s}})$ и значения $\Phi(\gamma)$ может быть распространено на α. Несложные проверки показывают, что полученные отображения взаимно обратны. $\square$

Теперь, для описания аддитивной структуры найдём в характеристических классах аналоги когомологических характеристических классов Штифеля - Уитни, Чженя и Понтрягина, для этого воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 4.4. *[P. Conner, E. Floyd - The Relation of Cobordism to K-Theories, 1966] Пусть $h()$ - мультипликативная теория когомологий, определённая для конечных пар. Предположим, что для любого $n > 0$ определён такой элемент $\varepsilon_n \in h^d(\mathbb{K}P^n)$, что:*

1. *$h^*(\mathbb{K}P^n)$ - свободный $h^*(pt)$-модуль с базисом $1, \varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \ldots, \varepsilon_n^n$*
2. *$i^*(\varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_n$.*

Тогда существует единственное такое естественное сопоставление $G(m)$-расслоению $\xi \to X$ элемента

$$E(\xi) = 1 + E_1(\xi) + \cdots + E_m(\xi),$$

что:

1. $E(\xi \oplus \eta) = E(\xi)E(\eta)$
2. $E(\xi_{1,n}) = 1 + \varepsilon_n$

Чтобы можно было применить эту теорему необходимо описать кобордизмы проективных пространств. Для этого определим, сперва, первый характеристический класс на одномерных расслоениях. Пусть $\xi \to X$ - $G(1)$-расслоение. Возьмём композицию классифицирующего отображения $X \to BG(1)$ с вложением $BG(1) \hookrightarrow MG(1)$, и получим элемент $E_1(\xi) \in H^d(X; MG)$. При таком определении $\mu(E_1(\xi)) = e_1(\xi)$. Когомологии проективных пространств — свободные R-модули, а также мы нашли элемент $E_1(\xi_{n,1})$, степени которого отображаются под действием μ в степени $e_1(\xi_{n,1}$, то есть в базис в $H^*(\mathbb{K}P^n)$. Согласно предложению 3.1 мы получаем, что степени $E_1(\xi_{n,1})$ дают Ω^*_G-базис в $H^*(\mathbb{K}P^n; MG)$. Теперь применяя теорему 4.4 получаем:

Теорема 4.5. *Существует единственный набор классов $E_i \in \mathcal{B}^{di}$ такой, что $E_0 = 1$ и выполнены следующие свойства:*

(1) $E_k(\xi \oplus \eta) = \sum\limits_{i+j=k} E_i(\xi)E_j(\eta)$

(2) *для $G(1)$-расслоений $E_1(\xi)$ - как определено выше и $E_i(\xi) = 0$ при $i > 1$.*

Более того, $\mu(E_i(\xi)) = e_i(\xi)$ для всех G-расслоений.

Обозначим полиномиальную подалгебру в $\mathcal{B}^*$, порождённую E_i за C^*. При этом из C^* отличается от B^* только "богатством" коэффициентов, что видно из следующей теоремы.

Теорема 4.6. $\mathcal{B}^* \cong \Omega^*_G \hat{\otimes} C^*$

Доказательство. $\mathcal{B}^* \overset{1}{\cong} \varprojlim H^*(G_{r,s}; MG) \overset{2}{\cong} \varprojlim \Omega^*_G \otimes K_{r,s} \overset{3}{\cong} \Omega^*_G \hat{\otimes} \varprojlim K_{r,s} \overset{4}{\cong} \Omega^*_G \hat{\otimes} C^*$

(1) Следует из универсальности расслоений $\xi_{r,s}$ и естественности характеристических классов.
(2) В $H^*(G_{r,s}; MG)$ подалгебру порождённую $E_1(\xi_{r,s}), \dots, E_r(\xi_{r,s})$ обозначим за $K_{r,s}$. При этом $K_{r,s}$ под действием μ изоморфно переходит в $H^*(G_{r,s})$, поэтому $H^*(G_{r,s}; MG) \cong \Omega^*_G \otimes K_{r,s}$
(3) Свойство пополненного тензорного произведения.
(4) Построим отображение $C^* \to K_{r,s}$ по правилу $E_i \mapsto E_i(\xi_{r,s})$, оно коммутирует с отображениями между $K_{r,s}$ и в пределе даёт изоморфизм $C^* \to \varprojlim K_{r,s}$

□

Итак, мы описали аддитивную структуру $\mathcal{B}^*$ и, как следствие, аддитивную структуру $\mathcal{A}^*$. Выберем в C^* базис отличный от степеней E_i, с которым и будем работать в дальнейшем.

Пусть $\omega = (i_1, \dots, i_r)$ - разбиение числа $i = i_1 + \dots + i_r$ и пусть $t_1, \dots, t_r$ - набор "символических" переменных. Могочлен $\sum t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$, являющийся симметризацией монома $t_1^{i_1} \dots t_r^{i_r}$, единственным образом представляется в виде многочлена $P_\omega(\sigma_1(t_1, \dots, t_r), \dots, \sigma_r(t_1, \dots t_r))$, где σ_j - j-й элементарный симметрический многочлен. Положим $S_\omega = P_\omega(E_1, \dots, E_r)$. Из теорем стандартного курса алгебры следует, что S_ω образуют базис в C^*.

Формула Уитни для этих классов принимает вид:

$$S_\omega(\xi \oplus \eta) = \sum_{\omega_1\omega_2=\omega} S_{\omega_1}(\xi)S_{\omega_2}(\eta).$$

Отождествим характеристические классы S_ω с их образом в $\mathcal{A}^*$ и обозначим порождённую ими подгруппу (изоморфный образ C^*) за A^*. Тогда $\mathcal{A}^* \cong \Omega_G^* \hat{\otimes} A^*$.

5. Алгебра Хопфа A^*

Наша ближайшая цель - показать, что A^* является алгеброй Хопфа. Копроизведение $\psi^* : A^* \to A^* \otimes A^*$ определим следующим образом:

$$\psi^*(S_\omega) = \sum_{\omega_1\omega_2=\omega} S_{\omega_1} \otimes S_{\omega_2}.$$

Трудная часть заключается в том, чтобы показать замкнутость A^* относительно умножения, которое, напомним, даётся посредством композиции операций.

Прежде, чем перейти к доказательству замкнутости обсудим два технических момента, а именно:

(1) Как A^* действует на произведениях классов кобордизмов.
(2) Как A^* действует на кобордизмах проективных пространств.

5.1. **Действие A^* на произведениях.** Определим действие $A^* \otimes A^*$ на $H^*(X, A; MG) \otimes H^*(Y, B; MG)$ со значениями в $H^*(X \times Y, X \times B \cup A \times Y; MG)$ следующим образом:

$$\big(\sum \theta'_i \otimes \theta''_j\big)(\alpha \otimes \beta) = \sum \theta'_i(\alpha)\theta''_j(\beta).$$

Лемма 5.1. *Пусть $\theta \in A^*$, а α, β - классы G-кобордизма, тогда:*

$$\theta(\alpha\beta) = \psi^*(\theta)(\alpha \otimes \beta)$$

Доказательство. Достаточно показать это для $\theta = S_\omega, \alpha = u_\xi, \beta = u_\eta$, где $\xi \to X$ и $\eta \to Y$ - G-расслоения. В очередной раз воспользуемся соображением о том, что любой класс кобордизмов может быть получен из классов Тома $G(n)$-расслоений с помощью надстроек и индуцированных отображений, это было показано в доказательстве теоремы 4.3. Это показывает, что достаточно проверить истинность утверждения для $\theta = S_\omega, \alpha = u_\xi, \beta = u_\eta$, где $\xi \to X$ и $\eta \to Y$ - G-расслоения. Произведение $u_\xi u_\eta$ оказывается равным элементу $u_{\xi\times\eta} \in \overline{H}^*(Th(\xi \times \eta)) = \overline{H}^*(Th\xi \wedge Th\eta)$. Тогда $S_\omega(u_\xi u_\eta) = S_\omega(u_{\xi\times\eta}) = S_\omega(\xi \times \eta)u_{\xi\times\eta} = \sum\limits_{\omega_1\omega_2=\omega} S_{\omega_1}(\xi)u_\xi S_{\omega_2}(\eta)u_\eta = \sum\limits_{\omega_1\omega_2=\omega} S_{\omega_1}(u_\xi)S_{\omega_2}(u_\eta) = \big(\sum\limits_{\omega_1\omega_2=\omega} S_{\omega_1} \otimes S_{\omega_2}\big)(u_\xi \otimes u_\eta) = \psi^*(S_\omega)(u_\xi \otimes u_\eta)$ □

5.2. **Действие A^* на кобордизмах проективных пространств.** Описание действия представим в виде следующих лемм.

Лемма 5.2. *Пусть ξ - $G(1)$-расслоение, тогда $S_k(\xi) = E_1^k(\xi)$ и $S_\omega(\xi) = 0$ в остальных случаях.*

Доказательство. Класс S_k получается как симметризация монома t_1^k то есть чтобы выразить S_k через классы E_i необходимо выразить $t_1^k + ... + t_r^k$ через элементарные симметрические многочлены. Это выражение будет иметь вид: $(t_1 + ... + t_r)^k - ...$, где все слагаемые, кроме первого будут содержать не только σ_1, поэтому после подстановки E_i получим: $E_1^k - ...$, где все слагаемые в многоточии будут содержать хотя бы один класс E_i, $i > 1$. Поэтому после вычисления на 1-мерном расслоении всё, кроме E_1^k занулится. □

Лемма 5.3. *Пусть $\alpha \in H^d(\mathbb{K}P^n; MG)$ - образующая, тогда $S_k(\alpha) = \alpha^{k+1}$ и $S_\omega(\xi) = 0$ в остальных случаях.*

Доказательство. Стандартное вложение $i : \mathbb{K}P^n \hookrightarrow \mathbb{K}P^{n+1}$ является ещё и нулевым сечением $\mathbb{K}P^n \hookrightarrow Th\xi_{1,n}$ причём $i^*(u_{\xi_{1,n}}) = \alpha$. Поэтому $S_k(\alpha) = i^*(S_k u_{\xi_{1,n}}) = i^*(S_k(\xi_{1,n})u_{\xi_{1,n}}) = i^*(E_1^k(\xi)u_{\xi_{1,n}}) = i^*(\alpha^k u_{\xi_{1,n}}) = \alpha^k\alpha = \alpha^{k+1}$. □

Следствие 5.4. *Для любого $G(1)$-расслоения ξ верно, что $S_k E_1(\xi) = E_1(\xi)^{k+1}$ и $S_\omega(\xi) = 0$ в остальных случаях.*

5.3. **Замкнутость произведения.**

Теорема 5.5. *A^* - подалгебра $\mathcal{A}^*$*

Прежде, чем приступить к доказательству приведём техническую лемму.

Лемма 5.6. *Пусть $\theta \in A^*$, а $\gamma \in C^*$, тогда существует класс $\gamma' \in C^*$ такой, что для любого G-расслоения $\theta \cdot \gamma(\xi) = \gamma'(\xi)$.*

Доказательство. Достаточно доказать это для расслоений, раскладывающихся в сумму $G(1)$-расслоений.

Наделим $R[t_1, \dots, t_n]$ структурой алгебры над A^* следующим образом:

$$S_k \cdot t_i = t_i^{k+1},\ S_\omega \cdot t_i = 0$$

$$\theta(\alpha\beta) = \psi^*\theta(\alpha \otimes \beta).$$

При этом, нетрудно проверить, что если α - симметрический многочлен, то $S_\omega\alpha$ - тоже симметрический многочлен, поэтому действие A^* ограничивается на подалгебру $R[E_1, \dots, E_n]$, отождествлённую с симметрическими многочленами.

Для $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n$ определим $f_\xi : R[t_1, \dots, t_n] \to H^*(X; MG)$ по правилу $t_i \mapsto E_1(\xi_i)$, тогда $f_\xi(\gamma) = \gamma(\xi)$, при этом

$$(\theta \cdot \gamma)(\xi) = \theta \cdot \gamma(\xi).$$

Переходя к пределу получаем действие A^* на $C^* = R[E_1, E_2, \dots]$.
Для $\theta \in A^*$ и $\gamma \in C^*$ обозначим за $\gamma_1 \in R[E_1, \dots, E_n]$ проекцию γ, а за $\theta\gamma_1$ проекцию $\theta\gamma$.

Тогда для произвольного расслоения ξ представленного в виде суммы n $G(1)$-расслоений, $(\theta \cdot \gamma)(\xi) = (\theta\gamma_1)(\xi) = \theta \cdot \gamma_1(\xi) = \theta \cdot \gamma(\xi)$, что и доказывает лемму. □

Доказательство теоремы. Пусть $\theta, \theta' \in A^*$ и $\psi^*(\theta') = \sum \theta'_i \otimes \theta''_i$. Также пусть γ и γ'_i - элементы C^* соответствующие θ и θ'_i и пусть u_ξ - класс Тома некоторого расслоения $\xi \to X$.

Тогда $\theta u_\xi = u_\xi\gamma(\xi)$ и, в таком случае:

$$(\theta' \circ \theta)u_\xi = u_\xi\big(\sum \gamma'_i(\xi)\theta''_i\gamma(\xi)\big)$$

Согласно лемме 5.6 $\theta''_i\gamma(\xi)$ представляется как $\bar{\gamma}(\xi)$ для некоторого $\bar{\gamma} \in C^*$, то есть сумма в этом выражении есть некоторый класс из C^* вычисленный на расслоении ξ что и доказывает замкнутость. □

6. Двойственная алгебра Хопфа A_*

В алгебре A^* копроизведение устроено очень просто. Непосредственно из определения мы имеем выражение для него в нашем "рабочем" базисе. Однако произведение устроено достаточно сложно. Чтобы изучить его прибегнем к двойственной алгебре Хопфа A_*. В ней ко-произведение есть отображение двойственное к произведению в A^* и наоборот. Таким образом мы "переворачиваем" сложность.

Пусть (A_*, ψ_*, φ_*) - двойственная алгебра Хопфа: $A_* = \bigoplus A_i,\ A_i = (A^i)^*$. Выберем в ней базис σ_ω, двойственный к S_ω, нетрудно видеть, что произведение тогда будет описываться формулой: $\psi_*(\sigma_{\omega'} \otimes \sigma_{\omega''}) = \sigma_{\omega'\omega''}$.

6.1. **Индексация базиса S_ω.** Разбиения ω мы считаем неупорядоченными, то есть, с нашей точки зрения разбиения $4 = 1+2+1$ и $4 = 2+1+1$ не отличаются. Поэтому один из удобных способов задать разбиение - посчитать количество слаемых всех видов. Пусть r_p - число слагаемых в разбиении ω равных p.Тогда вектора $\omega = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ и $R = (r_1, r_2, \dots)$ взаимно определяют друг друга. Введём дополнительные обозначения:

$$S^R = S_\omega,\ \sigma^R = \sigma_\omega$$

При этом операции композиции разбиений $\omega_1\omega_2$ соответствует операция покомпонентного сложения векторов $R_1 + R_2$. В новых терминах степень монома S^R равна $\|R\| = \sum pr_p$, а количество слагаемых в разбиении ω равно $|R| = \sum r_p$. Определим также мультиномиальный коэффициент, который пригодится немного позднее:

$$\binom{m}{R} = \frac{m!}{r_1!r_2!\dots(m-|R|)!}.$$

6.2. **Алгебры с действием A^*.** Рассмотрим общую ситуацию, когда есть градуированная градуированная алгебра $M^* = \bigoplus\limits_{i\geq 0} M^i$ над алгеброй Хопфа A^* и все M^i - свободные и конечно-порождённые R-модули. Левое действие A^* на M^* индуцирует правое действие на M_* - градуированном двойственном к M^* модуле по правилу $(\mu\theta, \alpha) = (\mu, \theta\alpha)$, где $\mu \in M_*, \alpha \in M^*, \theta \in A^*$. Пусть это действие задаётся гомоморфизмом $\lambda_* : M_* \otimes A^* \to M_*$, тогда, дуализируя, получаем:

$$\lambda^* : M^* \to M^* \otimes A_*$$

Лемма 6.1. *Для λ^* выполнены следующе свойства:*

(1) *Для любого $\alpha \in M^*$ выполнено: $(\lambda^* \otimes 1)\lambda^*(\alpha) = (1 \otimes \varphi_*)\lambda^*(\alpha) \in M^* \otimes A_* \otimes A_*$.*
(2) *$\lambda^* : M^* \to M^* \otimes A_*$ - гомоморфизм алгебр.*
(3) *Если $\lambda^*(\alpha) = \sum \alpha_i \otimes \tau_i$, где $\alpha, \alpha_i \in M^*$, $\tau_i \in A_*$, тогда для любого $\theta \in A^*$:*

$$\theta \cdot \alpha = \sum \langle\theta, \tau_i\rangle \alpha_i.$$

Доказательство. Действие λ_*, является правым, что выражается коммутативной диаграммой:

$$\begin{tikzcd} M_* \otimes A^* \otimes A^* \arrow[r, "1\otimes\varphi^*"] \arrow[d, "\lambda_*\otimes 1"] & M_* \otimes A^* \arrow[d, "\lambda_*"] \\ M_* \otimes A^* \arrow[r, "\lambda_*"] & M_* \end{tikzcd}$$

Дуализируя, получаем:

$$\begin{tikzcd} M^* \otimes A_* \otimes A_* & M^* \otimes A_* \arrow[l, "1\otimes\varphi_*"'] \\ M^* \otimes A_* \arrow[u, "\lambda^*\otimes 1"] & M^* \arrow[l, "\lambda^*"'] \arrow[u, "\lambda^*"'] \end{tikzcd},$$

что и выражает утверждение из первого пункта леммы.

Второй пункт доказывается дуализацией соответствующей диаграммы похожим образом.

Формула из третьего пункта следует из цепочки равенств:

$$\langle \mu, \theta\alpha \rangle = \langle \mu\theta, \alpha \rangle = \langle \lambda_*(\mu \otimes \theta), \alpha \rangle = \langle \mu \otimes \theta, \lambda^*\alpha \rangle = \sum \langle \mu, \alpha_i \rangle \langle \theta, \tau_i \rangle,$$

которая верна при всех $\mu \in M_*$, что и доказывает последнюю часть леммы. $\square$

Мы будем использовать это построение, в качестве M^* выбирая $H^*(\mathbb{K}P^n; MG)$.

6.3. **Вычисление копроизведения в A^*.** Копроизведение в алгебре Хопфа является гомоморфизмом, поэтому достаточно вычислить его на порождающих, то есть на σ_k. Сформулируем соответствующее утверждение в виде теоремы.

Теорема 6.2. *$\varphi_*(\sigma_k) = \sum \binom{m+1}{R} \sigma^R \otimes \sigma_m$, где сумма ведётся по всем парам (R, m) таким, что $\|R\| + m = k$ и $|R| \leq m + 1$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in H^d(\mathbb{K}P^n; MG)$ - образующая $H^*(\mathbb{K}P^n; MG)$, тогда:

$$\lambda^*\alpha = \alpha \otimes 1 + \alpha^2 \times \sigma_1 + \cdots + \alpha^n \otimes \sigma_{n-1}.$$

Используя лемму получаем:

$$(\lambda^* \otimes 1)\lambda^*\alpha = \sum_m (\lambda^*\alpha)^{m+1} \otimes \sigma_m = \sum_m \Big(\sum_{|R| \leq m+1} \binom{m+1}{R} \alpha^{\|R\|+m+1} \otimes \sigma^R \Big) \otimes \sigma_m =$$
$$\sum_k \alpha^{k+1} \otimes \big(\sum \binom{m+1}{R} \sigma^R \otimes \sigma_m \big)$$

С другой стороны $(1 \otimes \varphi_*)\lambda^*\alpha = \sum_k \alpha^{k+1} \otimes \varphi_*\sigma_k$ $\square$

6.4. **Вычисление произведений.** Теперь мы готовы к тому, чтобы сформулировать ответ на вопрос о том, как устроено произведение в A^*. Приведём рассуждение, результатом которого, можно считать алгоритм вычисления произведений базисных элементов.

Для этого спарим произведение $S_{\omega_1} \circ S_{\omega_2}$ с базисными элементами двойственной алгебры σ_ω, получим:

$$\big(S_{\omega_1}\circ S_{\omega_2},\sigma_\omega\big)=\big(\varphi^*(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2}),\sigma_\omega\big)=\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\varphi_*\sigma_\omega\big)=$$
$$\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\varphi_*(\psi_*(\sigma_{i_1}\otimes\dots\otimes\sigma_{i_r}))\big)=\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\psi_*(\varphi_*(\sigma_{i_1})\dots(\varphi_*(\sigma_{i_r}))\big)=$$
$$\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\psi_*(\big(\sum\tbinom{m_1+1}{R_1}\sigma^{R_1}\otimes\sigma_{m_1}\big)\dots\big(\sum\tbinom{m_r+1}{R_r}\sigma^{R_r}\otimes\sigma_{m_r}\big)\big)=$$
$$\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\sum\tbinom{m_1+1}{R_1}\dots\tbinom{m_r+1}{R_r}\sigma^{R_1+\dots+R_r}\otimes\sigma_{m_1\dots m_r}\big),$$

Очевидно, имеет место разложение:

$$S_{\omega_1}\circ S_{\omega_2}=\sum_\omega\big(S_{\omega_1}\otimes S_{\omega_2},\sum\binom{m_1+1}{R_1}\dots\binom{m_r+1}{R_r}\sigma^{R_1+\dots+R_r}\otimes\sigma_{m_1\dots m_r}\big)S_\omega,$$

которое можно считать финальной формулой произведения в A^*.

Пример 6.3. Продемонстрируем, как это громоздкое выражение может быть применено, для вычисления конкретных произведений:

(1) $S_n\circ S_n=(n+1)S_{2n}+2S_{n,n}$
(2) $S_m\circ S_n=(n+1)S_{m+n}+S_{m,n},\ m\neq n$
(3) $S_2\circ S_{2n,2n}\equiv S_{2,2n,2n}+S_{2n,2n+2} \pmod 2$
(4) $S_{2n,2n}\circ S_2\equiv S_{2,2n,2n}+S_{2n,2n+2}+S_{4n+2} \pmod 2$

Докажем 1. Из разложения

$$S_n\circ S_n=\sum_\omega\big(S_n\otimes S_n,\sum\binom{m_1+1}{R_1}\dots\binom{m_r+1}{R_r}\sigma^{R_1+\dots+R_r}\otimes\sigma_{m_1\dots m_r}\big)S_\omega$$

видно, что коэффициент при S_ω не будет равен нулю только для тех ω, в выражении $\varphi_*(_\omega)$ для которых встречается слагаемое пропорциональное $\sigma_n\otimes\sigma_n$. Соответствующий разбиению $n=n$ вектор R имеет вид $(0,...,0,1,0,...)$ с единицей в n-й позиции. Это означает, что только один из векторов $R_1,...,R_r$ не равен нулю. Кроме того только одно число из набора $(m_1,...,m_r)$ может быть отлично от нуля. Принципиально различимы две ситуации: когда индексы ненулевых вектора R и числа m совпадают и когда они отличаются. В первом случае мы имеем $\omega=2n$, в во втором $\omega=(n,n)$. Вычисляя мультиномиальные коэффициенты получаем $n+1$ в первом случае и 1 во втором. При этом в выражении $\varphi(\sigma_{(n,n)})$ слагаемое $\sigma_{(0,\dots,0,1,0,\dots)}\otimes\sigma_n$ возникает двумя способами ($R_1\neq 0,\ m_2\neq 0$ либо наоборот $R_2\neq 0,\ m_1\neq 0$), поэтому возникает коэффициент 2.

Аналогичным образом вычисляются и другие примеры. Конечно, произвольные произведения могут вычисляться гораздо сложнее, но эта сложность носит скорее "переборный" характер, чем идейный, поэтому на этом можно считать, что произведение в A^* и, как следствие, в $\mathcal{A}^*$ вычислено.

Список литературы

[1] P. S. Landweber - *Cobordism operations and Hopf algebras.*
[2] P. E. Conner; E. E. Floyd - *The Relation of Cobordism to K-Theories*
[3] J. Milnor - *The Steenrod algebra and it's dual.*